2

Intégration : calculs d'intégrales

Les vidéos de ce chapitre sont en ligne ici :

`http://bit.ly/calcul-integral`

Plan du chapitre

1 – Utilisation directe de primitives

La toute première étape face à une intégrale est de regarder si l'on reconnait une primitive, et dans ce cas de l'intégrer directement, avec la formule :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

si F est une primitive de la fonction f.

Exemple [VIDEO]. *https://youtu.be/mv3MzETsZeY*

$$I = \int_0^1 (x^2+2x)e^{x^3+3x^2}\,dx$$

Si on pose $u(x) = \exp(x^3+3x^2)$ *alors on obtient*

$$u'(x) = (3x^2+6x)e^{x^3+3x^2} = 3(x^2+2x)e^{x^3+3x^2}$$

Ainsi, on reconnait donc $u'(x)$ *dans* I *et on peut intégrer directement :*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{3}u'(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}u(x)\right]_0^1 = \left[\frac{1}{3}e^{x^3+3x^2}\right]_0^1 = \frac{e^4-1}{3}$$

2 – Intégration par parties

On rappelle que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, cela signifie que f est dérivable et que sa dérivée f' est continue.

Proposition. *Soient* u *et* v *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$*, alors*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

Démonstration. *Il suffit d'intégrer la formule de dérivation d'un produit :*

$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + uv'$$

Exemples [VIDEO].

1. *Intégrale d'un polynome et d'une exponentielle*
   https://youtu.be/5pI9ras6J64
   La méthode consiste à dériver le polynome (pour faire baisser son degré, donc au bout d'un certain nombre d'intégrations, arriver à une constante) et à intégrer l'exponentielle, qui reste une exponentielle. On considère par exemple $\int_0^1 (2x+3)e^x\,dx$*. On pose*

   $$u(x) = 2x+3, \quad u'(x) = 2; \qquad v'(x) = e^x, \quad v(x) = e^x$$

   On obtient donc

   $$\int_0^1 (2x+3)e^x\,dx = [(2x+3)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x\,dx = [(2x+3)e^x - 2e^x]_0^1 = 3e-1$$

2. *Intégrale d'un polynome et d'un log*
https://youtu.be/oHOwC1DUGFk
Cette fois on va dériver le log (pour le faire disparaitre) et intégrer le polynome. Par exemple, on va intégrer $\int_1^e (x^3+1)\ln(x)\,dx$*. On pose donc*

$$u(x) = \ln(x), \quad u'(x) = \frac{1}{x}; \qquad v'(x) = x^3+1, \quad v(x) = \frac{x^4}{4} + x$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\int_1^e (x^3+1)\ln(x)\,dx &= [\ln(x)(\tfrac{x^4}{4}+x)]_1^e - \int_1^e (\tfrac{x^4}{4}+x)\tfrac{1}{x}\,dx \\
&= (\tfrac{e^4}{4}+e) - \int_1^e \tfrac{x^3}{4} + 1\,dx \\
&= (\tfrac{e^4}{4}+e) - [\tfrac{x^4}{16} + x]_1^e \\
&= (\tfrac{e^4}{4}+e) - (\tfrac{e^4}{16} + e - \tfrac{1}{16} - 1) = \tfrac{3e^4}{16} + \tfrac{17}{16}
\end{aligned}$$

3 – Changement de variables

Proposition. *Soit* f *de classe* $\mathcal{C}^0$ *sur* $[a,b]$ *et* φ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[\alpha,\beta]$ *et telle que* $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$*. Alors :*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Démonstration. *Soit* F *une primitve de* f *sur* $[a,b]$*. Comme* $[a,b]$ *contient* $\varphi([\alpha,\beta])$*,* $F\circ\varphi$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[\alpha,\beta]$ *et on a la formule de dérivation*

$$(F\circ\varphi)' = (F'\circ\varphi)\times\varphi' = (f\circ\varphi)\times\varphi'$$

Ainsi, on peut calculer

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta (F\circ\varphi)'(t)\,dt \\
&= [F\circ\varphi]_\alpha^\beta \\
&= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\
&= [F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Exemple [VIDEO]. *https://youtu.be/KWxkE6iqE50*
Calculons $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$*. On propose de faire le changement de variable suivant :*

$$x = \varphi(t) = \sin(t)$$

On déroule toutes les vérifications et les calculs préliminaires nécessaires avant de pouvoir appliquer la formule de changement de variable :

- $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *est continue sur* $[0,1]$
- *pour* $x=1$*,* $t=\frac{\pi}{2}$*, pour* $x=0$*,* $t=0$*, on choisit donc* $\alpha=0, \beta=\frac{\pi}{2}$
- $\varphi = \sin$ *est bien* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,\frac{\pi}{2}]$ *et* $\sin([0,\frac{\pi}{2}]) = [0,1]$
- *on calcule* $\varphi'(t) = \cos(t)$

On écrit parfois la dernière étape sous la forme

$$x = \sin(t), \qquad \textit{donc } dx = \cos(t)\,dt$$

On peut donc appliquer la formule de changement de variable :

$$\begin{array}{rcl} J & = & \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}(\sin t)'\,dt \\ & = & \int_0^{\pi/2} \cos t \cos t\,dt \\ & = & \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \\ & = & \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,dt \\ & = & \frac{1}{2}[t + \frac{\sin(2t)}{2}]_0^{\pi/2} \\ & = & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

où on a utilisé plusieurs formules de trigo :

$$\sin^2 + \cos^2 = 1, \quad \cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$$

4 – Intégrale d'une fonction rationnelle

Définition. *On dit que f est une fonction rationnelle lorsque f est le quotient de deux polynomes à coefficients réels (ou complexes).*

On rappelle que la toute première méthode d'intégration consiste à essayer de reconnaitre directement une formule de primitive, ou bien à deviner un changement de variable (si ça marche c'est tjs beaucoup plus simple que la méthode générale pour les fractions...).

Exemple [VIDEO]. *https://youtu.be/pUU-L1ccYZM*

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx = [\ln|x^2+x+2|]_0^1 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

car on a reconnu la fraction $\frac{u'}{u}$ (avec $u = x^2+x+2$) qui s'intègre donc en $\ln|u|$.

4.1 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$

Dans cette section, on va prendre comme exemple la fraction

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{P}{Q}$$

La méthode générale d'intégration des fractions consiste à réécrire f sous une forme qu'on sait intégrer, on appelle cela la *décomposition en éléments simples.*

Définition. *On appelle élément simple :*

— *de première espèce toute fonction rationnelle de la forme*

$$x \mapsto \frac{A}{(x-x_1)^\alpha}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbb{R}, x_1 \in \mathbb{R}$,

— *de seconde espèce toute fonction rationnelle de la forme*

$$x \mapsto \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\beta}$$

où $\beta \in \mathbb{N}^*, B, C, b, c \in \mathbb{R}, b^2-4c<0$

Pour une fraction $f = \frac{P}{Q}$ on a deux cas, selon que le degré de P est plus petit que celui de Q ou pas.

4.1.1 Premier cas : $d(P) < d(Q)$

Proposition. — *Q se factorise dans $\mathbb{R}$ sous la forme*

$$Q(x) = K(x-x_1)^{\alpha_1}\dots(x-x_p)^{\alpha_p}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\dots(x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}$$

avec : $\forall i \neq j, x_i \neq x_j$, $\forall k \neq l, (b_l, c_l) \neq (b_k, c_k)$ et $b_l^2 - 4c_l < 0$ (autrement dit les morceaux d'ordre 2 ne se factorisent pas dans $\mathbb{R}$)

— *il existe des constantes A_{ij}, B_{kl}, C_{kl} telles que*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \; & \frac{A_{11}}{(x-x_1)^1} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{p1}}{(x-x_p)^1} + \dots + \frac{A_{p\alpha_p}}{(x-x_p)^{\alpha_p}} \\ & + \frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+b_1x+c_1)^1} + \dots + \frac{B_{1\beta_1}x+C_{1\beta_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_{q1}x+C_{q1}}{(x^2+b_qx+c_q)^1} \\ & + \dots + \frac{B_{q\beta_q}x+C_{q\beta_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}}\end{aligned}$$

A retenir : pour chaque racine on somme tous les éléments de première espèce jusqu'à la multiplicité α_i et pour chaque élément de deuxième espèce on les somme tous jusqu'à la multiplicité β_i.

La difficulté va être ensuite de calculer les coefficients inconnus A_{ij}, B_{kl}, C_{kl}. L'idée va être de multiplier par le morceau concerné de multiplicité maximale $(x-x_i)^{\alpha_i}$ ou $(x^2+b_kx+c_k)^{\alpha_k}$, éventuellement de dériver un certain nombre de fois, et de calculer l'expression en un x judicieusement choisi de manière à faire disparaitre un maximum de termes. Pour les élements de première espèce, l'idée est de calculer les coefficients associés à chaque élément et de commencer par le coefficient associé à la plus grande puissance, et d'y aller en décroissant. Avec les notations de la proposition, ça donnerait donc de calculer :

— $A_{1\alpha_1}$: multiplier par $(x-x_1)^{\alpha_1}$ puis évaluer l'égalité obtenue en x_1

— $A_{1\alpha_1-1}$: multiplier par $(x-x_1)^{\alpha_1}$, dériver une fois, puis évaluer l'égalité obtenue en x_1 (attention, on ne dérive que le morceau correspondant à P/Q, car tous les autres vont disparaitre, cf exemples)

— ...

— A_{12} : multiplier par $(x-x_1)^{\alpha_1}$, dériver $\alpha_1 - 2$ fois, puis évaluer l'égalité obtenue en x_1

— A_{11} : : multiplier par $(x-x_1)^{\alpha_1}$, dériver $\alpha_1 - 2$ fois, puis évaluer l'égalité obtenue en x_1.

— idem pour les autres : $A_{2\alpha_2}$, puis $A_{2\alpha_2-1}$, ... puis A_{22} puis A_{21} en dernier.

Pour les élements de deuxième espèce, soit on procède pareil dans $\mathbb{C}$, soit on calcule des valeurs particulières et des limites, pour obtenir des équations qui permettent de déteminer les B_{kl}, C_{kl}. On va voir ça dans des exemples.

Exemple [VIDEO]**.** *Cet exemple fait l'objet de 3 vidéos :*

1. `https://youtu.be/nqzhAwidl8k` *: calcul de A_1 et A_2*
2. `https://youtu.be/eoMegq3DK-Q` *: calcul de B et C*
3. `https://youtu.be/z9KEu_QVrF8` *: calcul final de la primitive, une fois que la décomposition a été trouvée.*

On considère la fraction

$$g(x) = \frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2}$$

La proposition nous dit qu'elle admet une décomposition sous la forme

$$g(x) = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Pour trouver A_1, A_2, B et C on procède comme suit. On peut soit commencer par les A_i soit par les B et C, c'est égal. Disons qu'ici on commence avec les A_i : on commence par le morceau de degré le plus élevé (c'est toujours le plus efficace), c'est-à-dire A_2. Pour trouver A_2, on multiplie toute l'égalité par son dénominateur, qui est $(x-2)^2$:

$$g(x)(x-2)^2 = \frac{A_1(x-2)^2}{x-2} + \frac{A_2(x-2)^2}{(x-2)^2} + \frac{(Bx+C)(x-2)^2}{x^2+2}$$

On remplace g par son expression :

$$\frac{(x+4)(x-2)^2}{(x^2+2)(x-2)^2} = A_1(x-2) + A_2 + \frac{(Bx+C)(x-2)^2}{x^2+2}$$

et on simplifie tout ça :

$$\frac{x+4}{(x^2+2)} = A_1(x-2) + A_2 + \frac{(Bx+C)(x-2)^2}{x^2+2}$$

et là on peut remarquer que si on choisit x de manière à annuler le morceau par lequel on vient de multiplier, à savoir $x = 2$ pour annuler $(x-2)^2$, tout disparait presque sauf le bout associé à g et A_2 :

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2+4}{(2^2+2)} = 0 + A_2 + 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_2 = \frac{6}{6} = 1$$

Pour A_1 on fait la même chose (sauf que cette fois on sait que $A_2 = 1$), on multiplie par $(x-2)^2$, et cette fois on va dériver une fois avant d'évaluer l'égalité en $x = 2$:

$$g(x)(x-2)^2 = \frac{A_1(x-2)^2}{x-2} + \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2} + \frac{(Bx+C)(x-2)^2}{x^2+2}$$

On simplifie d'abord :

$$\frac{x+4}{(x^2+2)} = A_1(x-2)+1+\frac{(Bx+C)}{x^2+2}(x-2)^2$$

On dérive, en prenant soin de gérer la fraction en $Bx+C$ comme un produit uv où $v=(x-2)^2$ afin de ne pas perdre de vue que ça va s'annuler en $x=2$ (en gros, le seul morceau qui va rester sera g, donc on ne dérive que g et on ne dérive surtout pas les autres fractions) :

$$\frac{x^2+2-2x(x+4)}{(x^2+2)^2} = A_1+\left(\frac{(Bx+C)}{x^2+2}\right)'(x-2)^2+\frac{(Bx+C)}{x^2+2}.2(x-2)$$

On remplace à nouveau x par 2 :

$$\frac{2^2+2-2.2(2+4)}{(2^2+2)^2} = A_1+0+0 \Leftrightarrow A_1 = -\frac{18}{36} = -\frac{1}{2}$$

A ce stade, on a donc déjà trouvé A_1 et A_2 :

$$g(x) = \frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{-1}{2(x-2)}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Pour calculer B et C on va tester les différentes astuces possibles : choisir de bonnes valeurs et calculer des limites en l'infini.

— *Choisir une "bonne valeur" : là on peut voir que si on prend $x=0$ on n'aura plus que C comme inconnue :*

$$g(0) = \frac{0+4}{(0^2+2)(0-2)^2} = \frac{-1}{2(0-2)}+\frac{1}{(0-2)^2}+\frac{0+C}{0^2+2}$$

ce qui nous donne ici $C=0$

— *Limite en $+\infty$: si on regarde le morceau $\frac{Bx+C}{x^2+2}$, on voit qu'il est équivalent à B/x, donc sa limite en $+\infty$ sera 0, ce qui n'est pas très utile comme information pour trouver B. Par contre, on remarque que si on multiplie ce morceau par x, alors la limite devient B. L'idée est donc de multiplier g par x :*

$$g(x)x = \frac{(x+4)x}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{-x}{2(x-2)}+\frac{x}{(x-2)^2}+\frac{Bx^2}{x^2+2}$$

et de faire tendre x vers l'infini dans cette égalité :

$$0 = \frac{-1}{2}+0+B$$

ce qui nous donne $B=1/2$.

Finalement, on a décomposé g :

$$g(x) = \frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{-1}{2(x-2)}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{x}{2(x^2+2)}$$

On peut donc calculer une primitive G de g, par exemple sur l'intervalle $]2,+\infty[$:

$$G(x) = \int \frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{-1}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{4}\ln|x^2+2|$$

4.1.2 Deuxième cas : $d(P) \geq d(Q)$

On peut se ramener au cas précédent grâce au résultat admis :

Théorème. *Pour tous polynomes P et Q tels que $d(P) \geq d(Q)$, alors il existe un unique couple de polynomes M et R tels que*

$$P = MQ + R, \qquad d(R) < d(Q)$$

Dans ce cas, on peut alors écrire

$$\frac{P}{Q} = M + \frac{R}{Q}, \text{ avec } d(R) < d(Q)$$

et on est donc ramené au cas précédent. Evidemment, il faut quand même être capable de calculer M et R. On va faire cela par division euclidienne de polynome. Ça marche comme pour la division entière classique, sauf que les monomes x^k jouent le rôle des puissances 10^k des nombres en base 10. On va voir ça sur un exemple.

Exemple [VIDEO]. `https://youtu.be/DX6CwNaLPys`
On considère la fraction

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{P}{Q}$$

Pour pouvoir effectuer la division, on a besoin de développer le dénominateur :

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8}$$

Ensuite on pose la division (voir la vidéo pour le commentaire oral) :

$$\begin{array}{l|l}
\overbrace{1x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}^{P} & \overbrace{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8}^{Q} \\
\hline
-(\underline{x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 8x}) & \underbrace{x + 2}_{\text{M (quotient)}} \\
0 + 2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 14x + 24 & \\
-(\underline{2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 16x + 16}) & \\
\underbrace{2x + 8}_{\text{R (reste)}} &
\end{array}$$

Et on trouve finalement

$$f(x) = x + 2 + \frac{2x+8}{(x^2+2)(x-2)^2} = x + 2 + 2\frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2} = x + 2 + 2g(x)$$

En utilisant ce que l'on a trouvé précédemment pour $g(x)$, on calcule une primitive F de f sur $]2, +\infty[$:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{2}\ln|x^2+2|$$

4.2 Intégration des éléments de 1è et 2è espèces

4.2.1 Première espèce

Les éléments de première espèces sont donc du type

$$\frac{A}{(x-a)^n}$$

On reconnait des fractions du type

$$\frac{u'}{u^n}$$

avec $u = x - a$, et on a donc pour l'intégration

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} = \int \frac{Au'}{u^n} = \int Au'u^{-n} = \frac{Au^{-n+1}}{-n+1} = \frac{A}{(1-n)}\frac{1}{u^{n-1}} = \frac{A}{(1-n)}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$$

4.2.2 Deuxième espèce

Cas général. Pour le cas général, on se retrouve à calculer ce genre de primitives :

$$\int \frac{Bt+C}{(t^2+bt+c)^n}\,dt$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $b^2 - 4c < 0$ (autrement dit le dénominateur ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$). La méthode dans ce cas consiste à couper la fraction en deux morceaux, l'un qui sera de la forme u'/u^n et l'autre qui sera de la forme d/u^n :

$$\frac{Bt+C}{(t^2+bt+c)^n} = \frac{B}{2}\frac{2t+b}{(t^2+bt+c)^n} + \frac{C-Bb/2}{(t^2+bt+c)^n}$$

Intégration du premier morceau. Il est de la forme constante $\times u'/u^n$ car on a bien pris soin de faire apparaite $2t+b$ qui est justement la dérivée de t^2+bt+c, on peut donc intégrer en $u^{-n+1}/(-n+1)$:

$$\int \frac{2t+b}{(t^2+bt+c)^n}\,dt = \int \frac{u'}{u^n} = \int u'u^{-n} = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} = \frac{(t^2+bt+c)^{-n+1}}{-n+1}$$

ce qui se réécrit encore

$$\int \frac{2t+b}{(t^2+bt+c)^n}\,dt = \frac{(t^2+bt+c)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)}\frac{1}{(t^2+bt+c)^{n-1}}$$

Intégration du deuxième morceau. Il est de la forme constante fois $1/u^n$ où u est un polynome de degre 2 irréductible dans $\mathbb{R}$, il nous faut donc savoir intégrer

$$\int \frac{1}{(t^2+bt+c)^n}\,dt$$

Il y a plusieurs étapes :

1. On commence par un changement de variable pour se ramener à l'intégrale suivante :
$$\int \frac{1}{(u^2+1)^n}\,du$$
Pour cela, on met le trinome sous forme canonique :
$$t^2+bt+c=(t+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}+c=(t+\frac{b}{2})^2+\frac{4c-b^2}{4}$$
avec $4c-b^2>0$, on peut donc factoriser :
$$t^2+bt+c=\frac{4c-b^2}{4}(\frac{4}{4c-b^2}(t+\frac{b}{2})^2+1)$$
à une constante près on est donc ramené au calcul de primitive suivant
$$\int \frac{1}{((\sqrt{\frac{4}{4c-b^2}}(t+\frac{b}{2}))^2+1)^n}$$
pour lequel on fait le changement de variable $u=\sqrt{\frac{4}{4c-b^2}}(t+\frac{b}{2})$, ce qui donne finalement la primitive suivante à calculer
$$\int \frac{1}{(u^2+1)^n}$$
Evidemment, ici il ne s'agit en aucun cas de retenir la formule par coeur, mais juste de retenir le cheminement, la méthode !
2. Ensuite il y a deux cas :
   — Si $n=1$, c'est terminé, car on sait qu'une primitive de $\frac{1}{u^2+1}$ est $\arctan x$
   — Si $n>1$, on fait le changement de variable :
   $$u=\tan v, \quad du=\frac{dv}{\cos^2 v}$$
   on est donc amené à calculer la primitive
   $$\int \frac{1}{\tan^2 v+1}\frac{1}{\cos^2 v}\,dv=\int (\cos v)^{2n-2}\,dv$$
   que l'on pourra calculer soit par linéarisation, soit par récurrence (à voir en TD).

Exemple [VIDEO]. ***https://youtu.be/dBv4DBfQOZk***
On considère la fraction
$$\begin{aligned} f(t)=\frac{t+1}{t^2+4t+8} &= \frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+8}-\frac{1}{t^2+4t+8} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+8}-\frac{1}{(t+2)^2+4} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+8}-\frac{1}{4}\frac{1}{(t/2+1)^2+1} \end{aligned}$$

Le premier morceau s'intègre facilement car on reconnait u'/u qui s'intègre en $\ln|u|$:

$$\int^x \frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+8} = \frac{1}{2}\ln|t^2+4t+8|$$

Pour le deuxième on fait le changement de variable $u = t/2+1$, $du = dt/2$, quand t vaut x alors u vaut $x/2+1$, ce qui donne

$$\int^x \frac{1}{4}\frac{1}{(t/2+1)^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\int^{x/2+1}\frac{2du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2}+1)$$

Finalement, on trouve pour la primitive de f la fonction F :

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln|t^2+4t+8| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

4.3 Application aux fonctions rationnelles en $\sin$ et $\cos$

Ces fonctions s'intègrent en faisant un changement de variable pour se ramener à une primitive de fraction. On suppose que la fonction f s'écrit :

$$f(x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\,dx$$

où P et Q sont des polynomes. Alors on a les règles suivantes pour décider du “bon” changement de variable :

— si $f(-x) = f(x)$, alors on posera $t = \cos x$;

— si $f(\pi - x) = f(x)$, alors on posera $t = \sin x$;

— si $f(\pi + x) = f(x)$, alors on posera $t = \tan x$;

— sinon, on posera $t = \tan\frac{x}{2}$.

Après changement de variable, on est ramené à calculer la primitive d'une fraction en t, cf paragraphes précédents. Ne pas oublier à la toute fin de revenir à x...