3

Algèbre linéaire et matrices

Les vidéos de ce chapitre sont en ligne ici :

`http://bit.ly/alglin-matrices`

Plan du chapitre

1 – Espaces vectoriels

1.1 Définition

Un espace vectoreil est un ensemble sur lequel est défini

— une addition interne

— une multiplication externe

Définition. *On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ev), ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ($\mathbb{R}$-ev), si E est muni d'une addition interne $(+)$ et d'une multiplication externe $(\times)$ telles que :*

— *Addition :*

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ u, v & \mapsto & u + v \end{array}$$

1. *Associativité :* $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$
2. *Elément neutre :* $\exists e \in E, \forall u \in E, u + e = e + u = u$
3. *Opposé :* $\forall u \in E, \exists u' \in E, u + u' = u' + u = e$
4. *Commutativité :* $\forall u, v \in E, u + v = v + u$

— *Multiplication :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times E & \to & E \\ \lambda, u & \mapsto & \lambda u \end{array}$$

1. *Associativité :* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$
2. *Elément neutre :* $\forall u \in E, 1.u = u$
3. *Distributivité 1 :* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in E (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
4. *Distributivité 2 :* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

Exemple [VIDEO]. *https://youtu.be/fdMyYKCFloo*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-ev. L'addition est simplement celle des vecteurs, terme à terme : $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, le vecteur nul est $(0, \dots, 0)$, l'opposé s'obtient en changeant tous les signes terme par terme. La multiplication est simplement celle d'un scalaire fois un vecteur. Les propriétés sont toutes faciles à démontrer, on se réfèrera à la vidéo si besoin.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition. *Soit E un ev et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E (sev) s'il est un ev pour l'addition et pour la multiplication externe de E.*

Théorème. *Soit E un ev er F un sous-ensemble non vide de E. Alors F est un sev ssi il est stable par addition et multiplication externe :*

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad u + \lambda v \in F$$

Proposition. *L'intersection de deux sev est un sev.*
(attention, pour l'union c'est en général faux)

Exemples [VIDEO]. *https://youtu.be/XFS8HEz1Y8w*

- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x+3y=0\}$ *est un sev de* $\mathbb{R}^2$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy=0\}$ *n'est pas un sev de* $\mathbb{R}^2$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=1\}$ *n'est pas un sev de* $\mathbb{R}^2$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x=0\}$ *est un sev de* $\mathbb{R}^2$

1.3 Familles génératrices, familles libres

Définition. *Soit* $(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ *une famille de vecteurs d'un* $\mathbb{R}$*-ev* E*. On appelle combinaison linéaire des* $(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ *tout vecteur qui s'écrit comme une somme du type*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

où les λ_i *sont des réels non tous nuls.*

Remarque. *L'ensemble* F *des combinaisons linéaires des* $(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ *est un sev de* E*. C'est le plus petit sev contenant tous les* x_i*. On le note*

$$Vect(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$$

et on l'appelle sous-espace vectoriel engendré par les $(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$*.*

Définition. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-ev er* $\mathcal{V}$ *une famille de vecteurs de* E*. On dit que* $\mathcal{V}$ *est une famille génératrice de* E *si le sev engendré par* $\mathcal{V}$ *est égal à* E *:*

$$Vect(\mathcal{V}) = E$$

Exemple [VIDEO]. *https://youtu.be/ezpzOVQ5_ro*

- $(1,0)$ *engendre la droite vectorielle* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y=0\}$
- $\{(1,0),(0,1)\}$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$

Définition. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-ev et* $\mathcal{V}$ *une famille de vecteurs de* E*. On dit que* $\mathcal{V}$ *est une famille libre si pour tout entier* $n \geq 1$ *et pour tous* $v_1,\ldots,v_n$ *vecteurs de* $\mathcal{V}$ *on a l'implication suivante :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \Longleftrightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1,..,n$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

Remarque. *Une famille est libre si aucun vecteur de* $\mathcal{V}$ *n'est combinaison linéaire d'autres vecteurs de* $\mathcal{V}$*.*

Exemple [VIDEO]. *https://youtu.be/SwiuwCIMYQM*

- $\{(1,0),(0,1)\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^2$
- $\{(1,2,0),(1,0,3)\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$
- $\{(1,0,1),(1,1,0),(-1,-3,2)\}$ *est une famille liée.*

1.4 Bases et dimension d'un ev

Définition. *Une famille libre et génératrice d'un ev E est appelée une base de E.*

Proposition. *Soit E un $\mathbb{R}$-ev admettant une base $(e_i)_{i=1..n}$. Alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Les $(x_i)_{i=1..n}$ s'appellent les coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i=1..n}$.

Démonstration. *https://youtu.be/o3xrOKr_pu4*
La démonstration repose sur le fait qu'une base est à la fois une famille génératrice (ce qui donnera l'existence des coordonnées) et une famille libre (qui nous permettra de prouver l'unicité). La preuve est laissée en exercice, elle est complète dans la vidéo.

Exemple. $(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ...(0, 0, ..., 1)$ *est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par exemple :*

— *dans $\mathbb{R}^2$: il y a deux vecteurs dans la base canonique $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$*
— *dans $\mathbb{R}^3$: trois vecteurs pour la base canonique $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$*
— *dans $\mathbb{R}^4$: quatre vecteurs pour la base canonique $e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$*
— *etc.*

Théorème. *Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même cardinal (nombre de vecteurs), appelé dimension de E.*
(si $E = \{0\}$ alors $\dim E = 0$)

Exemple. $\dim \mathbb{R}^n = n$

Proposition. *Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n avec $n > 0$, alors :*

— *Toute famille libre de n vecteurs est une base de E*
— *Toute famille génératrice de n vecteurs est une base de E*

Exemples [VIDEO]**.** *https://youtu.be/LK-RCwIgFVQ*
Il est très utile de savoir trouver rapidement une base à partir des équations d'un sous-espace vectoriel, on en donne quelques exemples :

— $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$
— $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0, x + y - 2z = 0\}$

Ces exemples sont laissés en exercice, la solution complète est dans la vidéo.

2 – Matrices

2.1 Définitions et notations

Définition. *Etant donnés deux entiers m et n strictement positifs, une* **matrice à m lignes et n colonnes** *est un tableau rectangulaire de réels $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$.*
L'indice de ligne i va de 1 à m, l'indice de colonne j va de 1 à n et on représente la matrice A ainsi :

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Les entiers m et n sont les **dimensions** *de la matrice, $a_{i,j}$ est son* **coefficient d'ordre** *(i, j).*

Exemple. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice à $n = 3$ lignes et $m = 2$ colonnes, ses coefficients valent : $a_{1,1} = -2$, $a_{1,2} = 2$, $a_{2,1} = 7$, etc.

Définition. *L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes et à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Lorsque $n = m$, on le note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelé une matrice carrée de taille n.*

2.2 Matrices et vecteurs

On identifie le plus souvent $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ (matrices carrées de taille 1) à $\mathbb{R}$ et suivant les cas $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}1, n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{S} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, avec pour tout j entre 1 et p, $u_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \ldots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, alors la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}$ (obtenue en mettant les vecteurs u_j en colonnes) représente $\mathcal{S}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemples.
1. *Par exemple, la matrice identité (nulle partout, avec des 1 sur la diagonale) représente la base canonique de RR^n*
2. *$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ représente les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$*

2.3 Opérations matricielles

L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est naturellement muni d'une addition interne (on peut ajouter deux matrices de mêmes dimensions terme à terme) et d'une multiplication externe (on peut multiplier une matrice par un réel terme à terme). C'est un espace vectoriel pour ces deux lois.

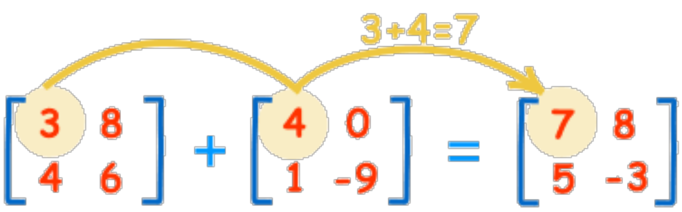
2.3.1 Egalité

Remarque. *Deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles sont de même taille et tous leurs coefficients sont identiques. Autrement dit, si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,1leqj\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq m,1leqj\leq q}$ alors*

1. *$n = m$ et $p = q$*
2. *pour tout couple i, j on a $a_{ij} = b_{ij}$.*

2.3.2 Addition

Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (de même taille donc), leur somme $A + B$ est la matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})$, autrement dit on ajoute les coefficients terme à terme. Par exemple :



L'addition hérite des propriétés de l'espace vectoriel :

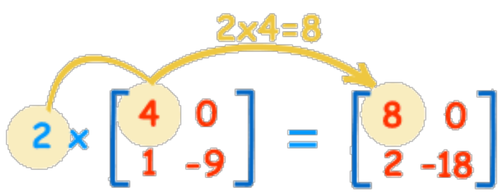
— associativité : $(A + B) + C = A + (B + C)$,

— commutativité : $A + B = B + A$.

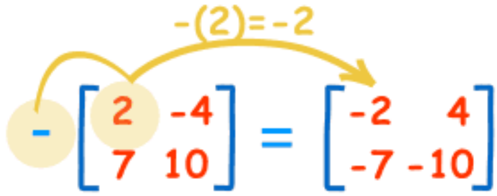
On ne peut pas ajouter des matrices de tailles différentes...

2.3.3 Multiplication externe (par un scalaire)

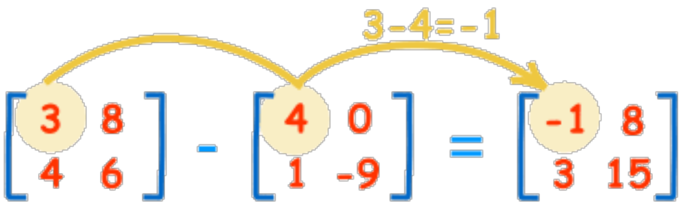
Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, et λ est un réel, le produit λA est la matrice $(\lambda a_{i,j})$, autrement dit on multiplie chaque coefficient de la matrice par le réel λ. Par exemple :



Grâce à cela on peut facilement définir l'opposé d'une matrice :



Pour l'opposé, on note $(-1).A = -A$.
On définit également la soustraction de deux matrices, comme étant la somme de A avec $-B$:



Les propriétés d'espace vectoriel sont les suivantes :
- associativité $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$,
- distributivité 1 : $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
- distributivité 2 : $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

2.3.4 Produit matriciel

C'est l'opération la plus importante (et la plus délicate à maitriser au début).

Définition. *Soient m, n, p trois entiers strictement positifs. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et soit $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle* **produit matriciel** *de A par B la matrice $C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ dont le terme général $c_{i,k}$ est défini, pour tout $i = 1, \ldots, m$ et pour tout $k \in 1, \ldots, p$ par :*

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j} \ .$$

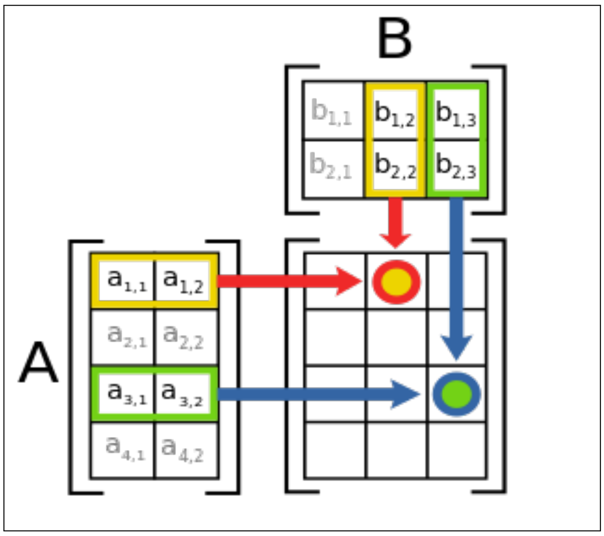
autrement dit le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne de la matrice produit C se calcule en sommant les produits terme à terme de la i-ème ligne de la matrice A avec ceux de la j-ème colonne de la matrice B.

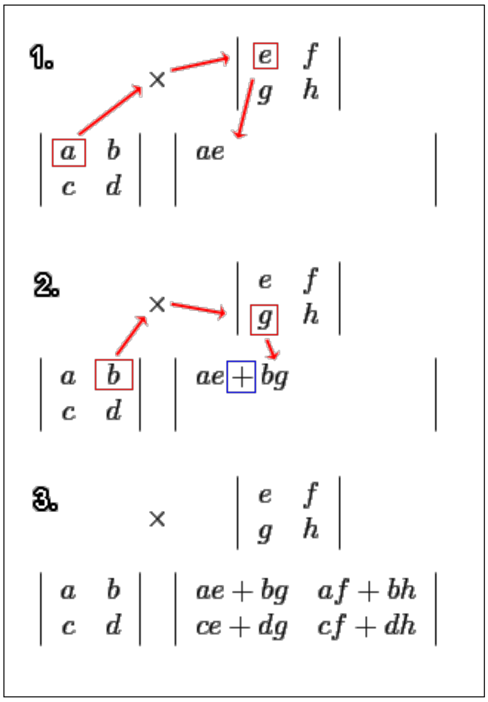
Remarque. *Attention ! La multiplication n'est possible* que si *les tailles des matrices A et B sont compatibles : le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B. Si A est de taille (m, n) (m lignes, n colonnes) et B est de taille (n, p) (n lignes, p colonnes) alors le résultat C est de taille (m, p) :*

$$(m, n) \times (n, p) \to (m, p)$$

autrement dit C a autant de lignes que A et autant de colonnes que B.

Pour effectuer ce produit, nous conseillons d'adopter la disposition suivante, en plaçant B au-dessus et à droite de A, comme sur les deux schémas suivants :





Exemple. [VIDEO] ***https://youtu.be/hQbIg6bmPhU***
Prenons les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice A a 3 lignes et 2 colonnes, la matrice B a 2 lignes et 4 colonnes. Le produit AB a donc un sens : c'est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes et l'on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -9 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Remarque. *Le produit matriciel a toutes les propriétés que l'on attend d'un produit, sauf qu'il* n'est pas commutatif, *autrement dit $AB \neq BA$ (en général).*

Proposition. *Le produit matriciel possède les propriétés suivantes.*

1. Associativité : *Si les produits AB et BC sont définis, alors les produits $A(BC)$ et $(AB)C$ le sont aussi et ils sont égaux.*

$$A(BC) = (AB)C .$$

2. Linéarité à droite : *Si B et C sont deux matrices de mêmes dimensions, si λ et μ sont deux réels et si A a autant de colonnes que B et C ont de lignes, alors*

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC .$$

3. Linéarité à gauche : *Si A et B sont deux matrices de mêmes dimensions, si λ et μ sont deux réels et si C a autant de lignes que A et B ont de colonnes, alors*

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC\ .$$

Définition. *On appelle matrice unité ou identité, notée I_n si elle est de taille n, toute matrice carrée qui possède des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Par exemple :* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors I_n est l'élément neutre de la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et même plus précisément on a :

Proposition. *Pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, on a $AI_p = I_nA = A$.*

2.3.5 Transposition, matrices transposées

Définition. *Étant donnée une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, sa* transposée, *notée A^T ou encore A^t ou bien ${}^tA$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'ordre (j, i) est $a_{i,j}$.*

Pour écrire la transposée d'une matrice, il suffit de transformer ses lignes en colonnes. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 24 \\ 1 & -9 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -9 \\ 24 & 8 \end{bmatrix}$$

On voit sur cet exemple que la 1ère ligne de A est la 1ère colonne de ${}^tA$, la 2ème ligne de A est la 2ème colonne de ${}^tA$, etc.

Observons que la transposée de la transposée est la matrice initiale.

$$(A^t)^t = A\ .$$

On a également d'autres propriétés faciles : $(A + B)^t = A^t + B^t$, $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
La transposée d'un produit est le produit des transposées, mais il faut inverser l'ordre des facteurs.

Proposition. *Soient m, n, p trois entiers strictement positifs. Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La transposée du produit de A par B est le produit de la transposée de B par la transposée de A.*

$$(AB)^t = B^t\, A^t\ .$$

Observons que le produit d'une matrice par sa transposée est toujours défini.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

$$A\,A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 13 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A^t\,A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} .$$

Le résultat est une matrice *carrée* (autant de lignes que de colonnes) et *symétrique*.

2.4 Cas particulier des matrices carrées

2.4.1 Matrices carrées particulières

Certaines matrices carrées sont notables.

— matrice identité I_n (cf plus haut)

— matrices diagonales : $D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$, par exemple $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

— matrices triangulaires supérieures : $U = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$, par exemple $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

— matrices triangulaires inférieures : $L = \begin{pmatrix} l_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$, par exemple $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

On a aussi la définition des matrices symétriques et anti-symétriques :

Définition. *Soit n un entier strictement positif et A une matrice carrée à n lignes et n colonnes.*
On dit que A est symétrique si pour tous $i, j = 1, \dots, n$, ses coefficients d'ordre $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$ sont égaux, ce qui est équivalent à dire que A est égale à sa transposée : $A^t = A$.
Similairement, on dit que A est anti-symétrique si $A^t = -A$.

Le produit d'une matrice par sa transposée est toujours une matrice symétrique. En effet :

$$(A\,A^t)^t = (A^t)^t\,A^t = A\,A^t .$$

2.4.2 Puissances

Définition. *Soit n un entier strictement positif et A une matrice carrée à n lignes et n colonnes. Soit $p \in \mathbb{N}$. On définit A^p par récurrence :*

$$A^0 = I, \quad , A^1 = A, \quad A^{p+1} = A \times A^p = A^p \times A, \forall p \geq 1$$

2.4.3 Matrices inversibles

Définition. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice de $\mathcal{M}_n$, notée A^{-1}, telle que*
$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n\ .$$

Théorème. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$. Supposons qu'il existe une matrice B telle que $A\,B = I_n$* ou bien *$B\,A = I_n$. Alors A est inversible et $B = A^{-1}$.*

Exemple [VIDEO]. ***https://youtu.be/SuU_qVfaIdY***

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
est inversible et son inverse est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition. *Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$. Le produit AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$.*

2.4.4 Application aux systèmes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. Chercher un n-uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$ tel que $Ax = b$, c'est résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues. Si la matrice A est inversible, alors la solution s'écrit $x = A^{-1}b$. La méthode du pivot de Gauss permet de résoudre le système $Ax = b$ pour un second membre quelconque, donc de calculer $x = A^{-1}b$. Les coefficients de A^{-1} se lisent sur le système résolu.

Cas d'une matrice 2×2. Voici ce qu'on obtient pour une matrice A à deux lignes et deux colonnes.

$$\left\{\begin{array}{rrcl} x & +2y & = & a \\ 3x & +4y & = & b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcl} x & +2y & = & a \\ & -2y & = & b-3a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2a+b \\ y & = & \frac{1}{2}(3a-b) \end{array}\right.$$

Les coefficients de A^{-1} sont ceux de a et b dans l'expression de x et y. Dans le cas général on obtient :
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \ ,$$
si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. L'expression de A^{-1} est facile à mémoriser. Pour inverser une matrice à deux lignes et deux colonnes, il faut :

1. échanger les deux coefficients diagonaux
2. changer le signe des deux autres
3. diviser tous les coefficients par le déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$.

Cas général. Pour $n \geqslant 3$, il n'y a pas de formule générale aussi facile. La technique la plus sûre consiste à résoudre le système $Ax = b$ pour un second membre quelconque, avec la méthode du pivot de Gauss, puis à écrire ensuite que la solution obtenue est le produit de A^{-1} par le second membre.

Exemple. [VIDEO] `https://youtu.be/WOr_3OJVEws`
Soit par exemple à inverser la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrivons le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & & -z & = & a \\ x & -y & & = & b \\ x & -y & +z & = & c \end{array} \right.$$

Voici les différentes étapes de la résolution par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & & -z & = & a \\ x & -y & & = & b \\ x & -y & +z & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{cccccc} x & & -z & = & a & \leftarrow L_1 \\ & -y & +z & = & b-a & \leftarrow L_2 - L_1 \\ & -y & +2z & = & c-a & \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{cccccc} x & & -z & = & a & \leftarrow L_1 \\ & -y & +z & = & b-a & \leftarrow L_2 \\ & & z & = & c-b & \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{cccccc} x & & -z & = & a & \leftarrow L_1 \\ & y & -z & = & a-b & \leftarrow -L_2 \\ & & z & = & c-b & \leftarrow L_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{cccccc} x & & & = & a-b+c & \leftarrow L_1 + L_3 \\ & y & & = & a-2b+c & \leftarrow L_2 + L_3 \\ & & z & = & -b+c & \leftarrow L_3 \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

avec

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elimination de Gauss-Jordan. L'élimination de Gauss-Jordan est une autre manière de présenter le calcul de l'inverse. La méthode est encore celle du pivot de Gauss. L'idée est de mettre en œuvre le pivot de Gauss pour transformer la matrice A en la matrice identité, et *de faire les mêmes opérations en parallèle sur la matrice identité*, de sorte que l'on obtient au final la matrice inverse voulue.

Exemple. [VIDEO] *https://youtu.be/SV3fufnstnY*
On illustre la procédé en reprenant l'exemple précédent.
On commence par écrire côte à côte la matrice A et l'identité :

$$(A|I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ensuite on met en œuvre la méthode de Gauss, en effectuant sur I les mêmes opérations que sur A. On commence par mettre des zéros dans la première colonne de A en lignes 2 et 3 :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

On continue les étapes de la méthode de Gauss pour arriver à l'identité à la place de A :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow -L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 + L_3 \\ \leftarrow L_2 + L_3 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$$

Lorsque la matrice A est devenue l'identité, le bloc de droite contient exactement A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5 Matrices et changement de base

Rappels. $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ ssi pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, x se décompose de façon unique sur $\mathcal{B}$.

Exemple [VIDEO]. *https://youtu.be/yrHyEnNdmu0*
Soient $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1), e'_1 = (2,3), e'_2 = (4,5)$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$, ce sont deux bases de $\mathbb{R}^2$ ($\mathcal{B}$ est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^2$). Soit $x = (2,4)$, alors on peut décomposer x à la fois dans $\mathcal{B}$ et dans $\mathcal{B}'$: $x = 2e_1 + 4e_2$, $x = 3e'_1 - e'_2$, autrement dit ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et dans $\mathcal{B}'$: $X_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a aussi $e'_1 = 2e_1 + 3e_2$ et $e'_2 = 4e_1 + 5e_2$, c'est la décomposition de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$. On peut alors définir la matrice de passe de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, matrice contenant en colonnes la décomposition de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$: $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

On peut remarquer que cette matrice permet d'obtenir les coordonnées dans $\mathcal{B}$ si on connait celles dans $\mathcal{B}'$. Par exemple soit z qui a pour coordonnées $z_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, alors on a $z = 6e'_1 + 7e'_2 = 6(2e_1 + 3e_2) + 7(4e_1 + 5e_2) = 40e_1 + 53e_2$ de sorte que ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $z_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 40 \\ 53 \end{pmatrix}$. Ici on peut remarquer que l'on vient d'effectuer en fait le produit matriciel $z_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} z_{\mathcal{B}'}$.

Cas général.

Définition. *Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de $\mathbb{R}^n$, telles que les vecteurs de $\mathcal{B}'$ se décomposent ainsi dans $\mathcal{B}$: $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$. On note $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice représentant $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$: $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, on l'appelle matrice de changement de base (ou de passage) de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.*

Proposition.

1. *Si $x \in \mathbb{R}^n$ a pour composantes $X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ et $X_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$, alors $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$*
2. *$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est inversible et on a $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$*

2.6 Image, noyau et rang d'une matrice

Définition. *On appelle rang d'une famille V de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, noté rang(V), la dimension du sous-espace engendré par V.*

Remarque. *Le rang de V est ainsi le nombre maximal de vecteur linéairement indépendants (libres) que l'on peut extraire de V.*

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Les colonnes de A peuvent être vues comme la représentation d'une famille V de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On appelle rang de la matrice A, noté rang(A), le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.*

Exemples [VIDEO]. `https://youtu.be/3POZ1KFpn3g`

$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$, $\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1$, $\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$ car les deux premiers vecteurs colonnes sont libres mais le troisième vérifie $x_3 = x_1 + x_2$ donc ils sont liés à trois.

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle noyau de A, noté Ker(A), l'ensemble des vecteurs colonnes X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = 0$.*
On appelle image de A, notée Im(A) l'ensemble des vecteurs colonnes Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $Y = AX$.

Proposition.

1. *Ker(A) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.*

2. *Im(A) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, c'est l'espace engendré par les vecteurs colonnes de A.*

Démonstration. [VIDEO] ***https://youtu.be/oyIAiOVO8cM*** *(pour le noyau)* ***https://youtu.be/fQYLRbWi_FQ*** *(pour l'image)*

1. $A.0_p = 0_n$ *donc* $0_p \in Ker(A)$.
   Soient X *et* X' *dans* $Ker(A)$, *alors leur somme est dans* $Ker(A)$ *aussi :* $A(X+X') = AX + AX' = 0$.
   Soient $X \in Ker(A)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors* $\lambda X \in Ker(A)$ *aussi :* $A(\lambda X) = \lambda.AX = \lambda.0 = 0$
   Donc $Ker(A)$ *est bien un sev de* $\mathbb{R}^p$
2. $A.0_p = 0_n$ *donc* $0_n \in Im(A)$.
   Soient $Y, Y' \in Im(A)$ *alors* $\exists X, X' \in \mathbb{R}^p$ *tels que* $AX = Y$ *et* $AX' = Y'$, *donc* $Y + Y' \in Im(A)$ *car* $Y + Y' = A(X + X')$ *donc* $U = X + X'$ *est bien un vecteur de* $\mathbb{R}^p$ *tel que* $AU = Y + Y'$.
   De même, si $Y \in Im(A)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors* $\lambda Y \in Im(A)$ *aussi :* $\exists X \in \mathbb{R}^p$, $Y = AX$ *donc* $(\lambda Y) = \lambda.AX = A(\lambda X)$ *de sorte qu'en posant* $U = \lambda X$ *on obtient bien ce qu'il faut pour* $(\lambda Y) = AU$.
   Donc $Im(A)$ *est bien un sev de* $\mathbb{R}^n$.
   Appelons maintenant $Y_1, ..., Y_p$ *les p vecteurs colonnes de A, on va démontrer que* $Im(A) = Vect(Y_1, ..., Y_n)$ *en procédant par double inclusion. Si on appelle* $e_1, ..., e_n$ *les n vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$, *on remarque que pour tout i,* $Ae_i = Y_i$, *ainsi on obtient que chacun de* Y_i *est dans* $Im(A)$, *donc comme* $Im(A)$ *est un sev, il contient* $Vect(Y_1, ..., Y_n)$, *autrement dit* $Vect(Y_1, ..., Y_n) \subset Im(A)$. *Pour l'autre inclusion, soit* $Y \in Im(A)$, *soit* X *tel que* $Y = AX$. *Décomposons* X *dans la base canonique :* $X = x_1e_1 + ... + x_ne_n$. *Alors en développant on obtient* $Y = A(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1Ae_1 + ... + x_nAe_n = x_1Y_1 + ... + x_nY_n$, *autrement dit* $Y \in Vect(Y_1, ..., Y_n)$, *ce qui nous donne l'autre inclusion :* $Im(A) \subset Vect(Y_1, ..., Y_n)$.

Exemple [VIDEO]. ***https://youtu.be/VIEn2cseYSs***
Déterminons le noyau, l'image et le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

NOYAU. *Soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A)$, *alors*

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & L_1 \\ -y - 3z = 0 & L_2 - 2L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Autrement dit, $Ker(A) = Vect \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Image et rang. *On a* $Im(A) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. *Voyons si ces vecteurs sont libres ou liées. Pour cela on écrit une relation de liaison entre eux :*

$$
\begin{aligned}
& a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = -3c \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ceci nous donne l'existence d'une relation de liaison non triviale, par exemple $c = 1, a = 2, b = -3$: $2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$. *Ensuite on peut voir que les vecteurs* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *sont libres, donc* $Im(A) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$, *ce qui nous donne à la fois la base de* $Im(A)$ *et le rang de* A *qui vaut 2.*

3 – Applications linéaires

Dans toute cette section, on considèrera E un sev de $\mathbb{R}^p$ et F un sev de $\mathbb{R}^n$ où $p, n \in \mathbb{N}$.

3.1 Généralités

Définition. *On appelle* application linéaire de E dans F *tout application* $f : E \to F$ *telle que*

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1) : f(u+v) = f(u) + f(v), \quad (2) : f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

ou encore, de manière équivalente :

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

Remarque. *Vocabulaire.*

— *On note* $\mathcal{L}(E, F)$ *l'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F

— *Si* $E = F$*, on note* $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, F)$*, les applications sont alors appelées des* endomorphismes

— *Si* $F = \mathbb{R}$*, les éléments de* $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ *s'appellent les* formes linéaires *de* E*.*

— *Si* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *est bijective, on dit que* f *est un isomorphisme de* E *dans* F*. Si de plus* $E = F$*, on dit que* f *est un automorphisme de* E*.*

Exemple [VIDEO]. ***https://youtu.be/gvtiXSMnGns***
Voici quelques exemples d'applications linéaires.

- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *:* $(x, y) \mapsto (x + y, 2x + 3y)$
- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *:* $(x, y) \mapsto (y, x, x + y)$
- *de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *:* $(x, y, z) \mapsto (y - x, 2z + y)$
- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *:* $(x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ *la rotation de centre* $(0, 0)$ *et d'angle* θ*.*

Faisons la preuve pour la première : $f(x, y) = (x + y, 2x + 3y)$*. On se donne un vecteur* v *qui a pour coordonnées dans* $\mathbb{R}^2$ (v_1, v_2) *et* w *qui a pour coordonnées* (w_1, w_2)*, et deux réels* λ, μ*. Les coordonnées de* $\lambda v + \mu w$ *sont* $(\lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2)$*. On calcule :*

1. $f(\lambda v + \mu w) = f(\lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2)$ *pour cela on remplace* x *par* $\lambda v_1 + \mu w_1$ *et* y *par* $\lambda v_2 + \mu w_2$ *:*

$$\begin{aligned} f(\lambda v + \mu w) &= f(\lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2) \\ &= (\lambda v_1 + \mu w_1 + \lambda v_2 + \mu w_2, 2(\lambda v_1 + \mu w_1) + 3(\lambda v_2 + \mu w_2)) \\ &= (\lambda(v_1 + v_2) + \mu(w_1 + w_2), \lambda(2v_1 + 3v_2) + \mu(2w_1 + 3w_2)) \\ &= (\lambda(v_1 + v_2), \lambda(2v_1 + 3v_2)) + (\mu(w_1 + w_2), \mu(2w_1 + 3w_2)) \\ &= \lambda(v_1 + v_2, 2v_1 + 3v_2) + \mu(w_1 + w_2, 2w_1 + 3w_2) \end{aligned}$$

2. $\lambda f(v) + \mu f(w) = \lambda f(v_1, v_2) + \mu f(w_1, w_2) = \lambda(v_1 + v_2, 2v_1 + 3v_2) + \mu(w_1 + w_2, 2w_1 + 3w_2)$

On trouve bien la même chose donc l'application est linéaire.

Remarque. *Méthode. Pour reconnaître une application linéaire : les seules opérations “autorisées” pour que l’application soit bien linéaire sont les combinaisons linéaires entre les coefficients.*
La présence de tout autre élément (présence d’un carré, ajout d’une constante, produit entre deux coefficients, présence d’une fonction non linéaire comme $\sin, \cos$ *ou autre, valeur absolue, etc.) rend la fonction non linéaire.*
Si on a reconnu une application linéaire, on met en pratique la méthode ci-dessus.
Si on a reconnu une application non linéaire, il suffit de trouver un contre-exemple, autrement dit deux vecteurs bien choisis et deux réels bien choisis tels que la formule $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$ *soit fausse.*

Exemple [VIDEO]. ***https://youtu.be/WrxXf4OLCTO***
Ainsi, on peut montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires :

- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *:* $(x, y) \mapsto (x + 1, 2x + 3y)$ *:*
  Présence du $+1$ *qui est un terme affine et pas linéaire*
  Contre-exemple avec $v = (0, 0), \lambda = 2$ *et* $\mu = 0$ *(du coup pas de* w*) :*
  $2f(0, 0) = 2(1, 0) = (2, 0) \neq f(2.(0, 0)) = f(0, 0) = (1, 0)$.
- *de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *:* $(x, y, z) \mapsto (xy, 2z + y)$ *:*
  Présence du produit xy *qui n’est pas linéaire*
  Contre-exemple avec $v = (1, 2, 3)$*,* $w = (4, 5, 6)$ *et* $\lambda = \mu = 1$ *:*
  $f(1, 2, 3) + f(4, 5, 6) = (2, 8) + (20, 17) = (22, 25)$
  alors que $f((1, 2, 3) + (4, 5, 6)) = f(5, 7, 9) = (35, 25)$

Proposition. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$*, alors*

— *Pour tout* $n \geqslant 1$*,*

$$\forall v_1, \dots, v_n \in E\ ,\ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\ , \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(v_i)\ .$$

— $f(0_E) = 0_F$

— $f(-u) = -f(u) \forall u \in E$

Démonstration. [VIDEO] ***https://youtu.be/0ezD6Sf1n9Y***
La preuve se fait par récurrence, elle est laissée en exercice au lecteur (cf vidéo pour les détails).

3.2 Interprétation matricielle des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

3.2.1 Matrice d’une application : images des vecteurs d’une base

Les espaces vectoriels considérés sont tous de dimension finie $\geqslant 1$. Considérons une application linéaire $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels E et F.

Si on choisit une base dans l’espace d’arrivée, alors les images des vecteurs de la base de départ ont des coordonnées dans cette base. S’il y a n vecteurs de base au départ et m à l’arrivée, l’application linéaire est déterminée par une matrice de taille $m \times n$: m coordonnées pour chacun des n vecteurs de la base de départ.

Définition. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ une base de F.*
La matrice de l'application *f dans les bases $(b_1, \ldots, b_n)$ et $(c_1, \ldots, c_m)$ est la matrice $A = (a_{i,j})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ où $a_{i,j}$ est la i-ième coordonnée de $f(b_j)$:*

$$\forall j = 1, \ldots, n\ , \quad f(b_j) = a_{1,j}\, c_1 + \cdots + a_{i,j}\, c_i + \cdots + a_{m,j}\, c_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, c_i\ .$$

On utilisera la notation

$$A = Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} f$$

Méthode. *Pour écrire la matrice quand on connait l'application linéaire, on la remplit colonne par colonne :*

1. *On commence par calculer l'image par f du premier vecteur de la base de départ : $f(b_1)$ et on le décompose dans la base d'arrivée (= on écrit ses coordonnées dans la base d'arrivée) : $f(b_1) = a_{1,1}c_1 + a_{2,1}c_2 + \ldots + a_{m,1}c_m$, autrement dit les coordonées de $f(b_1)$ dans la base d'arrivée sont $(a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{m,1})$, on met ce vecteur dans la première colonne de la matrice.*
2. *On procède ainsi pour les autres colonnes : dans la colonne 2 on met les coordonées de $f(b_2)$, etc.*

L'indice i (des vecteurs de la base d'arrivée) est donc l'indice de ligne, et l'indice j (des vecteurs de la base de départ) est l'indice de colonne. On peut résumer la construction de la matrice avec le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc|cc}
 & & \textit{départ} & & & & \\
f(b_1) & \cdots & f(b_j) & \cdots & f(b_n) & & \\
\hline
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} & c_1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} & c_i & \textit{arrivée} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} & c_m &
\end{array}$$

La matrice en elle-même est finalement notée ainsi, avec les coefficients entre deux grandes parenthèses :

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n}
\end{pmatrix}$$

Ecriture dans la base canonique. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la base $(e_1, \cdots, e_n)$ définie par

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \cdots,\ e_{n-1} = (0, \cdots, 0, 1, 0),\ e_n = (0, \cdots, 0, 0, 1),$$

Le plus souvent, on se ramènera au cas où l'espace de départ est $\mathbb{R}^n$ et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$, les deux étant munis de leurs bases canoniques.

Méthode. *Dans ce cas, la matrice de f est donc formée des colonnes $f(e_1)$, $f(e_2)$, ..., $f(e_n)$ écrites en coordonnées dans la base d'arrivée $(e_1, \ldots, e_m)$.*

Exemple. [VIDEO] ***https://youtu.be/_169kFvTOSk***
Considérons l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f \;:\quad (x, y) \longmapsto (x+y, 2x+3y, x-y)\ .$$

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $((1,0),(0,1))$. L'image de ces deux vecteurs est

$$f((1,0)) = (1,2,1) \quad et \quad f((0,1)) = (1,3,-1)\ .$$

La matrice de f est donc la suivante (attention à l'écriture des vecteurs de l'espace d'arrivée en colonnes).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier la cohérence de la notation matricielle, calculons le produit de cette matrice par un vecteur de $\mathbb{R}^2$ quelconque (x,y).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+3y \\ x-y \end{pmatrix}$$

On retrouve bien l'expression de f, ce qui valide le calcul de la matrice.

Ecriture dans une base quelconque.

Exemple. [VIDEO] ***https://youtu.be/D12M2RLkGCw***
Munissons maintenant $\mathbb{R}^2$ de la base $(b_1 = (1,1), b_2 = (1,-1))$ au départ, et $\mathbb{R}^3$ de la base $(v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1))$ à l'arrivée. Dans ce cas c'est un peu plus compliqué, car il faut redécomposer les images des vecteurs de base dans la base d'arrivée. Les images des vecteurs de la base de départ sont

$$\begin{aligned} f(b_1) &= f((1,1)) = (2,5,0) = -3\,(1,0,0) + 5\,(1,1,0) + 0\,(1,1,1) = -3v_1 + 5v_2 + 0v_3 \\ f(b_2) &= f((1,-1)) = (0,-1,2) = 1\,(1,0,0) - 3\,(1,1,0) + 2\,(1,1,1) = 1v_1 - 3v_2 + 2v_3. \end{aligned}$$

Le vecteur $f(b_1)$ a donc pour coordonnées $(-3,5,0)$ dans la base (v_1, v_2, v_3), c'est donc la 1ère colonne. De même pour la deuxième on trouve $(1,-3,2)$, d'où la matrice :

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2.2 Vice versa : trouver l'application grâce à la matrice

La proposition suivante nous indique qu'une application linéaire est caractérisée par la connaissance de sa matrice.

Proposition. *Soient E et F deux espaces vectoriels, $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E et $(c_1, \ldots, c_m)$ une base de F. Soit A une matrice de taille $m \times n$. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ dont la matrice est A.*

Démonstration. *Tout vecteur v de E s'écrit de façon unique sous la forme*

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j \, b_j \ ,$$

où les x_i sont les coordonnées de v dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$. Puisque f doit être linéaire, l'image de v ne peut être que

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j \, f(b_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} c_i \ .$$

Méthode. *Pour écrire l'application linéaire quand on connait la matrice, il suffit simplement de multiplier la matrice à droite par le vecteur des inconnues $(x, y, z...)$ (de la bonne taille : (x, y) si l'ensemble de départ est $\mathbb{R}^2$, (x, y, z) si c'est $\mathbb{R}^3$, etc.). Le résultat obtenu donne exactement l'application linéaire f.*

Exemple. [VIDEO] `https://youtu.be/NjY_6FQQUZU`
Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle définit, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$, une application f. L'espace de départ est ici $\mathbb{R}^3$ (car on a 3 colonnes), on multiplie donc la matrice à droite par le vecteur (x, y, z) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x + 3y + z \end{pmatrix}$$

L'application linéaire est donc la suivante :

$$f \ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \quad (x, y, z) \longmapsto (x + y - z, 2x + 3y + z) \ .$$

3.2.3 Quelques opérations sur les applications et leurs matrices

Proposition.
- *Si f et g sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et λ et μ sont des réels alors $\lambda f + \mu g$ est une application linéaire et sa matrice est $Mat(\lambda f + \mu g) = \lambda Mat f + \mu Mat g$ dans les mêmes bases.*
- *Si de plus $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ alors $h \circ f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$ et on a $Mat_{\mathcal{B}^b}^{\mathcal{B}^m}(h \circ f) = Mat_{\mathcal{B}^n}^{\mathcal{B}^m} h \times Mat_{\mathcal{B}^p}^{\mathcal{B}^n} f$.*
- *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme et si l'on munit E d'une base $\mathcal{B}$ et F d'une base $\mathcal{C}$ alors on a $Mat_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} f)^{-1}$ (attention ici : le premier signe "-1" désigne l'application réciproque, le deuxième désigne la matrice inverse).*

3.3 Changement de base et applications linéaires

Théorème. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^p$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Alors on a la formule de changement base :*

$$Mat_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} f = P_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} \times Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} f \times P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Exemple [VIDEO]. ***https://youtu.be/yVDRFhW-IwE***
On reprend l'application précédente de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f \;:\; \quad (x,y) \longmapsto (x+y, 2x+3y, x-y)$$

Appelons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et reprenons comme dans l'exemple précédent de nouvelles bases : $\mathcal{B}'$ la base $(b'_1 = (1,1), b'_2 = (1,-1))$ au départ et $\mathcal{C}' = (c'_1 = (1,0,0), c'_2 = (1,1,0), c'_3 = (1,1,1))$ à l'arrivée. Dans les bases canoniques, on a vu précédemment que la matrice de f est donnée par

$$Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour appliquer la formule, calculons les matrices de passage. Comme on connait les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{C}'$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on a facilement les matrices de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$, en écrivant en colonne les vecteurs de $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$:

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour appliquer la formule, il nous faut maintenant calculer $P_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}$ qui est l'inverse de $P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$. Pour cela on applique la méthode de Gauss Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 - L_3 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Donc on obtient pour $P_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}$:

$$P_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant appliquer la formule :

$$Mat_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien ce qu'on avait trouvé précédemment.