

Feuille 9, Algèbre commutative

N. Perrin

À rendre le 02.04.2018
Correction le 10.04.2018

Exercice 1 ($2 \times 5 + 10 = 20$ Points) Soit A un anneau. Montrer que

1. $(\mathfrak{n}(A) = 0) \Leftrightarrow (\mathfrak{n}(A_{\mathfrak{p}}) = 0 \text{ pour tout idéal premier } \mathfrak{p} \subset A)$.
2. $(A \text{ intègre}) \Rightarrow (A_{\mathfrak{p}} \text{ intègre pour tout idéal premier } \mathfrak{p} \subset A)$.
3. Montrer que pour $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, l'implication $(A \text{ intègre}) \Leftarrow (A_{\mathfrak{p}} \text{ intègre pour tout idéal premier } \mathfrak{p} \subset A)$ n'est pas vérifiée.

Exercice 2 ($2 \times 10 = 20$ Points) Donner tous les idéaux premiers des anneaux A suivants:

1. $A = \mathbb{k}[X]/(X^3 - 3X^2 + 2X)$.
2. $A = \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$

Exercice 3 ($6 \times 10 = 60$ Points) Soit A un anneau intègre et soit $K = \text{Frac}(A)$ son corps des fractions. L'anneau A , s'appelle **anneau de valuation discrète** si pour tout $x \in K \setminus \{0\}$, on a l'alternative $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$.

1. Soit $\mathbb{k}$ un corps.
 - 1.a. L'anneau $A = \mathbb{k}[X]$ est-il un anneau de valuation discrète ?
 - 1.b. Soit $\mathfrak{p} = (X) \subset A$. L'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est-il un anneau de valuation discrète ?
2. Soit A un anneau de valuation discrète et $K = \text{Frac}(A)$.
 - 2.a. Montrer que $\mathfrak{m} = A \setminus A^{\times}$ est un idéal et que l'anneau A est local.
 - 2.b. Soit B un sous-anneau de K tel que $A \subset B \subset K$. Montrer que B est aussi un anneau de valuation discrète.
 - 2.c. Montrer que A est intégralement clos (rappelons que ceci signifie que A est égal à sa clôture intégrale dans K).
3. L'anneau A est maintenant un anneau intègre mais pas *a priori* un anneau de valuation discrète. Soit $\bar{A}$ sa clôture intégrale dans K .

Soit B un anneau de valuation discrète tel que $A \subset B \subset K$. Montrer que $\bar{A} \subset B$.