**UVSQ** **2019/2020**
**L1 S2 LSMA202N**
**Mathématiques générales 2**

**Feuille de TD n° 2 : Primitives et intégrales (CORRIGÉ)**
*Version provisoire à vérifier*

## — Calculs d'intégrales

**Exercice 1.**

**Calculer les intégrales suivantes.** $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right) \mathrm{d}x$

Primitives : $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \int (x^2 + 3x^{-2}) \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Intervalles de définition : $]-\infty, 0[$ plus $]0, +\infty[$ (ce n'est pas $\mathbb{R}^*$).

$I_1 = \displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{x}\right]_1^2 = \left(\tfrac{8}{3} - \tfrac{3}{2}\right) - \left(\tfrac{1}{3} - 3\right) = \frac{23}{6}$

$I_2 = \displaystyle\int_1^2 (2 - 4\mathrm{e}^{3x}) \,\mathrm{d}x$

Primitives : $\displaystyle\int (2 - 4\mathrm{e}^{3x}) \,\mathrm{d}x = 2x - 4\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} + C = 2x - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{3x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$.

$I_2 = \displaystyle\int_1^2 (2 - 4\mathrm{e}^{3x}) \,\mathrm{d}x = \left[2x - \tfrac{4}{3}\mathrm{e}^{3x}\right]_1^2 = \left(4 - \tfrac{4}{3}\mathrm{e}^6\right) - \left(2 - \tfrac{4}{3}\mathrm{e}^3\right) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^6 + \frac{4}{3}\mathrm{e}^3 + 2$

$I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t^2 + 2t + 5} \,\mathrm{d}t$

Primitives : Puisque $(t^2 + 2t + 5)' = 2t + 2$, on a
$\displaystyle\int \frac{t+1}{t^2 + 2t + 5} \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} \int \frac{(t^2 + 2t + 5)'}{t^2 + 2t + 5} \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} \ln|t^2 + 2t + 5| + C = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2t + 5) + C \quad (C \in \mathbb{R})$ (le discriminant de $t^2 + 2t + 5$ est $\Delta = -16 < 0$ donc $t^2 + 2t + 5 > 0 \ \forall\, t \in \mathbb{R}$). Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$.

$I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t^2 + 2t + 5} \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} \left[\ln(t^2 + 2t + 5)\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}(\ln 8 - \ln 5) = \ln \sqrt{\tfrac{8}{5}} = \tfrac{3}{2} \ln 2 - \tfrac{1}{2} \ln 5$

$I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{1/u}}{u^2} \,\mathrm{d}u$

Primitives : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{1/u}}{u^2} \,\mathrm{d}u = -\int \mathrm{e}^{1/u} (1/u)' \,\mathrm{d}u = -\mathrm{e}^{1/u} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Intervalles de définition : $]-\infty, 0[$ plus $]0, +\infty[$ (ce n'est pas $\mathbb{R}^*$).

$I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{1/u}}{u^2} \,\mathrm{d}u = -\left[\mathrm{e}^{1/u}\right]_1^2 = -(\mathrm{e}^{1/2} - \mathrm{e}^1) = \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$

$I_5 = \displaystyle\int_0^1 (2x + 3)\sqrt{x^2 + 3x + 4} \,\mathrm{d}x$

Primitives : $\displaystyle\int (2x + 3)\sqrt{x^2 + 3x + 4} \,\mathrm{d}x = \int (x^2 + 3x + 4)^{1/2} (x^2 + 3x + 4)' \,\mathrm{d}x = \frac{(x^2 + 3x + 4)^{3/2}}{3/2} + C$
$= \tfrac{2}{3}(x^2 + 3x + 4)^{3/2} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Le discriminant de $x^2 + 3x + 4$ est $\Delta = -7 < 0$ donc $x^2 + 3x + 4 > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$.

$I_5 = \displaystyle\int_0^1 (2x + 3)\sqrt{x^2 + 3x + 4} \,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3} \left[(x^2 + 3x + 4)^{3/2}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}(8^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{32}{3}\sqrt{2} - \frac{16}{3}$

$I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{1 + s^2}$

Primitives : $\displaystyle\int \frac{1}{1 + s^2} \,\mathrm{d}s = \arctan s + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$ (car $1 + s^2 \geqslant 1 > 0 \ \forall\, s \in \mathbb{R}$).

$I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{1 + s^2} = [\arctan s]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

## — Calculs de primitives

**Exercice 2.**
**Pour chaque intervalle $I$ et chaque fonction $f$, calculer toutes les primitives de $f$ sur $I$ (si possible)[1].**

**2.1** $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}(x^2)'\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$.

**2.2** $I = ]-\infty, -1[, \quad f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^3}$

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \dfrac{(1+x^3)'}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\ln|1+x^3| + C \quad (C \in \mathbb{R})$

On a $x^3 + 1 = (x-1)(x^2 - x + 1)$. Le discriminant de $x^2 - x + 1$ est $< 0$ donc $x^2 - x + 1 > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Les intervalles de définition sont $]-\infty, -1[$ plus $]-1, +\infty[$ (ce n'est pas $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$).

Sur $]-\infty, -1[$, toutes les primitives sont $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(-1-x^3) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

Sur $]-1, +\infty[$, toutes les primitives sont $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

**2.3** $I = ]0, +\infty[, \quad f(u) = \dfrac{\ln u}{u}$

$\int f(u)\,\mathrm{d}u = \int (\ln u)^1(\ln u)'\,\mathrm{d}u = \dfrac{(\ln u)^2}{2} + C = \dfrac{1}{2}\ln^2 u + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Intervalles de définition : $]0, +\infty[ = \mathbb{R}$ (car il faut $u > 0$ pour que $\ln u$ soit défini).

**2.4** $I = \mathbb{R}, \quad f(t) = \dfrac{t}{\sqrt[3]{1+t^2}}$

$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (1+t^2)^{-1/3}(1+t^2)'\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\dfrac{(1+t^2)^{2/3}}{2/3} + C = \dfrac{3}{4}(1+t^2)^{2/3} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

On a que $\sqrt[3]{\alpha}$ est défini $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, et $\sqrt[3]{1+t^2} \neq 0 \ \forall\, t \in \mathbb{R}$.
Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$.

**2.5** $I = ]0, +\infty[, \quad f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1/x}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{(\ln x)'}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Il faut $x > 0$ (pour que $\ln x$ soit défini) et $\ln x \neq 0$ (pour le quotient).
Les intervalles de définition sont $]0, 1[$ plus $]1, +\infty[$ (l'énoncé est erroné).

Sur $]0, 1[$, toutes les primitives sont $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(-\ln x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

Sur $]1, +\infty[$, toutes les primitives sont $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(\ln x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

**2.6** $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \quad f(w) = \tan w$

$\int f(w)\,\mathrm{d}w = -\int \dfrac{(\cos w)'}{\cos w}\,\mathrm{d}w = -\ln|\cos w| + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Il faut $\cos w \neq 0$, donc les intervalles de définition sont tous ceux ne contenant pas un nombre de $\{\, \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$.
Ce sont donc $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Par exemple, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, toutes les primitives sont $\int f(w)\,\mathrm{d}w = -\ln(\cos w) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

Et sur $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, toutes les primitives sont $\int f(w)\,\mathrm{d}w = -\ln(-\cos w) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

1. L'un des intervalles est erroné.

## — Intégration par parties

**Exercice 3.**
**À l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes.**

$I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$

On dérive $u(x) = \ln x$, on primitive $v'(x) = 1$. Alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$ (une primitive quelconque suffit) et

$\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x = (\ln x)(x) - \int (\tfrac{1}{x})(x)\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C \ (C \in \mathbb{R}).$

Intervalles de définition : $]0, +\infty[$.

**Rappel : Pour pouvoir appliquer la formule de l'intégration par parties, il faut que $u$ et $v$ soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle en question.**

Ici $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ qui contient $[1, \mathrm{e}]$.

Donc $I_1 = [x(\ln x - 1)]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}\,(\ln \mathrm{e} - 1) - 1(\ln 1 - 1) = 1$.

$I_2 = \displaystyle\int_2^3 \frac{y}{\sqrt{y-1}}\,\mathrm{d}y$

On dérive $u(y) = y$, on primitive $v'(y) = (y-1)^{-1/2}$. Alors $u'(y) = 1$ et $v(y) = \frac{(y-1)^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{y-1}$ donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{y}{\sqrt{y-1}}\,\mathrm{d}y &= (y)(2\sqrt{y-1}) - \int (1)(2\sqrt{y-1})\,\mathrm{d}y \\
&= 2y\sqrt{y-1} - 2\int (y-1)^{1/2}(y-1)'\,\mathrm{d}y \\
&= 2y\sqrt{y-1} - 2\frac{(y-1)^{3/2}}{3/2} + C \\
&= 2y\sqrt{y-1} - \frac{4}{3}(y-1)^{3/2} + C \qquad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]1, +\infty[$, car $u, v \in \mathcal{C}^1(]1, +\infty[)$.

Donc $I_2 = \left[2y\sqrt{y-1} - \frac{4}{3}(y-1)^{3/2}\right]_2^3 = (6\sqrt{2} - \frac{4}{3} \times 2^{3/2}) - (4\sqrt{1} - \frac{4}{3} \times 1^{3/2}) = \dfrac{10}{3}\sqrt{2} - \dfrac{8}{3}$.

$I_3 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} z^2 \ln z \,\mathrm{d}z$

On dérive $u(z) = \ln z$, on primitive $v'(z) = z^2$. Alors $u'(z) = \frac{1}{z}$ et $v(z) = \frac{z^3}{3}$ donc

$$\begin{aligned}
\int z^2 \ln z \,\mathrm{d}z &= (\ln z)(\tfrac{z^3}{3}) - \int (\tfrac{1}{z})(\tfrac{z^3}{3})\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{3}z^3 \ln z - \tfrac{1}{3}\int z^2\,\mathrm{d}z \\
&= \tfrac{1}{3}z^3 \ln z - \tfrac{1}{3}\frac{z^3}{3} + C = \frac{1}{9}z^3(3\ln z - 1) + C \qquad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]0, +\infty[$, car $u, v \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$.

Donc $I_3 = \frac{1}{9}\left[z^3(3\ln z - 1)\right]_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} = \frac{1}{9}\big((2\mathrm{e})^3(3\ln(2\mathrm{e}) - 1) - \mathrm{e}^3(3\ln(\mathrm{e}) - 1)\big) = \dfrac{2}{9}(12\ln 2 + 7)\,\mathrm{e}^3$.

$I_4 = \displaystyle\int_{-1}^0 (-2a+1)\,\mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{d}a$

On dérive $u(a) = -2a + 1$, on primitive $v'(a) = \mathrm{e}^{-a}$. Alors $u'(a) = -2$ et $v(a) = -\mathrm{e}^{-a}$ donc

$$\begin{aligned}
\int (-2a+1)\,\mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{d}a &= (-2a+1)(-\mathrm{e}^{-a}) - \int (-2)(-\mathrm{e}^{-a})\,\mathrm{d}a \\
&= (2a-1)\,\mathrm{e}^{-a} - 2\int \mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{d}a \\
&= (2a-1)\,\mathrm{e}^{-a} + 2\,\mathrm{e}^{-a} + C \\
&= (2a+1)\,\mathrm{e}^{-a} + C \qquad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$, car $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Donc $I_4 = \left[(2a+1)\,\mathrm{e}^{-a}\right]_{-1}^0 = 1\,\mathrm{e}^0 - (-1)\,\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} + 1$.

$I_5 = \int_1^{\mathrm{e}} \ln^2 b \, \mathrm{d}b$

On dérive $u(b) = (\ln b)^2$, on primitive $v'(b) = 1$. Alors $u'(v) = 2(\ln b)\frac{1}{b} = \frac{2\ln b}{b}$ et $v(b) = b$ donc

$$\begin{aligned}\int \ln^2 b \, \mathrm{d}b &= (\ln^2 b)(b) - \int (\tfrac{2\ln b}{b})(b) \, \mathrm{d}b \\ &= b\ln^2 b - 2\int \ln b \, \mathrm{d}b.\end{aligned}$$

On a déjà calculé $\int \ln b \, \mathrm{d}b = b\ln b - b + C$ (par parties aussi), donc

$$\begin{aligned}\int \ln^2 b \, \mathrm{d}b &= b\ln^2 b - 2(b\ln b - b) + C \\ &= b\,(\ln^2 b - 2\ln b + 2) + C \qquad (C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]0, +\infty[$, car $u, v \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$.

Donc $I_5 = \big[b\,(\ln^2 b - 2\ln b + 2)\big]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} \times (\ln^2 \mathrm{e} - 2\ln \mathrm{e} + 2) - 1 \times (\ln^2 1 - 2\ln 1 + 2) = \mathrm{e} - 2$.

$I_6 = \int_0^1 \arctan c \, \mathrm{d}c$

On dérive $u(c) = \arctan c$, on primitive $v'(c) = 1$. Alors $u'(v) = \frac{1}{1+c^2}$ et $v(c) = c$ donc

$$\begin{aligned}\int \arctan c \, \mathrm{d}c &= (\arctan c)(c) - \int (\tfrac{1}{1+c^2})(c) \, \mathrm{d}c \\ &= c\arctan c - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{(1+c^2)'}{1+c^2}, \mathrm{d}c \\ &= c\arctan c - \tfrac{1}{2}\ln|1+c^2| + K \\ &= c\arctan c - \tfrac{1}{2}\ln(1+c^2) + K \qquad (K \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

car $1 + c^2 \geqslant 1 > 0 \;\forall\, c \in \mathbb{R}$.

Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$, car $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Donc $I_6 = \big[c\arctan c - \frac{1}{2}\ln(1+c^2)\big]_0^1 = \big(1\arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(2)\big) - \big(0\arctan 0 - \frac{1}{2}\ln(1)\big) = (1 \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2) - (0 \times 0 - 0)$ $= \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 2}{2}$.

$I_7 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^s \cos s \, \mathrm{d}s$

Soient

$$\begin{aligned}I_{\cos} &= \int \mathrm{e}^s \cos s \, \mathrm{d}s \\ I_{\sin} &= \int \mathrm{e}^s \sin s \, \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Dans $I_{\cos}$, on dérive $u(s) = \mathrm{e}^s$, on primitive $v'(s) = \cos s$. Alors $u'(s) = \mathrm{e}^s$ et $v(s) = \sin s$ donc

$$\begin{aligned}I_{\cos} &= (\mathrm{e}^s)(\sin s) - \int (\mathrm{e}^s)(\sin s) \, \mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^s \sin s - I_{\sin} + C_1.\end{aligned}$$

Dans $I_{\sin}$, on dérive $u(s) = \mathrm{e}^s$, on primitive $v'(s) = \sin s$. Alors $u'(s) = \mathrm{e}^s$ et $v(s) = -\cos s$ donc

$$\begin{aligned}I_{\sin} &= (\mathrm{e}^s)(-\cos s) - \int (\mathrm{e}^s)(-\cos s) \, \mathrm{d}s \\ &= -\mathrm{e}^s \cos s + I_{\cos} + C_2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}I_{\cos} + I_{\sin} &= \mathrm{e}^s \sin s + C_1 \\ I_{\cos} - I_{\sin} &= \mathrm{e}^s \cos s - C_2\end{aligned}$$

ce qui donne (en additionnant/soustrayant les 2 équations)

$$\int e^s \cos s \, ds = \frac{1}{2} e^s (\sin s + \cos s) + C$$
$$\int e^s \sin s \, ds = \frac{1}{2} e^s (\sin s - \cos s) + C$$

($C \in \mathbb{R}$).
Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$, car toutes les fonctions considérées sont de clase $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Donc $I_7 = \frac{1}{2} \left[e^s (\sin s + \cos s)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\Big(\big(e^{\pi/2}(\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2})\big) - \big(e^0(\sin 0 + \cos 0)\big)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\big(e^{\pi/2}(1+0)\big) - \big(1 \times (0+1)\big)\Big)$
$= \dfrac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$.

$I_8 = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2) \, dt$

On dérive $u(t) = \ln(1+t^2)$, on primitive $v'(t) = 1$. Alors $u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $v(t) = t$ donc

$$\begin{aligned}
\int \ln(1+t^2) \, dt &= (\ln(1+t^2))(t) - \int (\tfrac{2t}{1+t^2})(t) \, dt \\
&= t \ln(1+t^2) - 2 \int \tfrac{t^2}{1+t^2} \, dt \\
&= t \ln(1+t^2) - 2 \int \tfrac{t^2+1-1}{1+t^2} \, dt \\
&= t \ln(1+t^2) - 2 \int \left(1 - \tfrac{1}{1+t^2}\right) dt \\
&= t \ln(1+t^2) - 2(t - \arctan t) + C \\
&= t \ln(1+t^2) - 2t + 2 \arctan t + C \qquad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$, car $1 + t^2 \geqslant 1 > 0 \ \forall\, t \in \mathbb{R}$ donc $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
Donc $I_8 = \left[t \ln(1+t^2) - 2t + 2\arctan t\right]_0^1 = \big(1 \times \ln(2) - 2 + 2 \arctan 1\big) - \big(0 \times \ln(1) - 0 + 2 \arctan 0\big)$
$= \big(\ln 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4}\big) - \big(0 - 0 + 0\big) = \ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$.

$I_9 = \displaystyle\int_1^e (u^2 + u + 2) \ln u \, du$

On dérive $U(u) = \ln u$, on primitive $V'(u) = u^2 + u + 2$. Alors $U'(u) = \frac{1}{u}$ et $V(u) = \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + 2u$ donc

$$\begin{aligned}
\int (u^2 + u + 2) \ln u \, du &= (\ln u)(\tfrac{u^3}{3} + \tfrac{u^2}{2} + 2u) - \int (\tfrac{1}{u})(\tfrac{u^3}{3} + \tfrac{u^2}{2} + 2u) \, du \\
&= (\tfrac{u^3}{3} + \tfrac{u^2}{2} + 2u) \ln u - \int (\tfrac{1}{3}u^2 + \tfrac{1}{2}u + 2) \, du \\
&= (\tfrac{u^3}{3} + \tfrac{u^2}{2} + 2u) \ln u - (\tfrac{1}{3}\tfrac{u^3}{3} + \tfrac{1}{2}\tfrac{u^2}{2} + 2u) + C \\
&= \left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + 2u\right) \ln u - \frac{u^3}{9} - \frac{u^2}{4} - 2u + C \qquad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]0, +\infty[$, car $U, V \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$.
Donc $I_9 = \left[(\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + 2u) \ln u - \frac{u^3}{9} - \frac{u^2}{4} - 2u\right]_1^e = \dfrac{2}{9}e^3 + \dfrac{1}{4}e^2 + \dfrac{85}{36}$.

## — Changement de variable

**Exercice 4.**

**4.1 À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.**

$I_1 = \displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$

Tout d'abord, cette intégrale a un sens car la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ qui contient $[x_1,x_2] = [1,3]$ (remarquer qu'il faut $x \geqslant 0$ pour les racines et qu'alors il faut $x \neq 0$ pour le quotient).

On veut faire $x = \phi(t) = t^2$ afin d'éliminer les racines carrées. Alors $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ ; si $x = x_1 = 1 = \phi(t_1) = t_1^2$ on peut prendre $t_1 = 1$ ; si $x = x_2 = 3 = \phi(t_2) = t_2^2$ on peut prendre $t_2 = \sqrt{3}$.

**Rappels : On désigne par $|\alpha,\beta|$ l'intervalle $[\alpha,\beta]$ si $\alpha \leqslant \beta$ ou l'intervalle $[\beta,\alpha]$ si $\alpha \geqslant \beta$.**

**Pour pouvoir appliquer la formule du changement de variables** $\displaystyle\int_{x=\phi(a)}^{x=\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t=a}^{t=b} f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t$ **(correspondant à faire $x = \phi(t)$) il faut que $\phi$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $|a,b|$ et il faut aussi que $f$ soit continue sur $\phi(|a,b|) = \{\,\phi(t) \mid t \in |a,b|\,\}$. Si $\phi$ est monotone (soit croissante soit décroissante) sur $|a,b|$, alors $\phi(|a,b|) = |\phi(a),\phi(b)|$, mais en général ce sera faux (voir exemple ci-après).**

Ici $|t_1,t_2| = [1,\sqrt{3}]$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([1,\sqrt{3}])$. D'autre part, $\phi(|t_1,t_2|) = \phi([1,\sqrt{3}]) = [\phi(1),\phi(\sqrt{3})] = [1,3]$ (car $\phi$ est croissante sur $[1,\sqrt{3}]$) et $f$ est continue sur $[1,3]$ (en fait, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$).

Donc $I_1 = \displaystyle\int_{x=1}^{x=3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} = \int_{x=\phi(t_1)}^{x=\phi(t_2)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2}+\sqrt{(t^2)^3}}$.

*Attention à ne pas oublier de* ***remplacer*** $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Or $\sqrt{t^2} = |t| = t$ car $t \geqslant 0$.

Donc $I_1 = \displaystyle\int_{t=1}^{t=\sqrt{3}} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t+t^3} = 2\int_{t=1}^{t=\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\,[\arctan t]_{t=1}^{t=\sqrt{3}} = 2(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1) = 2(\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{6}$.

(Toutes les primitives de $f(x)$ sont $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} = 2\arctan\sqrt{x} + C$ ($C \in \mathbb{R}$), définies sur $]0,+\infty[$.)

Si l'on prend $t_1 = -1$ (possible en principe car $\phi(t_1) = x_1$), alors $\phi(|t_1,t_2|) = \phi([-1,\sqrt{3}]) = [0,3]$. Mais $f$ n'est pas continue sur $[0,3]$ (n'est même pas définie en 0), donc on ne peut pas appliquer la formule avec ce choix.

$I_2 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln u}{u+u\ln^2 u}\,\mathrm{d}u$

Tout d'abord, cette intégrale a un sens car la fonction $f(u) = \frac{\ln u}{u+u\ln^2 u}$ est continue sur $]0,+\infty[$ qui contient $[u_1,u_2] = [1,\mathrm{e}^2]$ (remarquer qu'il faut $u > 0$ et qu'alors $\ln^2 u \geqslant 0$ donc $u + u\ln^2 u = u(1+\ln^2 u) > 0$).

On veut faire $u = \phi(t) = \mathrm{e}^t$ afin d'éliminer les logarithmes. Alors $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ ; si $u = u_1 = 1 = \mathrm{e}^{t_1}$ on peut prendre $t_1 = \ln 10$ ; si $u = u_2 = \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{t_2}$ on peut prendre $t_2 = \ln(\mathrm{e}^2) = 2$.

On a $|t_1,t_2| = [0,2]$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([0,2])$. Puis $\phi(|t_1,t_2|) = \phi([0,2]) = [\phi(0),\phi(2)] = [1,\mathrm{e}^2]$ (car $\phi$ est croissante sur $[0,2]$) et $f$ est bien continue sur $[1,\mathrm{e}^2]$ (en fait, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$).

Donc $I_2 = \displaystyle\int_{u=1}^{u=\mathrm{e}^2} \frac{\ln u}{u+u\ln^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_{u=u_1}^{u=u_2} \frac{\ln u}{u(1+\ln^2 u)}\,\mathrm{d}u = \int_{u=\phi(t_1)}^{u=\phi(t_2)} \frac{\ln u}{u(1+\ln^2 u)}\,\mathrm{d}u = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{\ln \mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t(1+\ln^2 \mathrm{e}^t)}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

*Attention à ne pas oublier de* ***remplacer*** $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. Or $\ln \mathrm{e}^t = t\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Donc

$I_2 = \displaystyle\int_{t=0}^{t=2} \frac{t}{\mathrm{e}^t(1+t^2)}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=2} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2} \frac{(1+t^2)'}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_{t=0}^{t=2} = \tfrac{1}{2}(\ln 5 - \ln 1) = \frac{\ln 5}{2} = \ln\sqrt{5}$.

(Toutes les primitives de $f(u)$ sont $\displaystyle\int \frac{\ln u}{u+u\ln^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(1+\ln^2 u) + C$ ($C \in \mathbb{R}$), définies sur $]0,+\infty[$.)

$I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$

Tout d'abord, cette intégrale a un sens car la fonction $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$ qui contient $[x_1,x_2] = [0,1]$ (remarquer que $\mathrm{e}^x > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ et qu'alors $\mathrm{e}^x + 1 > 1 > 0$).

On veut faire $x = \phi(t) = \ln t$ afin d'éliminer les exponentielles. Alors $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ ; si $x = x_1 = 0 = \phi(t_1) = \ln t_1$ on peut prendre $t_1 = \mathrm{e}^0 = 1$ ; si $x = x_2 = 1 = \phi(t_2) = \ln t_2$ on peut prendre $t_2 = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

On a $|t_1,t_2| = [1,\mathrm{e}]$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([1,\mathrm{e}])$. Puis $\phi(|t_1,t_2|) = \phi([1,\mathrm{e}]) = [\phi(1),\phi(\mathrm{e})] = [0,1]$ (car $\phi$ est croissante sur $[1,\mathrm{e}]$) et $f$ est bien continue sur $[0,1]$ (en fait, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$).

Donc $I_3 = \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{x=\phi(t_1)}^{x=\phi(t_2)} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{\mathrm{e}^{2\ln t}}{\mathrm{e}^{\ln t}+1}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

*Attention à ne pas oublier de* ***remplacer*** $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Or $\mathrm{e}^{2\ln t} = (\mathrm{e}^{\ln t})^2$ et $\mathrm{e}^{\ln t} = t \ \forall\ t > 0$.
Donc $I_3 = \displaystyle\int_{t=1}^{t=\mathrm{e}} \frac{t^2}{t+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{t=\mathrm{e}} \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{t=\mathrm{e}} \frac{t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{t=\mathrm{e}} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = [t - \ln(t+1)]_{t=1}^{t=\mathrm{e}}$
$= (\mathrm{e} - \ln(\mathrm{e}+1)) - (1 - \ln 2) = \mathrm{e} - \ln(\mathrm{e}+1) - 1 + \ln 2$.
(Toutes les primitives de $f(x)$ sont $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \ln(\mathrm{e}^x+1) + C$ ($C \in \mathbb{R}$), définies sur $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$.)

$I_4 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$

Cette intégrale a un sens car la fonction $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui contient $[x_1, x_2] = [0, \frac{\pi}{4}]$.
On applique les règles de Bioche : Soit $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$. Alors :

$$\omega(-x) = \frac{\mathrm{d}(-x)}{\cos^4(-x)} = -\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} \neq \omega(x)$$
$$\omega(\pi - x) = \frac{\mathrm{d}(\pi - x)}{\cos^4(\pi - x)} = -\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} \neq \omega(x)$$
$$\omega(\pi + x) = \frac{\mathrm{d}(\pi + x)}{\cos^4(\pi + x)} = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \omega(x)$$

donc Bioche préconise de faire $t = \tan x$. Alors $x = \phi(t) = \arctan t$ et $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ ; si $x = x_1 = 0 = \phi(t_1) = \arctan t_1$ on peut prendre $t_1 = \tan 0 = 0$ ; si $x = x_2 = \frac{\pi}{4} = \phi(t_2) = \arctan t_2$ on peut prendre $t_2 = \tan\frac{\pi}{4} = 1$.
On a $|t_1, t_2| = [0, 1]$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([0, 1])$. Puis $\phi(|t_1, t_2|) = \phi([0, 1]) = [\phi(0), \phi(1)] = [0, \frac{\pi}{4}]$ (car $\phi$ est croissante sur $[0, 1]$) et $f$ est bien continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ (en fait, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle ne contenant pas un nombre de $\{\,\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$.)
Par ailleurs, on sait que $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.
Donc $I_4 = \displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi/4} \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\pi/4} (1 + \tan^2 x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{x=x_1}^{x=x_2} (1 + \tan^2 x)^2\,\mathrm{d}x$
$= \displaystyle\int_{x=\phi(t_1)}^{x=\phi(t_2)} (1 + \tan^2 x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{t=t_1}^{t=t_2} (1+t^2)^2 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=1} (1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t + \tfrac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = (1 + \tfrac{1^3}{3}) - (0 + \tfrac{0^3}{3}) = \frac{4}{3}$.
(Toutes les primitives de $f(x)$ sont $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = t + \tfrac{t^3}{3} + C = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$ ($C \in \mathbb{R}$), définies sur n'importe quel intervalle ne contenant pas un nombre de $\{\,\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$.)

### 4.2 À l'aide d'un changement de variable, calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser.

$\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x$

Tout d'abord, la fonction $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}$ est continue sur tout intervalle ne contenant pas un nombre de $\{\,2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$.
Elle admet donc des primitives sur chacun des intervalles $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
On applique les règles de Bioche : Soit $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x$. Alors :

$$\omega(-x) = \frac{\sin(-x)\cos(-x)}{1 - \cos(-x)}\mathrm{d}(-x) = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x = \omega(x)$$
$$\omega(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)\cos(\pi - x)}{1 - \cos(\pi - x)}\mathrm{d}(\pi - x) = \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x \neq \omega(x)$$
$$\omega(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)\cos(\pi + x)}{1 - \cos(\pi + x)}\mathrm{d}(\pi + x) = \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x \neq \omega(x)$$

donc Bioche préconise de faire $t = \cos x$. Alors $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$ (on calcule $\mathrm{d}t$ en fonction de $\mathrm{d}x$ plutôt que le contraire).
Donc $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\cos x}{1 - \cos x}(-\sin x\,\mathrm{d}x) = -\int \frac{t}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t-1+1}{t-1}\,\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = t + \ln|t-1| + C = \cos x + \ln|\cos x - 1| + C = \cos x + \ln(1 - \cos x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$),
car $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \implies -2 \leqslant \cos x - 1 \leqslant 0$ donc $|\cos x - 1| = 1 - \cos x$.
Pour vérifier, on dérive : $\big(\cos x + \ln(1 - \cos x) + C\big)' = -\sin x + \frac{(1-\cos x)'}{1 - \cos x} = -\sin x + \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \sin x \frac{\cos x}{1 - \cos x} = f(x)$.
Intervalles de définition : chacun des intervalles $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
(Remarquer qu'on ne s'est pas inquiété de $x = \phi(t) = \arccos t$. En effet, on a trouvé une fonction dérivable dont la dérivée est $f(x)$, ce qui est le but de la primitivation.)

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$

Tout d'abord, la fonction $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ est continue sur tout intervalle ne contenant pas un nombre de $\{\,\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$. Elle admet donc des primitives sur chacun des intervalles $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

On applique les règles de Bioche : Soit $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$. Alors :

$$\begin{aligned}\omega(-x) &= \frac{1}{\cos(-x)}\mathrm{d}(-x) = -\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x \neq \omega(x)\\ \omega(\pi-x) &= \frac{1}{\cos(\pi-x)}\mathrm{d}(\pi-x) = \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \omega(x)\\ \omega(\pi+x) &= \frac{1}{\cos(\pi+x)}\mathrm{d}(\pi+x) = -\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x \neq \omega(x)\end{aligned}$$

donc Bioche préconise de faire $t = \sin x$. Alors $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$ (on calcule $\mathrm{d}t$ en fonction de $\mathrm{d}x$ plutôt que le contraire).

Donc $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-\sin^2 x}(\cos x\,\mathrm{d}x) = \int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle = -\int \left(\frac{1/2}{t-1} + \frac{-1/2}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(-\ln|t-1| + \ln|t+1|) + C$
$= \frac{1}{2}(-\ln|\sin x - 1| + \ln|\sin x + 1|) + C = \frac{1}{2}(-\ln(1-\sin x) + \ln(1+\sin x)) + C = \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$), car $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donne $-2 \leqslant \sin x - 1 \leqslant 0$ (donc $|\sin x - 1| = 1 - \sin x$) et donne aussi $0 \leqslant \sin x + 1 \leqslant 2$ (donc $|\sin x + 1| = 1 + \sin x$).

Pour vérifier, on dérive : $\frac{1}{2}\big(\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x) + C\big)' = \frac{1}{2}\big(\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x} - \frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}\big) = \frac{1}{2}\big(\frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{-\cos x}{1-\sin x}\big) = \frac{1}{2}(\cos x)\big(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}\big) = \frac{1}{2}(\cos x)\big(\frac{(1-\sin x)+(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}\big) = \frac{1}{2}(\cos x)\big(\frac{2}{\cos^2 x}\big) = \frac{1}{\cos x} = f(x)$.

Intervalles de définition : chacun des intervalles $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

(Remarquer qu'on ne s'est pas inquiété de $x = \phi(t) = \arcsin t$. En effet, on a trouvé une fonction dérivable dont la dérivée est $f(x)$, ce qui est le but de la primitivation.)

$\displaystyle\int\sqrt{\mathrm{e}^y - 1}\,\mathrm{d}y$ **(indication : $u = \sqrt{\mathrm{e}^y - 1}$)**

Tout d'abord, la fonction $f(y) = \sqrt{\mathrm{e}^y - 1}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$ (car il faut $\mathrm{e}^y - 1 \geqslant 0$). Elle admet donc des primitives sur $[0, +\infty[$.

On nous dit de faire $u = \sqrt{\mathrm{e}^y - 1}$. Alors $y = \ln(u^2+1)$ et $\mathrm{d}y = \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$ (on pourrait aussi calculer $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^y}{2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}}\,\mathrm{d}y$ mais cela semble plus compliqué).

Donc $\displaystyle\int\sqrt{\mathrm{e}^y-1}\,\mathrm{d}y = \int u\frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\int\frac{u^2+1-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\int\left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u = 2(u - \arctan u) + C$
$= 2u - 2\arctan u + C = 2\sqrt{\mathrm{e}^y-1} - 2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^y-1} + C$ ($C \in \mathbb{R}$).

Pour vérifier, on dérive : $\displaystyle 2\left(\sqrt{\mathrm{e}^y-1} - \arctan\sqrt{\mathrm{e}^y-1}\right)' = 2\left(\frac{(\mathrm{e}^y-1)'}{2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}} - \frac{(\sqrt{\mathrm{e}^y-1})'}{1+(\sqrt{\mathrm{e}^y-1})^2}\right) = 2\left(\frac{\mathrm{e}^y}{2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}} - \frac{\frac{\mathrm{e}^y}{2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}}}{\mathrm{e}^y}\right)$
$\displaystyle = 2\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}}(\mathrm{e}^y-1) = \sqrt{\mathrm{e}^y-1} = f(x)$.

Intervalles de définition : $]0, +\infty[$.

(Remarquer qu'on ne s'est pas inquiété de $y = \phi(u) = \ln(u^2+1)$. En effet, on a trouvé une fonction dérivable dont la dérivée est $f(y)$, ce qui est le but de la primitivation.)

Que se passe-t-il en $y = 0$ ? Chacune des fonctions $2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}$ et $2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^y-1}$ est définie pour $y \geqslant 0$ mais n'est dérivable que pour $y > 0$. Cependant, on peut vérifier que la fonction $2\sqrt{\mathrm{e}^y-1} - 2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^y-1}$ est définie pour $y \geqslant 0$, continue à droite en $y = 0$ et dérivable à droite en $y = 0$. Donc l'intervalle de définition est en fait $[0, +\infty[$.