1

Formules de Taylor et développements limités

Les vidéos de ce chapitre sont en ligne ici :

`http://bit.ly/taylor-dl`

Plan du chapitre

1 – Préliminaires

1.1 But

L'intérêt des formules de Taylor (parfois abrégées FT) et des développements limités (DL) est multiple. Le principe consiste à approcher des fonctions "compliquées" par des polynômes, en écrivant

$$f(x) = P(x) + \text{ erreur.}$$

Cela permet par exemple de :

- simplifier certains calculs
- trouver des limites, lever des formes indéterminées
- connaitre le comportement local de certaines fonctions
- etc.

1.2 Notations $o(x)$

Définition. *Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a. On considèrera aussi le cas où l'on se trouve en $+\infty$ ou $-\infty$, et dans ce cas on demande que I ait pour borne $\pm\infty$. On dit que la fonction f est* négligeable *devant la fonction g en x_0 (avec x_0 valant a ou $+\infty$ ou $-\infty$) s'il existe :*

- *un voisinage V de x_0 (si $x_0 = a$ on aura V du type $V =]a-\eta; a+\eta[$ avec $\eta > 0$, si $x_0 = -\infty$ on aura $V =]-\infty; M[$ avec $M \in \mathbb{R}$ et si $x_0 = +\infty$ on aura $V =]M; +\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$)*
- *une fonction ε définie sur V et telle que :*
  - $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$
  - $f(x) = \varepsilon(x)g(x), \forall x \in V$

On note alors $f(x) = o(g(x))$, qui se lit "$f(x)$ est un petit o de $g(x)$" (au voisinage de x_0).

Remarque. *Avec les mêmes notations, on suppose que la fonction g ne s'annule pas pour $x \neq x_0$. Alors f est* négligeable *devant g au voisinage de x_0 si et seulement si le quotient f/g tend vers 0 :*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemples [VIDEO]. *https://youtu.be/l8v5gT_HPiY*

- $\ln(x) = o(\frac{1}{x})$ *au voisinage de* 0
- $x^2 = o(e^x)$ *au voisinage de* $+\infty$
- $\sqrt{x} = o(1)$ *au voisinage de* 0.

On pourra aussi regarder la vidéo `https://youtu.be/YaBH2MBWWrM` qui présente quelques propriétés des petits o utiles pour la suite.

2 – Développements limités et formules de Taylor

2.1 Généralités

Définition. *Soient I un intervalle ouvert, a un point de I et n un entier. On dit que f* admet un développement limité d'ordre n en a *lorsqu'il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que le reste $f(x) - P_n(x)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$.*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = o((x-a)^n) \ .$$

Le polynome P_n s'écrit par exemple :

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n$$

où les b_i sont des coefficients réels. On écrira ainsi :

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Remarque. *On peut noter que l'équation de la tangente en a, bien connue depuis le lycée, est justement le développement limité à l'ordre 1. Dans ce cas on a même une expression plus précise des coefficients b_0 et b_1 :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

On verra que les formules de Taylor et les développements limités permettent de généraliser cette formule aux ordres supérieurs.

Nous nous ramènerons toujours à des développements limités au voisinage de 0, grâce à l'observation suivante.

Proposition. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de I et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Soit g la fonction qui à h associe $g(h) = f(a+h)$. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en a, si et seulement si g admet un développement limité d'ordre n en 0.*

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n) \iff g(h) = f(a+h) = P_n(a+h) + o(h^n) \ .$$

Remarque. *Si l'on souhaite faire un développement limité au voisinage de l'infini (appelé parfois* développement asymptotique*), on cherchera à écrire f sous la forme*

$$f(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

On se ramènera là aussi en zéro en posant $h = \frac{1}{x}$.

2.1.1 Unicité, parité

Un développement limité, s'il existe, est unique au sens suivant.

Proposition. *Soient I un intervalle ouvert contenant 0, et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Supposons qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n de degré au plus n tels que au voisinage de 0 :*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) = Q_n(x) + o(x^n) .$$

Alors $P_n = Q_n$.

Proposition. *Grâce aux formules de Taylor qui suivent, on démontre que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ (n fois dérivable, et dérivée n-ème continue) au voisinage de x_0, alors f admet un développement limité (DL) à l'ordre n.*

Grâce à l'unicité du DL, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition. *Soit f une fonction admettant un DL en zéro. On a les résultats suivants :*

— *Si f est paire, alors son développement limité ne comporte que les termes de degré pair :*
$$f(x) = b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 \ldots + b_{2n}x^{2n} + o\left(x^{2n}\right)$$
— *Si f est impaire, alors son développement limité ne comporte que les termes de degré impair :*
$$f(x) = b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 \ldots + b_{2n+1}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

Démonstration. *La preuve est laissée en exercice. Elle repose sur les définitions de la parité ($f(-x) = f(x)$) et de l'imparité ($f(-x) = -f(x)$), combinées avec l'unicité du développement limité.*

2.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème. *Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et a, x deux réels de I, alors :*

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t . \end{aligned}$$

Démonstration. [VIDEO] *https://youtu.be/Hr6BaVbrkOw*
Par récurrence.

Pour $n = 0$, la formule est le théorème fondamental de l'Analyse :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t .$$

Supposons la formule vraie au rang $n-1$, avec $n \geq 1$. Pour la prouver au rang n, posons :

$$I_n = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t ,$$

et intégrons par parties en posant

$$u'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad u(x) = -\frac{(x-t)^n}{n!}$$

$$v(t) = f^{(n)}(t), \quad v'(t) = f^{(n+1)}(t)$$

ce qui donne

$$I_n = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$I_n = -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

ce qui permet d'obtenir la formule au rang n et qui conclut la preuve.

2.3 Formule de Taylor Lagrange

Théorème. *Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, a et x deux réels de I. Alors il existe un réel c situé entre a et x (autrement dit $c \in [a, x]$ ou bien $c \in [x, a]$ selon la position relative de a et de x) tel que :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \\ &\quad + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c). \end{aligned}$$

NB : c dépend de a et de x... Si a ou x changent, c change aussi.

Démonstration. [VIDEO] *https://youtu.be/BtdRKvY-3ys*
La preuve est laissée en exercice. On pourra utiliser la deuxième formule de la moyenne :

Si f et g sont continues sur $[a, b]$, et g est de signe constant, alors il existe c dans $[a, b]$ tel que

$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^x g(t)\,dt$$

(si cette indication ne suffit pas, la démonstration complète est donnée dans la vidéo).

Corollaire (Inégalité de Taylor Lagrange)**.** *Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. Soit M un majorant de $|f^{(n)}|$ sur $[a, b]$. Alors on a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} &\left|f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}\right| \\ &\leq M\frac{(b-a)^n}{n!}. \end{aligned}$$

2.4 Formule de Taylor Young

Cette formule va nous permettre de démontrer la plupart des développements limités usuels.

Théorème. *Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I. Alors f admet un développement limité au voisinage de tout point a de I :*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o((x-a)^n)$$

Démonstration. [VIDEO] *https://youtu.be/xGDWsn3sAaY*
Pour la preuve, on va utiliser la formule de Taylor Lagrange (FTL). Il nous faut démontrer que $A(x) = o((x-a)^n)$, où $A(x)$ est défini par :

$$A(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} - \ldots - (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Pour montrer que $A(x)$ est un petit o de $(x-a)^n$, on va montrer que leur quotient tend vers 0. Pour cela, on commence par appliquer la FTL sur l'intervalle $[a,x]$: il existe c_x (noté ainsi car c dépend de x puisqu'il se trouve dans l'intervalle $[a,x]$, autrement dit c change quand x change) avec $c_x \in [a,x]$ tel que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$$

On remplace cette formule pour $f(x)$ dans la formule pour $A(x)$, on simplifie plein de termes et il nous reste finalement

$$A(x) = (x-a)^n\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} - (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{(x-a)^n}{n!}\left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)\right)$$

Ensuite il nous suffit de remarquer que quand x tend vers a, c_x tend vers a aussi, donc par continuité de la fonction $f^{(n)}$ (car f est de classe $\mathcal{C}^n$) on a que $f^{(n)}(c_x)$ tend vers $f^{(n)}(a)$, autrement dit :

$$\frac{A(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)) \quad \to 0$$

ce qui montre justement que

$$A(x) = o((x-a)^n)$$

et qui conclut donc la preuve.

2.5 Exemples et DL usuels

Exemple [VIDEO]. *https://youtu.be/tyv0q51R330*
A titre d'exemple, on considère la fonction

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{1+x}$$

et on écrit les trois formules de Taylor pour cette fonction, à l'ordre 3, au voisinage de 0.

Cet exemple, intégralement traité dans la vidéo, est laissé en exercice au lecteur, avec les indications d'étapes suivantes :

1. *Commencer par écrire les trois formules de manière générale pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$, au point 0, depuis le point x : $f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots$ (à compléter).*

2. *Calculer les dérivées successivces de f jusqu'à l'ordre 3. On pourra écrire $f = u + v$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \frac{1}{1+x}$.*
3. *En déduire les valeurs en 0 : $f(0); f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$.*
4. *Remplacer tout le nécessaire dans les formules de la première question.*

Exemples [VIDEO]. *Les exemples suivants sont à connaitre par coeur !*
Soit n un entier, α un réel.

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) .$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) .$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) .$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + o(x^n) .$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) .$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) .$$

Les démonstrations seront traitées en exercice, et peuvent être trouvées en vidéo dans la playlist de ce chapitre : `http://bit.ly/taylor-dl`.

3 – Opérations sur les développements limités

3.1 Manipulation des petits o

Proposition (Propriétées des o en zéro). *Soient n et m deux entiers positifs ou nuls.*

1. *Si $n < m$, alors $x^m = o(x^n)$ au voisinage de 0.*
2. *Somme de petits o : $o(x^m) + o(x^n) = o(x^p)$, où $p = \min(n, m)$, autrement dit si $n \leq m$, alors $o(x^m) + o(x^n) = o(x^n)$.*
3. *Produit de petits o : $o(x^n) \times o(x^m) = o(x^{n+m})$.*
4. *Produit par une constante réelle $k \in \mathbb{R}$: $k \times o(x^n) = o(x^n)$*
5. *Produit par des puissances de x : $x^n \times o(x^m) = o(x^{n+m})$*

Démonstration. [VIDEO] `https://youtu.be/YaBH2MBWWrM`
Pour la preuve on revient à chaque fois à la définition, et le plus souvent possible on utilise la remarque avec la limite du quotient.

1. *Si* $n < m$ *alors* $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ *avec* $m - n >$ *donc ça tend vers* 0 *en zéro, ce qui donne bien* $x^m = o(x^n)$.
2. *Soient* f *et* g *deux fonctions quelconques telles que* $f = o(x^n)$ *et* $g = o(x^m)$ *avec* $n \leq m$. *Alors on sait que* $\frac{f}{x^n} \to 0$ *et* $\frac{g}{x^m} \to 0$. *Pour montrer le résultat, on calcule la limite de* $(f+g)(x)$ *divisé par* x^n :
$$\frac{(f+g)(x)}{x^n} = \frac{f(x)}{x^n} + \frac{g(x)}{x^n} = \frac{f(x)}{x^n} + \frac{g(x)}{x^m}\frac{x^m}{x^n}$$
Et là on peut conclure : $\frac{f(x)}{x^n} \to 0$, $\frac{g(x)}{x^m} \to 0$ *et* $\frac{x^m}{x^n} \leq 1$ *donc* $\frac{(f+g)(x)}{x^n} \to 0$ *ce qui donne le résultat.*
3. *De la même manière, on se donne* f *et* g *avec* $f = o(x^n)$ *et* $g = o(x^m)$. *Alors*
$$\frac{(fg)(x)}{x^{n+m}} = \frac{f(x)}{x^n}\frac{g(x)}{x^m}$$
tend bien vers 0 en 0.
4. *Les deux derniers items sont assez similaires au précédent et sont laissés en exercice au lecteur.*

Exemples. *On illustre chaque propriété :*

1. $x = o(1)$; *pour tout* $k > 0$ $x^k = o(1)$; $x^2 = o(x)$; *pour tout* $k > 1$ $x^k = o(x)$; $x^3 = o(x^2)$; *etc.*
2. $o(1) + o(x^2) = o(1)$; $o(x) + o(x^3) = o(x)$; $o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$; *etc.*
3. $o(x^2)o(x) = o(x^3)$; $o(x^2)o(x^2) = o(x^4)$; $o(x)o(x^n) = o(x^{n+1})$; *etc.*
4. $3o(x) = o(x)$; $-2o(x^2) = o(x^2)$; *etc.*
5. $xo(x) = o(x^2)$; $x^2o(x^3) = o(x^5)$; $xo(x^n) = o(x^{n+1})$; $x^n o(x) = o(x^{n+1})$; *etc.*

3.2 Corollaires : opérations sur les DL

Les propriétés de manip des o permettent très facilement de démontrer les résultats suivants. Dans toute la suite, on se donne f et g deux fonctions admettant des DL à l'ordre n et m respectivement.

3.2.1 Somme

Proposition. *Alors* $f + g$ *admet un DL à l'ordre* $\min(n, m)$ *obtenu en ajoutant les DL de* f *et de* g.

Exemples [VIDEO]. *https://youtu.be/5kGyLlkgrc4*

1. $f(x) = 1+2x-x^3+o(x^3)$, $g(x) = 2-3x+x^2+o(x^2)$, *alors* $(f+g)(x) = 3-x+x^2+o(x^2)$
2. $f(x) = 1+x+x^2+x^3+2x^4+o(x^5)$, $g(x) = -1-x-x^2+o(x^2)$, *alors* $(f+g)(x) = o(x^2)$

3.2.2 Produit

Proposition. *Alors* fg *admet un DL à l'ordre au moins* $\min(n, m)$.

Remarque. *L'ordre peut parfois être supérieur à ce minimum, lorsque les premiers termes des DL sont nuls (voir les exemples). Pour trouver quel est l'ordre, il est recommandé de faire le produit au brouillon et de repérer quel sera le petit o qui va rester (cf vidéo).*

Exemples [VIDEO]. *https://youtu.be/1McGiI9HyPA*

1. $f(x) = 1+2x-x^3+o(x^3)$, $g(x) = 2-3x+x^2+o(x^2)$, *alors* $(fg)(x) = 2+x-5x^2+o(x^2)$
2. $f(x) = x + 2x^2 - x^3 + o(x^3)$, $g(x) = 2 - 3x + x^2 + o(x^2)$, *alors* $(fg)(x) = 2x + x^2 - 7x^3 + o(x^3)$

3.2.3 Composition

Proposition. *Si* f *admet un DL à l'ordre* n *en* x_0*, si le terme constant de ce DL vaut* a_0 *et si* g *admet un DL à l'ordre* n *en* a_0*, alors* $g \circ f$ *admet un DL à l'ordre* n *en* x_0 *obtenu en développant la composée des DL de* f *et* g.

Exemples [VIDEO].

1. *https://youtu.be/TrtKrXdFF_I*
   DL de $\exp(\sin(x))$ *à l'ordre 4 en 0 :* $g(x) = \exp(x)$, $f(x) = \sin(x)$. *Alors* $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^4)$, *de terme constant 0. ensuite :*
   $$\exp(X) = 1 + X + x^2/2 + X^3/6 + X^4/24 + o(X^4)$$
   on remplace X *par*
   $$X = x - x^3/6 + o(x^4)$$
   pour obtenir
   $$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= 1 + (x - x^3/6 + o(x^4)) + (x - x^3/6 + o(x^4))^2 \\ &\quad +(x - x^3/6 + o(x^4))^3/6 + (x - x^3/6 + o(x^4))^4/24 + o(x^4)\end{aligned}$$
   on développe en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 4 et on obtient
   $$\exp(\sin(x)) = 1 + x + x^2/2 - x^4/8 + o(x^4)$$
2. *https://youtu.be/BUqcDLvQLtI*
   DL de $\exp(\cos(x))$ *à l'ordre 4 en 0 :* $\cos(x) = 1-x^2/2+x^4/24+o(x^4)$ *terme constant 1, et autour de 1 on a* $\exp(1 + h) = \exp(1). \exp(h)$ *donc on se ramène au DL en zéro avec le nombre* $\exp(1)$ *en facteur devant :*
   $$\exp(\cos(x)) = \exp(1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) = \exp(1). \exp(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))$$
   on fait le DL comme précédemment, en utilisant le DL de $\exp(X)$ *et en posant* $X = -x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$ *:*
   $$\begin{aligned}\exp(\cos(x)) &= \exp(1). \exp(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) \\ &= \exp(1)(1 + (-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) \\ &\quad +(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))^2/2)\end{aligned}$$

On peut remarquer ici que comme le premier terme qui reste du cosinus dans X est en x^2, quand on met ça à la puissance 3 ça fera x^6 et ça dépasse l'ordre 4, on peut donc s'arrêter à la puissance 2 dans le DL d'exponentielle. On continue donc le calcul :

$$\exp(\cos(x)) = \exp(1)(1 + -x^2/2 + x^4/24 + o(x^4) + x^4/8)$$

on trouve finalement

$$\exp(\cos(x)) = \exp(1)(1 - x^2/2 + x^4/6 + o(x^4)) = e - x^2e/2 + x^4e/6 + o(x^4)$$

3.2.4 Inverse

C'est un cas particulier de composition, en utilisant la fonction inverse à la place de la fonction $g(x)$.

Proposition. *On suppose que $f(x_0) \neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ admet un DL en x_0 à l'ordre n. La partie régulière du DL (le polynôme) peut s'obtenir par composition grâce au DL de la fonction $\frac{1}{1+u}$.*

Exemple [VIDEO]. ***https://youtu.be/l9yWM7AurgM***
DL à l'ordre 4 en 0 de $\frac{1}{\cos(x)}$.

$$\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$$

Dans la suite on posera $u = -x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$ et on utilise le DL de $\frac{1}{1+u}$:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$$

Comme précédemment, on voit que u^3 ne contient que des termes de degré strictement plus grand que 4, donc on peut s'arrêter à u^2 dans le DL. Finalement on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(x)} &= 1 - (-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) + (-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))^2 \\ &= 1 + x^2/2 - x^4/24 + x^4/4 + o(x^4) \\ &= 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4) \end{aligned}$$

3.2.5 Intégration

Proposition. *Si f est continue et admet un DL au voisinage de x_0 à l'ordre n et si F est une primitive de f, alors F admet un DL en x_0 à l'ordre $n+1$, obtenu en intégrant celui de f.*

Remarque. *Ce résultat nécessite une propriété supplémentaire des petits o, à savoir que l'intégration d'un petit o donne un petit o de degré un de plus. On admettra ce résultat ici.*

Exemples [VIDEO]. ***https://youtu.be/1bsN9CTvJOY***

1. *Le premier exemple fait partie des DL à savoir par coeur :*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

obtenu en intégrant entre 0 et x le DL de sa dérivée :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + o(t^n)$$

3.3 Illustration : le DL de tangente

A titre d'exemples et d'entrainement, on vous propose de calculer le DL de la fonction tangente de plusieurs manières différentes.

Le résultat obtenu est le suivant :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Comme la fonction tangente est impaire, on sait que le terme de degré 6 est nul, son DL à l'ordre 6 est donc identique :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

Les paragraphes suivants donnent juste des indications sans fournir tous les détails. Pour les détails on pourra se référer aux vidéos en ligne sur la playlist de ce chapitre `http://bit.ly/taylor-dl`.

3.3.1 Quotient de DL : inverse puis produit

[VIDEO] `https://youtu.be/Vv59Z2rFdZM`

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

On écrit les DL de sin et cos à l'ordre 5 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

Ensuite on calcule le DL de $\frac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 5, comme cela a été fait dans un exemple précédent (voir aussi ici `https://youtu.be/l9yWM7AurgM`) :

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^5)$$

et on multiplie les deux DL en ne gardant que les termes d'ordre inférieurs ou égal à 5 :

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

3.3.2 Avec des formules de trigo pour l'angle double

[VIDEO] `https://youtu.be/U4sfi9bQR_s`

$$\tan(x) = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$$

Là aussi il s'agit d'un quotient. Par contre il y a une petite difficulté supplémentaire : si on part avec des DL à l'ordre 5 au début :

$$1-\cos(2x) = 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^5) .$$

En faisant le quotient on voit qu'on peut simplifier par x en haut et en bas. Par contre, attention, quand on fait cela ça simplifie aussi un x dans le petit o qui devient donc $o(x^4)$ au lieu de $o(x^5)$:

$$\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)}{2 - \frac{4x^2}{3} + \frac{4x^4}{15} + o(x^4)} .$$

Pour que ça marche bien, il faut donc démarrer avec des DL à l'ordre 6 :

$$1-\cos(2x) = 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} + o(x^6) \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^6) .$$

Et là après simplification par x on est bien à l'ordre 5 :

$$\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{45} + o(x^5)}{1 - \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^5)} .$$

Comme précédemment, on calcule donc à part l'inverse :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\left(\frac{2x^2}{3} - \frac{2x^4}{15} + o(x^5)\right)} &= 1 + \left(\frac{2x^2}{3} - \frac{2x^4}{15}\right) + \left(\frac{2x^2}{3}\right)^2 + o(x^5) \\
&= 1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{14x^4}{45} + o(x^5) ,
\end{aligned}$$

puis on fait le produit :

$$\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{45} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{14x^4}{45} + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) .$$

3.3.3 Avec la formule liant $\tan^2$ et $\cos^2$

[VIDEO] `https://youtu.be/QswKV7Sm1mA`

$$\tan^2(x) = -1 + \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Pour ce cas là on se trouve face au même écueil qu'au précédent, à savoir qu'on perd 1 pour l'ordre, dans le cours des calculs. Il nous faut donc partir à l'ordre 6 au départ. On indique ici simplement les étapes du calcul :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) ,$$

$$\cos^2(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + o(x^6) \ ,$$
$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6) \ ,$$
$$-1 + \frac{1}{\cos^2(x)} = x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6) \ ,$$

$$\begin{aligned}\sqrt{-1 + \frac{1}{\cos^2(x)}} &= \sqrt{x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6)} \\ &= x\sqrt{1 + \left(\frac{2x^2}{3} + \frac{17x^4}{45} + o(x^4)\right)} \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \ .\end{aligned}$$

Attention ici : la transformation $\sqrt{x^2}$ en x n'est pas automatique : on trouve normalement $|x|$, mais il se trouve qu'ici ça marche aussi pour $x < 0$, car la fonction tan est impaire, ce qui permet d'avoir cette formule.

3.3.4 Avec la formule pour la dérivée impliquant $\cos$

[VIDEO] https://youtu.be/cuB8yIaVolQ

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

On va écrire le DL de $1/\cos^2$ puis intégrer, donc on peut démarrer à l'ordre 4 (l'intégration nous fera gagner un ordre), même si ici techniquement ça ne change rien pour le cosinus :

$$\cos^2(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \ .$$

Comme précédemment on considère que c'est $\frac{1}{1-u}$, avec $u = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) \ .$$

On intègre le DL, en utilisant le fait que le terme constant est nul car $\tan(0) = 0$:

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \ .$$

3.3.5 Avec la formule de la dérivée impliquant $\tan^2$

[VIDEO] https://youtu.be/XjhIO3ub_GE

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

On peut voir ça comme une équation dont l'inconnue est le développement limité cherché (ou plutôt ses coefficients). Comme la fonction tangente est impaire, on peut montrer que les coefficients de degré pair sont nuls, donc le DL cherché est de la forme $a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)$, où a, b et c sont des réels inconnus. On calcule d'abord le terme de droite :

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \big(\,a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)\,\big)^2 = 1 + a\,x^2 + 2ab\,x^4 + o(x^4)\ .$$

Le terme de gauche quant à lui vaut

$$\tan'(x) = (a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5))' = a + 3b\,x^2 + 5c\,x^4 + o(x^4)$$

On identifie :

$$\begin{cases} a &= 1 \\ 3b &= a \\ 5c &= 2ab\ . \end{cases}$$

Et on trouve $a = 1$, $b = 1/3$ et $c = 2/15$.

3.3.6 Avec la dérivée de $\ln$ de $\cos$

[VIDEO] `https://youtu.be/g7rGiFc-C_Q`

$$\tan(x) = -\big(\ln(\cos)\big)'(x)$$

Comme à la fin on dérivera la fonction ln(cos), on a besoin de démarrer à l'ordre 6. On va faire une composée de DL, en écrivant le DL de cos, celui de $\ln(1+u)$ et en définissant u :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \quad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

Ici l'ordre 3 suffit pour le DL du ln car on va poser

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

de sorte que $o(u^3) = o(x^6)$. Les calculs donnent :

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x)) &= \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)\right) \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^6) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)\ . \end{aligned}$$

L'opposé de la dérivée donne bien :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\ .$$

3.3.7 Avec la réciproque $\arctan(x)$

On connait la formule

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

Nous connaissons le développement de arctan d'ordre 5 (car sa dérivée est $\frac{1}{1+x^2}$) :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \ .$$

Soit $\tan(x) = a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)$ le développement cherché. Alors :

$$\begin{aligned} \tan(\arctan(x)) &= a\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) + b\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + c\big(\,x\,\big)^5 + o(x^5) \\ &= a\,x + (-a/3 + b)\,x^3 + (a/5 - b + c)\,x^5 + o(x^5) \ . \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on doit avoir :

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ -a/3 + b & = & 0 \\ a/5 - b + c & = & 0 \ . \end{cases}$$

On obtient encore : $a = 1$, $b = 1/3$ et $c = 2/15$.

4 – Utilisation des développements limités

4.1 Calcul de certaines limites

Pour calculer la limite, on n'a besoin a priori que du DL à l'ordre 0, en $o(1)$. Face à une forme indéterminée, en général l'ordre 0 ne suffit pas, car il y a des simplifications qui se font, donc il est souvent nécessaire d'aller plus loin (ordre 3 ou parfois plus). Le choix du "bon" ordre pour trouver la limite (pas trop grand pour éviter les lourds calculs et assez grand pour que la limite soit déterminée) n'est pas évident et s'acquiert par la pratique, après essais et erreurs.

Exemple [VIDEO]. ***https://youtu.be/qhzUjYAj8RE***
On propose de calculer à l'aide des DL la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3}$$

On peut déjà remarquer que c'est bien une forme indéterminée en zéro, puisque si on remplace x par 0 on trouve $0/0$. Comme il y a une division par x^3, ça semble une bonne idée d'écrire les DL à l'ordre 3 pour commencer.

$$\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3), \qquad \tan(x) = x + x^3/3 + o(x^3)$$

On remplace tout ça dans la fraction :

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = \frac{x - x^3/6 - (x + x^3/3) + o(x^3)}{x^3}$$

Les x s'en vont, pour les x^3 il reste $-1/6 - 1/3 = -1/2$, on trouve donc

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = \frac{-x^3/2 + o(x^3)}{x^3} = \frac{-x^3/2}{x^3} + \frac{o(x^3)}{x^3}$$

Pour simplifier les petits o on utilise leurs propriétés pour voir que $o(x^3)/x^3 = o(1)$, ce qui donne :

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

La limite vaut donc $-1/2$.

4.2 Etude locale d'une courbe

On étudie la courbe de la fonction f, autrement dit la courbe d'équation $y = f(x)$. On se place au voisinage de x_0, on suppose que f admet un DL à l'ordre 2 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0^2))$$

On peut déjà remarquer que $a_0 = f(x_0)$ et que l'équation de la tangente est donnée par le DL à l'ordre 1 : $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ (et on a bien sûr $a_1 = f'(x_0)$).

On va voir que les termes suivants du DL permettent de nous renseigner sur la position locale de la courbe par rapport à sa tangente. Pour cela on soustrait le DL de f et l'équation de la tangente et on étudie le signe : s'il est positif, la courbe est au-dessus, s'il est négatif elle est au-dessous. On va distinguer deux cas

Cas 1 : $a_2 \neq 0$. Alors on peut écrire

$$f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) = a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0^2)) = (x - x_0)^2(a_2 + o(1))$$

autour de x_0, $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))$ est donc du signe de a_2 : si $a_2 > 0$ la courbe est au-dessus de sa tangente ; sinon elle est au-dessous.

Cas 2 : $a_2 = 0$. Alors on n'a pas assez d'info pour conclure, car la soustraction entre f et l'équation de la tangent donne simplement $o((x - x_0)^2)$ qui peut être positif ou négatif. Il nous faut donc pousser le DL plus loin. On suppose donc qu'on peut écrire le DL à l'ordre 3, avec $a_3 \neq 0$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_3(x - x_0)^3 + o((x - x_0^3))$$

Dans ce cas si on soustrait la tangente, on trouve

$$f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) = a_3(x - x_0)^3 + o((x - x_0^3)) = (x - x_0)^3(a_3 + o(1))$$

Cette fois, le signe est celui de $a_3(x - x_0)$, il change donc en x_0 : la courbe "traverse" la tangente en x_0. Si $a_3 > 0$ la courbe est au-dessus à droite de x_0 et au-dessous à gauche, et si $a_3 < 0$ c'est l'inverse.

Si jamais $a_3 = 0$ aussi, alors on pousse le DL jusqu'à trouver un coefficient non nul. Si le coeff est d'ordre pair, on aura le même genre de raisonnement qu'au cas 1 ; s'il est d'ordre impair, ça sera comme le cas 2.

Exemples [VIDEO]. ***https://youtu.be/0iogZ7dvozc***
On admet que l'on a trouvé les DL des quatre fonctions suivantes :

1. $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 + o(x^2)$
2. $g(x) = 2 - x - x^3 + o(x^3)$
3. $h(x) = 3 + x - x^4 + o(x^4)$
4. $j(x) = 4 + 2x + x^5 + o(x^5)$

On cherche d'abord l'équation des tangentes en zéro pour chaque fonction, il s'agit du DL à l'ordre 1 :

1. *pour* f : $y_f = 1 - 2x$
2. *pour* g : $y_g = 2 - x$
3. *pour* h : $y_h = 3 + x$
4. *pour* j : $y_j = 4 + 2x$

Ensuite on soustrait ça aux fonctions et on étudie le signe pour avoir la position par rapport à la tangente en zéro :

1. $f(x) - y_y = 3x^2 + o(x^2)$, *toujours positif, la courbe est au-dessus*
2. $g(x) - y_g = -x^3 + o(x^3)$, *négatif à droite de zéro : la courbe est au-dessous ; à gauche de zéro c'est l'inverse, positif, donc la courbe est au-dessus*
3. $h(x) - y_h = -x^4 + o(x^4)$, *toujours négatif, la courbe est au-dessous de sa tangente*
4. $j(x) - y_j = x^5 + o(x^5)$, *change de signe, la courbe est au-dessus de la tangente à droite de zéro et au-dessous à gauche.*

4.3 Recherche d'asymptote

Si au voisinage de l'infini on a

$$f(x) = a_0x + a_1 + \frac{a_2}{x} + o(\frac{1}{x})$$

alors f admet une asymptote d'équation $y = a_0x + a_1$. Si $a_2 \neq 0$, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de a_2.

Exemple [VIDEO]. ***https://youtu.be/V5hmHKabL2c***

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$$

Pour faire un développement asymptotique, on met en facteur le terme dominant, ici x^2 *:*

$$f(x) = \sqrt{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2})} = x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

car $\sqrt{x^2} = |x| = x$ *au voisinage de* $+\infty$.

Quand x *tend vers l'infini, les quotients en* x *et* x^2 *tendent vers 0, on pourra donc se ramener à un DL si on pose* $h = \frac{1}{x}$. *On remplace donc* $\frac{1}{x}$ *par* h *et on calcule le DL :*

$$\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}} = \sqrt{1 - 3h + 3h^2}$$

A la fin on voudra un développement de f qui se termine avec $o(\frac{1}{x})$, et comme on aura une multiplication par le x qui est sorti de la racine, il nous faut un DL à l'ordre 2 en h. On calcule :

$$\sqrt{1-3h+3h^2} = (1-3h+3h^2)^{1/2} = (1+u)^{1/2}, \text{ avec } u = -3h+3h^2$$

On rappelle le DL de $(1+u)^{1/2}$:

$$(1+u)^{1/2} = 1 + (1/2)u + (1/2)(-1/2)u^{2/2} + o(u^2)$$

On remplace :

$$\sqrt{1-3h+3h^2} = 1 + (1/2)(-3h+3h^2) - (1/8)(-3h+3h^2)^2 + o(h^2)$$

$$\sqrt{1-3h+3h^2} = 1-(3/2)h+(3/2)h^2-(9/8)h^2+o(h^2) = 1-(3/2)h+(3/8)h^2+o(h^2)$$

On revient à f :

$$f(x) = x(1 - \frac{3}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = x - \frac{3}{2} + \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x})$$

L'équation de l'asymptote est donc $y = x - 3/2$, et si on soustrait f et cette équation on obtient $\frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x})$ qui est toujours positif, donc f est au-dessus de son asymptote.