MA202 – Test – Développements limités

20 points – durée 1h30,
documents et calculatrices sont interdits.

04/03/2020

Exercice 1 ($2 \times 4 = 8$ **points**) *Donner le développement limité au voisinage de* 0 *des fonctions suivantes à l'ordre* 3*:*

1. $f_1(x) = e^x + x^4$;
2. $f_2(x) = \cos(x)\sqrt{1+x}$;
3. $f_3(x) = \sin(\sin(x))$;
4. $f_4(x) = \ln(2 + x + x^2)$.

Exercice 2 ($2 \times 2 = 4$ **points**) *Donner le développement limité au voisinage de* 1 *des fonctions suivantes à l'ordre* 3*:*

1. $g_1(x) = \sqrt{x}$;
2. $g_2(x) = x^2 + e^{x^2-2x+1}$.

Exercice 3 ($3 + 2 + 1 = 6$ **points**) *On considère la fonction*

$$f(x) = \cos(x)\sin(x) + \frac{1}{1+\ln(1+x^2)}.$$

1. *Calculer le développement limité à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de* $f(x)$*;*
2. *Donner l'équation de la tangente au graphe de* f *en* 0*;*
3. *Donner la position du graphe de* f *par rapport à sa tangente au voisinage de* 0.

Exercice 4 (2 **points**) *Calculer le développement limité à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de*

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

et prouver que

$$\tan(x) \geq x$$

pour x *un nombre réel positive qui est proche de 0. (En fait on peut prouver que* $\tan(x) \geq x$ *quand* $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$*.)*

Test Développements limités (04/03/2020)

exo 1.

Pf: 1. $f_1(x) = e^x + x^4$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^4 + o(x^3) \quad \text{1 pt}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{2 pts}$$

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$ 1 pt

Alors, $f_2(x) = \cos x \sqrt{1+x}$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + o(x^3) \quad \text{2 pts}$$

3. $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ 1 pt

Alors, $f_3(x) = \sin(\sin(x))$

$$= \sin\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{2 pts}$$

4. $f_4(x) = \ln(2 + x + x^2)$

$$= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}(x + x^2)\right)$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}(x+x^2) - \frac{1}{8}(x+x^2)^2 + \frac{1}{24}(x+x^2)^3 + o(x^3) \quad \text{1 pt}$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}(x+x^2) - \frac{1}{8}(x^2 + 2x^3 + o(x^3)) + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4}\right)x^3 + o(x^3)$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{24}x^3 + o(x^3) \quad \text{2 pts}$$

$= \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{24}x^3 + o(x^3)$

exo. 2.

Pf: 1. $g_1(x) = \sqrt{x} = \sqrt{(x-1)+1}$ 1 pt

$$= 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} + o((x-1)^3) \quad \text{2 pts}$$

2. $g_2(x) = x^2 + e^{x^2 - 2x + 1}$

$$= [(x-1)+1]^2 + e^{(x-1)^2} \quad \text{1 pt}$$

$$= (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 + 1 + (x-1)^2 + o((x-1)^3)$$

$$= 2 + 2(x-1) + 2(x-1)^2 + o((x-1)^3) \quad \text{2 pts}$$

exo. 3.

Pf: 1. $\cos x \sin x$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3)$$

$$= x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{1 pt}$$

$$\frac{1}{1 + \ln(1+x^2)}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2 + o(x^3)}$$

$$= 1 - (x^2 + o(x^3)) + o(x^3)$$

$$= 1 - x^2 + o(x^3) \quad \text{2 pts}$$

Alors,

$$f(x) = \cos x \sin x + \frac{1}{1 + \ln(1+x^2)}$$

$$= x - \frac{2}{3}x^3 + 1 - x^2 + o(x^3)$$

$$= 1 + x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{3 pts}$$

2. $y = 1 + x$ est sa tangente. 2 pts

3. $f(x) - y = -x^2 + o(x^2) \leq 0$ au voisinage de 0.

Alors f est au-dessous de sa tangente au voisinage de 0. 1 pt

exo.4.

Pf: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$

$= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

Alors $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$

$= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3)$

$= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ 1 pt

$\tan x - x = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

Alors quand $x \to 0+$,

$\tan x - x \geq 0$. 2 pts