
MA202N – Contenu du cours

1	Formules de Taylor et développements limités	2
1	Preliminaires	3
1.1	But	3
1.2	Notations $o(x)$	3
2	Développements limités et formules de Taylor	4
2.1	Généralités	4
2.2	Formule de Taylor avec reste intégral	5

1

Formules de Taylor et développements limités

Plan du chapitre

1	Préliminaires	3
1.1	But	3
1.2	Notations $o(x)$	3
2	Développements limités et formules de Taylor	4
2.1	Généralités	4
2.1.1	Unicité, parité	5
2.2	Formule de Taylor avec reste intégral	5

1 – Préliminaires

1.1 But

L'intérêt des formules de Taylor (parfois abrégées FT) et des développements limités (DL) est multiple. Le principe consiste à approcher des fonctions "compliquées" par des polynômes, en écrivant

$$f(x) = P(x) + \text{erreur}.$$

Cela permet par exemple de :

- simplifier certains calculs
- trouver des limites, lever des formes indéterminées
- connaître le comportement local de certaines fonctions
- etc.

1.2 Notations $o(x)$

Définition. Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a . On considérera aussi le cas où l'on se trouve en $+\infty$ ou $-\infty$, et dans ce cas on demande que I ait pour borne $\pm\infty$. On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g en x_0 (avec x_0 valant a ou $+\infty$ ou $-\infty$) s'il existe :

- un voisinage V de x_0 (si $x_0 = a$ on aura V du type $V =]a - \eta; a + \eta[$ avec $\eta > 0$, si $x_0 = -\infty$ on aura $V =] - \infty; M[$ avec $M \in \mathbb{R}$ et si $x_0 = +\infty$ on aura $V =]M; +\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$)
- une fonction ε définie sur V et telle que :
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$
 - $f(x) = \varepsilon(x)g(x), \forall x \in V$

On note alors $f(x) = o(g(x))$, qui se lit " $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ " (au voisinage de x_0).

Remarque. Avec les mêmes notations, on suppose que la fonction g ne s'annule pas pour $x \neq x_0$. Alors f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si et seulement si le quotient f/g tend vers 0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemple. — $\ln(x) = o(\frac{1}{x})$ au voisinage de 0

- $x^2 = o(e^x)$ au voisinage de $+\infty$
- $\sqrt{x} = o(1)$ au voisinage de 0.

2 – Développements limités et formules de Taylor

2.1 Généralités

Définition. Soient I un intervalle ouvert, a un point de I et n un entier. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a lorsqu'il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que le reste $f(x) - P_n(x)$ soit négligeable devant $(x - a)^n$.

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = o((x - a)^n) .$$

Le polynôme P_n s'écrit par exemple :

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \dots + b_n(x - a)^n$$

où les b_i sont des coefficients réels. On écrira ainsi :

$$f(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \dots + b_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

Remarque. On peut noter que l'équation de la tangente en a , bien connue depuis le lycée, est justement le développement limité à l'ordre 1. Dans ce cas on a même une expression plus précise des coefficients b_0 et b_1 :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

On verra que les formules de Taylor et les développements limités permettent de généraliser cette formule aux ordres supérieurs.

Nous nous ramènerons toujours à des développements limités au voisinage de 0, grâce à l'observation suivante.

Proposition. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de I et n un entier. Soit f une fonction définie sur I . Soit g la fonction qui à h associe $g(h) = f(a + h)$. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en a , si et seulement si g admet un développement limité d'ordre n en 0.

$$f(x) = P_n(x) + o((x - a)^n) \iff g(h) = f(a + h) = P_n(a + h) + o(h^n) .$$

Remarque. Si l'on souhaite faire un développement limité au voisinage de l'infini (appelé parfois développement asymptotique), on cherchera à écrire f sous la forme

$$f(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

On se ramènera là aussi en zéro en posant $h = \frac{1}{x}$.

2.1.1 Unicité, parité

Un développement limité, s'il existe, est unique au sens suivant.

Proposition. Soient I un intervalle ouvert contenant 0, et n un entier. Soit f une fonction définie sur I . Supposons qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n de degré au plus n tels que au voisinage de 0 :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) = Q_n(x) + o(x^n) .$$

Alors $P_n = Q_n$.

Proposition. Grâce aux formules de Taylor qui suivent, on démontre que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ (n fois dérivable, et dérivée n -ème continue) au voisinage de x_0 , alors f admet un développement limité (DL) à l'ordre n .

Grâce à l'unicité du DL, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition. Soit f une fonction admettant un DL en zéro. On a les résultats suivants :

- Si f est paire, alors son développement limité ne comporte que les termes de degré pair :

$$f(x) = b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 \dots + b_{2n}x^{2n} + o(x^{2n})$$

- Si f est impaire, alors son développement limité ne comporte que les termes de degré impair :

$$f(x) = b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 \dots + b_{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Démonstration. La preuve est laissée en exercice. Elle repose sur les définitions de la parité ($f(-x) = f(x)$) et de l'imparité ($f(-x) = -f(x)$), combinées avec l'unicité du développement limité.

2.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème. Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et a, x deux réels de I , alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &\quad + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt . \end{aligned}$$

Démonstration. Par récurrence.

Pour $n = 0$, la formule est le théorème fondamental de l'Analyse :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt .$$

Supposons la formule vraie au rang $n-1$, avec $n \geq 1$. Pour la prouver au rang n , posons :

$$I_n = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt ,$$

et intégrons par parties en posant

$$u'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad u(x) = -\frac{(x-t)^n}{n!}$$

$$v(t) = f^{(n)}(t), \quad v'(t) = f^{(n+1)}(t)$$

ce qui donne

$$I_n = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$I_n = -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

ce qui permet d'obtenir la formule au rang n et qui conclut la preuve.