

Groupes et géométrie, feuille 1

N. Perrin

À rendre le jeudi 28.01.2020

Correction le mardi 04.02.2020

Exercice 1 ($2 \times 10 = 20$ Points) Groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Donner tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Donner l'ordre d'un élément $[d] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 2 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soit (G, \star) un groupe et $H \subset G$ un sous-ensemble stable par \star c'est-à-dire tel que $h \star h' \in H$ pour tout $(h, h') \in H^2$.

1. Montrer que si l'ensemble H est fini, alors H est un sous-groupe de G .
2. Donner un exemple qui montre que si H est infini, le sous-ensemble H peut ne pas être un sous-groupe de G .

Exercice 3 (20 Points) Soit G un groupe et H et K deux sous-groupes de G . Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 4 ($2 \times 10 = 20$ Points) Groupe de Klein.

1. Montrer qu'il existe une unique structure de groupe sur un ensemble $K = \{e, a, b, c\}$ de cardinal quatre tel que e soit le neutre et tel que chaque élément x soit involutif c'est-à-dire tel que $x^2 = e$. Un tel groupe est appelé **groupe de Klein**.

2. Dire lesquels des groupes suivants sont des groupes de Klein : $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou le groupe (D_2, \circ) des isométries du plan conservant un rectangle non carré.

Exercice 5 (20 Points) Soit G un groupe fini d'ordre pair et de neutre e . Montrer qu'il existe un élément x d'ordre 2 (c'est-à-dire $x^2 = e$ et $x \neq e$).