MA202N – Contenu du cours

1

Formules de Taylor et développements limités

Plan du chapitre

1 – Préliminaires

1.1 But

L'intérêt des formules de Taylor (parfois abrégées FT) et des développements limités (DL) est multiple. Le principe consiste à approcher des fonctions "compliquées" par des polynômes, en écrivant

$$f(x) = P(x) + \text{ erreur.}$$

Cela permet par exemple de :

— simplifier certains calculs

— trouver des limites, lever des formes indéterminées

— connaitre le comportement local de certaines fonctions

— etc.

1.2 Notations $o(x)$

Définition. *Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a. On considèrera aussi le cas où l'on se trouve en $+\infty$ ou $-\infty$, et dans ce cas on demande que I ait pour borne $\pm\infty$. On dit que la fonction f est* négligeable *devant la fonction g en x_0 (avec x_0 valant a ou $+\infty$ ou $-\infty$) s'il existe :*

— *un voisinage V de x_0 (si $x_0 = a$ on aura V du type $V =]a-\eta; a+\eta[$ avec $\eta > 0$, si $x_0 = -\infty$ on aura $V =]-\infty; M[$ avec $M \in \mathbb{R}$ et si $x_0 = +\infty$ on aura $V =]M; +\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$)*

— *une fonction ε définie sur V et telle que :*

  — $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

  — $f(x) = \varepsilon(x)g(x), \forall x \in V$

On note alors $f(x) = o(g(x))$, qui se lit "$f(x)$ est un petit o de $g(x)$" (au voisinage de x_0).

Remarque. *Avec les mêmes notations, on suppose que la fonction g ne s'annule pas pour $x \neq x_0$. Alors f est* négligeable *devant g au voisinage de x_0 si et seulement si le quotient f/g tend vers 0 :*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemple. — $\ln(x) = o(\frac{1}{x})$ *au voisinage de* 0

— $x^2 = o(e^x)$ *au voisinage de* $+\infty$

— $\sqrt{x} = o(1)$ *au voisinage de* 0.

2 – Développements limités et formules de Taylor

2.1 Généralités

Définition. *Soient I un intervalle ouvert, a un point de I et n un entier. On dit que f* admet un développement limité d'ordre n en a *lorsqu'il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que le reste $f(x) - P_n(x)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$.*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = o((x-a)^n)\ .$$

Le polynome P_n s'écrit par exemple :

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n$$

où les b_i sont des coefficients réels. On écrira ainsi :

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Remarque. *On peut noter que l'équation de la tangente en a, bien connue depuis le lycée, est justement le développement limité à l'ordre 1. Dans ce cas on a même une expression plus précise des coefficients b_0 et b_1 :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

On verra que les formules de Taylor et les développements limités permettent de généraliser cette formule aux ordres supérieurs.

Nous nous ramènerons toujours à des développements limités au voisinage de 0, grâce à l'observation suivante.

Proposition. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de I et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Soit g la fonction qui à h associe $g(h) = f(a+h)$. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en a, si et seulement si g admet un développement limité d'ordre n en 0.*

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n) \iff g(h) = f(a+h) = P_n(a+h) + o(h^n)\ .$$

Remarque. *Si l'on souhaite faire un développement limité au voisinage de l'infini (appelé parfois* développement asymptotique*), on cherchera à écrire f sous la forme*

$$f(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

On se ramènera là aussi en zéro en posant $h = \frac{1}{x}$.

2.1.1 Unicité, parité

Un développement limité, s'il existe, est unique au sens suivant.

Proposition. *Soient I un intervalle ouvert contenant 0, et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Supposons qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n de degré au plus n tels que au voisinage de 0 :*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) = Q_n(x) + o(x^n)\ .$$

Alors $P_n = Q_n$.

Proposition. *Grâce aux formules de Taylor qui suivent, on démontre que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ (n fois dérivable, et dérivée n-ème continue) au voisinage de x_0, alors f admet un développement limité (DL) à l'ordre n.*

Grâce à l'unicité du DL, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition. *Soit f une fonction admettant un DL en zéro. On a les résultats suivants :*

— *Si f est paire, alors son développement limité ne comporte que les termes de degré pair :*
$$f(x) = b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 \ldots + b_{2n}x^{2n} + o\left(x^{2n}\right)$$

— *Si f est impaire, alors son développement limité ne comporte que les termes de degré impair :*
$$f(x) = b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 \ldots + b_{2n+1}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

Démonstration. *La preuve est laissée en exercice. Elle repose sur les définitions de la parité ($f(-x) = f(x)$) et de l'imparité ($f(-x) = -f(x)$), combinées avec l'unicité du développement limité.*

2.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème. *Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et a, x deux réels de I, alors :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

Démonstration. *Par récurrence.*

Pour $n = 0$, la formule est le théorème fondamental de l'Analyse :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Supposons la formule vraie au rang $n-1$, avec $n \geq 1$. Pour la prouver au rang n, posons :

$$I_n = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

et intégrons par parties en posant

$$u'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad u(x) = -\frac{(x-t)^n}{n!}$$

$$v(t) = f^{(n)}(t), \quad v'(t) = f^{(n+1)}(t)$$

ce qui donne

$$I_n = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)\right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$I_n = -\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

ce qui permet d'obtenir la formule au rang n et qui conclut la preuve.

2.3 Formule de Taylor Lagrange

Théorème. *Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, a et x deux réels de I. Alors il existe un réel c situé entre a et x (autrement dit $c \in [a,x]$ ou bien $c \in [x,a]$ selon la position relative de a et de x) tel que :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \\ &+ \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c). \end{aligned}$$

NB : c dépend de a et de x... Si a ou x changent, c change aussi.

Démonstration. *La preuve est laissée en exercice. On pourra utiliser la deuxième formule de la moyenne :*

Si f et g sont continues sur $[a,b]$, et g est de signe constant, alors il existe c dans $[a,b]$ tel que

$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^x g(t)\,dt.$$

Corollaire (Inégalité de Taylor Lagrange)**.** *Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$. Soit M un majorant de $|f^{(n)}|$ sur $[a,b]$. Alors on a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} &|f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}| \\ &\leq M\frac{(b-a)^n}{n!}. \end{aligned}$$

2.4 Formule de Taylor Young

Cette formule va nous permettre de démontrer la plupart des développements limités usuels.

Théorème. *Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I. Alors f admet un développement limité au voisinage de tout point a de I :*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o((x-a)^n)$$

Démonstration. *Pour la preuve, on va utiliser la formule de Taylor Lagrange (FTL). Il nous faut démontrer que $A(x) = o((x-a)^n)$, où $A(x)$ est défini par :*

$$A(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} - \ldots - (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Pour montrer que $A(x)$ est un petit o de $(x-a)^n$, on va montrer que leur quotient tend vers 0. Pour cela, on commence par appliquer la FTL sur l'intervalle $[a,x]$: il existe c_x (noté ainsi car c dépend de x puisqu'il se trouve dans l'intervalle $[a,x]$, autrement dit c change quand x change) avec $c_x \in [a,x]$ tel que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$$

On remplace cette formule pour $f(x)$ dans la formule pour $A(x)$, on simplifie plein de termes et il nous reste finalement

$$A(x) = (x-a)^n\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} - (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{(x-a)^n}{n!}\left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)\right)$$

Ensuite il nous suffit de remarquer que quand x tend vers a, c_x tend vers a aussi, donc par continuité de la fonction $f^{(n)}$ (car f est de classe $\mathcal{C}^n$) on a que $f^{(n)}(c_x)$ tend vers $f^{(n)}(a)$, autrement dit :

$$\frac{A(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)) \quad \to 0$$

ce qui montre justement que

$$A(x) = o((x-a)^n)$$

et qui conclut donc la preuve.

2.5 Exemples et DL usuels

Exemple. *A titre d'exemple, on considère la fonction*

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{1+x}$$

et on écrit les trois formules de Taylor pour cette fonction, à l'ordre 3, au voisinage de 0.

Cet exemple est laissé en exercice au lecteur, avec les indications d'étapes suivantes :

1. *Commencer par écrire les trois formules de manière générale pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$, au point 0, depuis le point x : $f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots$ (à compléter).*
2. *Calculer les dérivées successivces de f jusqu'à l'ordre 3. On pourra écrire $f = u + v$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \frac{1}{1+x}$.*
3. *En déduire les valeurs en 0 : $f(0); f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$.*

4. *Remplacer tout le nécessaire dans les formules de la première question.*

Exemple. *Les exemples suivants sont à connaitre par coeur !*
Soit n un entier, α un réel.

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\ .$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\ .$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})\ .$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + o(x^n)\ .$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\ .$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\ .$$

Les démonstrations seront traitées en exercice.

3 – Opérations sur les développements limités

3.1 Manipulation des petits o

Proposition (Propriétées des o en zéro)**.** *Soient n et m deux entiers positifs ou nuls.*

1. *Si $n < m$, alors $x^m = o(x^n)$ au voisinage de 0.*
2. *Somme de petits o : $o(x^m) + o(x^n) = o(x^p)$, où $p = \min(n, m)$, autrement dit si $n \leq m$, alors $o(x^m) + o(x^n) = o(x^n)$.*
3. *Produit de petits o : $o(x^n) \times o(x^m) = o(x^{n+m})$.*
4. *Produit par une constante réelle $k \in \mathbb{R}$: $k \times o(x^n) = o(x^n)$*
5. *Produit par des puissances de x : $x^n \times o(x^m) = o(x^{n+m})$*

Démonstration. *Pour la preuve on revient à chaque fois à la définition, et le plus souvent possible on utilise la remarque avec la limite du quotient.*

1. *Si $n < m$ alors $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ avec $m - n >$ donc ça tend vers 0 en zéro, ce qui donne bien $x^m = o(x^n)$.*
2. *Soient f et g deux fonctions quelconques telles que $f = o(x^n)$ et $g = o(x^m)$ avec $n \leq m$. Alors on sait que $\frac{f}{x^n} \to 0$ et $\frac{g}{x^m} \to 0$. Pour montrer le résultat, on calcule la limite de $(f+g)(x)$ divisé par x^n :*
$$\frac{(f+g)(x)}{x^n} = \frac{f(x)}{x^n} + \frac{g(x)}{x^n} = \frac{f(x)}{x^n} + \frac{g(x)}{x^m}\frac{x^m}{x^n}$$
Et là on peut conclure : $\frac{f(x)}{x^n} \to 0$, $\frac{g(x)}{x^m} \to 0$ et $\frac{x^m}{x^n} \leq 1$ donc $\frac{(f+g)(x)}{x^n} \to 0$ ce qui donne le résultat.

3. *De la même manière, on se donne f et g avec $f = o(x^n)$ et $g = o(x^m)$. Alors*

$$\frac{(fg)(x)}{x^{n+m}} = \frac{f(x)}{x^n}\frac{g(x)}{x^m}$$

tend bien vers 0 en 0.

4. *Les deux derniers items sont assez similaires au précédent et sont laissés en exercice au lecteur.*

Exemples. *On illustre chaque propriété :*

1. $x = o(1)$; *pour tout* $k > 0$ $x^k = o(1)$; $x^2 = o(x)$; *pour tout* $k > 1$ $x^k = o(x)$; $x^3 = o(x^2)$; *etc.*
2. $o(1) + o(x^2) = o(1)$; $o(x) + o(x^3) = o(x)$; $o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$; *etc.*
3. $o(x^2)o(x) = o(x^3)$; $o(x^2)o(x^2) = o(x^4)$; $o(x)o(x^n) = o(x^{n+1})$; *etc.*
4. $3o(x) = o(x)$; $-2o(x^2) = o(x^2)$; *etc.*
5. $xo(x) = o(x^2)$; $x^2o(x^3) = o(x^5)$; $xo(x^n) = o(x^{n+1})$; $x^no(x) = o(x^{n+1})$; *etc.*

3.2 Corollaires : opérations sur les DL

Les propriétés de manip des o permettent très facilement de démontrer les résultats suivants. Dans toute la suite, on se donne f et g deux fonctions admettant des DL à l'ordre n et m respectivement.

3.2.1 Somme

Proposition. *Alors $f + g$ admet un DL à l'ordre* $\min(n, m)$ *obtenu en ajoutant les DL de f et de g.*

Exemple.

1. $f(x) = 1+2x-x^3+o(x^3)$, $g(x) = 2-3x+x^2+o(x^2)$, *alors* $(f+g)(x) = 3 - x + x^2 + o(x^2)$
2. $f(x) = 1+x+x^2+x^3+2x^4+o(x^5)$, $g(x) = -1-x-x^2+o(x^2)$, *alors* $(f+g)(x) = o(x^2)$

3.2.2 Produit

Proposition. *Alors fg admet un DL à l'ordre au moins* $\min(n, m)$.

Remarque. *L'ordre peut parfois être supérieur à ce minimum, lorsque les premiers termes des DL sont nuls (voir les exemples). Pour trouver quel est l'ordre, il est recommandé de faire le produit au brouillon et de repérer quel sera le petit o qui va rester.*

Exemple.

1. $f(x) = 1 + 2x - x^3 + o(x^3)$, $g(x) = 2 - 3x + x^2 + o(x^2)$, *alors* $(fg)(x) = 2 + x - 5x^2 + o(x^2)$
2. $f(x) = x + 2x^2 - x^3 + o(x^3)$, $g(x) = 2 - 3x + x^2 + o(x^2)$, *alors* $(fg)(x) = 2x + x^2 - 7x^3 + o(x^3)$

3.2.3 Composition

Proposition. *Si f admet un DL à l'ordre n en x_0, si le terme constant de ce DL vaut a_0 et si g admet un DL à l'ordre n en a_0, alors $g \circ f$ admet un DL à l'ordre n en x_0 obtenu en développant la composée des DL de f et g.*

Exemple.

1. *DL de* $\exp(\sin(x))$ *à l'ordre 4 en 0 :* $g(x) = \exp(x)$, $f(x) = \sin(x)$. *Alors* $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^4)$, *de terme constant 0. ensuite :*

$$\exp(X) = 1 + X + X^2/2 + X^3/6 + X^4/24 + o(X^4)$$

on remplace X *par*

$$X = x - x^3/6 + o(x^4)$$

pour obtenir

$$\begin{array}{rcl}\exp(\sin(x)) & = & 1 + (x - x^3/6 + o(x^4)) + (x - x^3/6 + o(x^4))^2 \\ & & +(x - x^3/6 + o(x^4))^3/6 + (x - x^3/6 + o(x^4))^4/24 + o(x^4)\end{array}$$

on développe en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 4 et on obtient

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + x^2/2 - x^4/8 + o(x^4)$$

2. *DL de* $\exp(\cos(x))$ *à l'ordre 4 en 0 :* $\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$ *terme constant 1, et autour de 1 on a* $\exp(1 + h) = \exp(1).\exp(h)$ *donc on se ramène au DL en zéro avec le nombre* $\exp(1)$ *en facteur devant :*

$$\exp(\cos(x)) = \exp(1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) = \exp(1).\exp(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))$$

on fait le DL comme précédemment, en utilisant le DL de $\exp(X)$ *et en posant* $X = -x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$ *:*

$$\begin{array}{rcl}\exp(\cos(x)) & = & \exp(1).\exp(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) \\ & = & \exp(1)(1 + (-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) \\ & & +(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))^2/2)\end{array}$$

On peut remarquer ici que comme le premier terme qui reste du cosinus dans X *est en* x^2, *quand on met ça à la puissance 3 ça fera* x^6 *et ça dépasse l'ordre 4, on peut donc s'arrêter à la puissance 2 dans le DL d'exponentielle. On continue donc le calcul :*

$$\exp(\cos(x)) = \exp(1)(1 + -x^2/2 + x^4/24 + o(x^4) + x^4/8)$$

on trouve finalement

$$\exp(\cos(x)) = \exp(1)(1 - x^2/2 + x^4/6 + o(x^4)) = e - x^2e/2 + x^4e/6 + o(x^4)$$