Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines

MA202

Feuille de TD 1 : Formules de Taylor et développements limités

Formules de Taylor

Exercice 1.
Retrouver les formules de développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions usuelles du cours (exp, sin, cos, $(1+x)^\alpha$) en utilisant la formule de Taylor-Young.

Exercice 2.

1. En utilisant une formule de Taylor à l'ordre 2, donner une valeur approchée de $\cos(0,01)$ et de $\cos(0,05)$. Comparer avec les valeurs proposées par votre calculatrice (ces dernières sont-elles exactes ?)
2. Même question avec $\sqrt{4,01}$, mais en utilisant en une formule de Taylor à l'ordre 1 seulement.

Exercice 3.
On considère la fonction polynomiale $P(x) = 3x^5 + x^4 - 2x^2 + 3x + 1$. Quel est le développement limité de P, au voisinage de 0, à l'ordre 1 ? (Penser à la définition du cours !) Expliciter le reste.

Puis faire de même aux ordres 2, 3, 4, 5 et $n, n \geq 6$.

Exercice 4.

On considère la fonction réelle f donnée par $f(x) = x^2 + (x+1)\ln x$.

1. Ecrire les différentes formules de Taylor pour f au voisinage de 1, à l'ordre 1 puis à l'ordre 2.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1. Quelle est la position relative entre la courbe et sa tangente au point d'abscisse 1 ?
   Donner l'équation de la « meilleure approximation parabolique » de f au voisinage de 1.
3. Sur une calculatrice ou un ordinateur, représenter sur un même graphique la courbe de f, puis la tangente et la parabole, successivement sur un « petit intervalle autour de 1 » (par exemple $]0,8;1,2[$) puis sur un « grand intervalle autour de 1 ».
   Représenter enfin la parabole d'équation $y = 2x^2 - 1$ (même valeur en 1, ainsi que pour la dérivée première mais pas pour la seconde). Pensez-vous que $\frac{f(x)-(2x^2-1)}{(x-1)^2}$ ait la limite 0 en 1 ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

Exercice 6. Inégalités de Kolmogorov
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées, et l'on pose :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

(M_0 et M_2 sont donc des nombres réels tels que, pour tout x réel, on a $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$). Le but de cet exercice est de prouver que f' est bornée, et de majorer $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ en fonction de M_0 et M_2. Soit $x \in \mathbb{R}$, et $h > 0$.

1. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f entre x et $x+h$ à l'ordre 2.

2. En déduire l'inégalité :
$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
En particulier, si on choisit $h = 1$, on obtient $|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$, ce qui prouve que f' est bornée par M_1, avec $M_1 \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$. On se propose de trouver une meilleure majoration :
3. Etudier la fonction $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Calculs de développements limités

Petit conseil : toujours réfléchir à la démarche à suivre avant de se lancer dans des calculs. C'est une banalité, qui a vraiment son importance dans ce contexte : elle vous permettra d'économiser des calculs inutiles.

Exercice 7.

Déterminer (en réfléchissant à la démarche à suivre avant de se lancer dans des calculs) les développements limités au voisinage de 0, sauf mention contraire, aux ordres indiqués, des fonctions suivantes.

1. (a) $a_1 : x \longmapsto x^5 - x^3 + 2x^2 + x + \frac{2}{1-x}$ à l'ordre 4.
   (b) $a_2 : x \longmapsto \ln(1 + x) + \sin(x)$ à l'ordre 3, puis à l'ordre 4.
   (c) $a_3 = \text{sh}$ à l'ordre 3, à l'ordre 4, à l'ordre 5, puis à l'ordre $2n$ quelconque.
2. $b_1 : x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ à l'ordre 6. Peut-on faire de même pour $b_2 : x \longmapsto \frac{\sin x}{x^2}$?
3. (a) $c_1 : x \longmapsto \frac{\cos x}{1-x}$ à l'ordre 6.
   (b) $c_2 : x \longmapsto e^x\sqrt{1 + x}$ à l'ordre 3.
   (c) $c_3 : x \longmapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ à l'ordre 4 puis à l'ordre 5.
4. (a) $d_1 : x \longmapsto \frac{\cos 2x}{1-2x}$ à l'ordre 6 (regarder le développement limité de c_1).
   (b) $d_2 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 7.
   (c) $d_3 : x \longmapsto \ln(\cos(x))$ à l'ordre 3.
   (d) $d_4 : x \longmapsto \frac{1}{1-\ln(1+x)}$ à l'ordre 3.
   (e) $d_5 : x \longmapsto \exp(\sin(x))$ à l'ordre 4.
5. Déduire le développement de $e_1 : x \longmapsto \arcsin x$ à l'ordre 6 de celui de d_2.
6. (a) $f_1 : x \longmapsto \frac{1}{2+x}$ en 0 à l'ordre 4. En déduire le développement limité de $f_2 : x \longmapsto \frac{1}{x}$ au voisinage de 2 à l'ordre 4.
   (b) $f_3 : x \longmapsto \ln(x + 3)$ en 0 à l'ordre 4. En déduire le développement limité de $f_4 : x \longmapsto \ln x$ au voisinage de 3 à l'ordre 4.
7. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de
$$f(x) = \cos(x)e^x + x^4 + \frac{1}{1 + \ln(1 + x)}.$$

Applications des développements limités

Exercice 8. questions de limites

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elles ont une limite en 0. Si oui, la calculer (si possible).

1. $m_1 : x \longmapsto \frac{\sin x - x}{x^2}$, puis $m_2 : x \longmapsto \frac{\sin x - x}{x^3}$.
2. $m_2 : x \longmapsto \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

3. $m_3 : x \longmapsto (e^x - x)^{\frac{1}{x^2}}$ (sans oublier de se poser la question de la définition de cette fonction au voisinage de 0).

Exercice 9. Position relative courbe/tangente

1. Déterminer la position relative de la courbe de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ et de sa tangente au voisinage des points d'abscisse 0 puis 1. On pourra envisager deux méthodes différentes, et les comparer.
2. Déterminer la position relative de la courbe de la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{1+3x+3x^2}$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 10. Branches infinies

1. Etude de l'allure de la courbe de la fonction $p : x \longmapsto x\sqrt{1+x^2}$ au voisinage de $+\infty$: on cherchera/trouvera une parabole asymptote à la courbe, on précisera la position relative de la courbe et de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

   À l'aide d'une machine, regarder les positions relatives de la courbe et de cette parabole asymptote sur les intervalles $[0, 1]$, $[0, 2]$, puis $[0, 10]$. Méditer.

   Que peut-on dire de la courbe au voisinage de $-\infty$?
2. Étudier de même l'allure de la courbe de la fonction $q : x \longmapsto \frac{x^2-5x+3}{x} e^{-\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Les deux exercices suivants sont tirés d'examens de MA202.

Exercice 11. (examen de mai 2013)
On conseille de bien détailler les calculs.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de
$$f(x) = \exp(2\sqrt{1+x} - 2) - \frac{x}{4}\sin(x).$$
2. En déduire une équation de la tangente T à la courbe représentative C de f au point d'abscisse 0. Déterminer alors la position relative au voisinage de 0 de T et C.

Exercice 12. (examen de mai 2011), les deux questions sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de
$$a(x) = (1 + x^2 + x^5)e^x + \frac{1}{2+\sin(x)}.$$
2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (x^2 + x)\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.
   (a) Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $\sqrt{1+h}$.
   (b) Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet une parabole asymptote au voisinage de $+\infty$, puis préciser la position relative de la courbe et de cette asymptote au voisinage de $+\infty$. On pourra utiliser la question (a) en posant $h = \frac{1}{x}$.

Exercice 13. Suite de solutions d'une équation et comportement asymptotique

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une solution unique notée x_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Ecrire une relation entre x_n et $\arctan(x_n)$.
3. Montrer que la suite $(x_n - n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis déterminer sa limite. En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
4. Facultatif (plus difficile).

(a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}?*$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^2}).$$

(b) En écrivant $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \epsilon_n$ et en utilisant le résultat de la question 2., en déduire que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$