Feuille 8,
Algèbre commutative

N. Perrin

À rendre le 26.03.2018
Correction le 03.04.2018

Exercice 1 ($6 \times 10 = 60$ Points) Soient A un anneau commutatif intègre, K son corps des fractions, et I, J deux sous-A-modules de K.

On note IJ l'ensemble des sommes finies $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ avec $x_i \in I$ et $y_i \in J$ pour tout i. C'est un sous-A-module de K. (Attention, I, J et IJ sont des sous-A-modules de K, on ne les suppose pas contenus dans A, c'est-à-dire que ce ne sont pas nécessairement des idéaux de A.

D'autre part, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit $S = A \setminus \mathfrak{p}$. On note $A_\mathfrak{p} = S^{-1}A$ et pour tout sous-A-module M de K, on note

$$M_\mathfrak{p} = \left\{ \frac{x}{s} \in K \mid x \in M,\ s \in S \right\}.$$

C'est le localisé de M en la partie multiplicative S. On ne demande pas de vérifier ce point, c'est-à-dire qu'on prend l'égalité ci-dessus comme définition de $M_\mathfrak{p}$. Alors, il est clair que $M_\mathfrak{p}$ est encore un sous-A-module (et même, un sous-$A_\mathfrak{p}$-module) de K. On obtient ainsi les A-modules $I_\mathfrak{p}$, $J_\mathfrak{p}$, $(IJ)_\mathfrak{p}$, etc.

1. Montrer que $(IJ)_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p} J_\mathfrak{p}$.

Désormais, on suppose que I est un idéal de A, non nul. On définit le sous-ensemble suivant de K :

$$(A : I) = \{y \in K \mid \forall x \in I, xy \in A\} = \{y \in K \mid Iy \subset A\}.$$

Si I est un idéal non nul de l'anneau $A_\mathfrak{p}$, on définit de façon analogue $(A_\mathfrak{p} : I) = \{y \in K \mid \forall x \in I, xy \in A_\mathfrak{p}\} = \{y \in K \mid Iy \subset A_\mathfrak{p}\}$.

2. Montrer que $(A : I)$ est un sous-A-module de K et que $I(A : I)$ est un idéal de A.

On dira que I est un **idéal inversible** si on a l'égalité $I(A : I) = A$.

3. Décrire $(A : I)$ lorsque I est principal. En déduire que si A est principal, tout idéal non nul de A est inversible.

4. On suppose que I est un idéal de A de type fini. Montrer dans ce cas que $(A : I)_\mathfrak{p} = (A_\mathfrak{p} : I_\mathfrak{p})$.

5. Soit L un idéal de A. Montrer que si $L_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}$ pour tout $\mathfrak{m}$ idéal maximal de A, alors $L = A$. (Indication : si $L \neq A$, il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $L \subset \mathfrak{m}$).

Désormais, on suppose que l'anneau A vérifie les trois conditions suivantes :

(a) A est intègre et tout idéal de A est de type fini ;

(b) tout idéal premier non nul de A est maximal ;

(c) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, l'anneau localisé $A_{\mathfrak{m}}$ est principal.

Un tel anneau s'appelle un anneau de Dedekind.

6. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que tout idéal non nul de A est inversible.

Exercice 2 ($2 \times 10 = 20$ points) Soit A le sous-anneau du corps $\mathbb{C}(X)$ formé des fractions rationnelles déefinies en 0, c'est-à-dire

$$A = \left\{ \frac{P}{Q} \;\middle|\; P, Q \in \mathbb{C}[X] \text{ et } Q(0) \neq 0 \right\}.$$

Soit N un sous-A-module de $\mathbb{C}(X)$ tel que $N \subsetneq \mathbb{C}(X)$.

1. Montrez que N est engendré par X^n pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

2. En déduire que le A-module $\mathbb{C}(X)$ ne possède pas de sous-module maximal.

Exercice 3 (20 Points) Soient A un anneau commutatif, soit $\mathfrak{m} \subset A$ un idéal maximal de A, et soit $S = \{a \in A \mid a \notin \mathfrak{m}\}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$A/\mathfrak{m}^n = S^{-1}(A/\mathfrak{m}^n).$$