Feuille 7,
Algèbre commutative

N. Perrin

À rendre le 19.03.2018
Correction le 27.03.2018

Exercice 1 ($2 \times 15 = 30$ points) Soit A un anneau et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A. Soient M et N deux A-modules.

1. Montrer l'implication ($f : M \to N$ isomorphisme) $\Rightarrow$ ($f \otimes \mathrm{Id} : M \otimes_A A/\mathfrak{m} \to N \otimes_A A/\mathfrak{m}$ isomorphisme).

2. Montrer l'implication ($A^m \simeq A^n \Rightarrow m = n$).

Exercice 2 ($7 \times 10 = 70$ Points) Soit A un anneau intègre et soit M un A-module. Un élément $m \in M$ est dit de **torsion** s'il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $am = 0$.

1. Montrer que l'ensemble $T(M)$ de tous les éléments de torsion de M est un sous-module. Ce sous-module s'appelle **sous-module de torsion**.

2. Montrer que $M/T(M)$ est sans torsion *i.e.* $T(M/T(M)) = 0$.

3. Soit $f : M \to N$ un morphisme. Montrer que $f(T(M)) \subset T(N)$.

4. Montrer que $M \mapsto T(M)$ est exact à gauche (*i.e.* si $0 \to M' \to M \to M''$ est une suite exacte, alors $0 \to T(M') \to T(M) \to T(M'')$ est exacte).

5. Donner un exemple de morphisme surjectif $f : M \to N$ tel que $f(T(M)) \subsetneq T(N)$.

6. Soit $S \subset A$ une partie multiplicative. Montrer que $T(S^{-1}M) = S^{-1}T(M)$.

7. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   a. $T(M) = 0$;
   b. $T(M_{\mathfrak{p}}) = 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A;
   c. $T(M_{\mathfrak{m}}) = 0$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A.