Feuille 4,
Algèbre commutative

N. Perrin

À rendre le 19.02.2018
Correction le 20.02.2018

Exercice 1 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte.

1. Montrer l'implication : (M' et M'' sont de type fini) $\Rightarrow$ (M est de type fini).

2. Donner un exemple qui montre que la réciproque est fausse en général.

Exercice 2 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soit A un anneau et M un module de type fini. Soit $f : M \to A^n$ un morphisme surjectif.

1. Soit $(e_i)_{i\in[1,n]}$ la base canonique de A^n et soit $m_i \in M$ tel que $f(m_i) = e_i$ pour tout $i \in [1, n]$. Soit $N = Am_1 + \cdots + Am_n$. Montrer que $M \simeq N \oplus \ker f$.

2. Montrer que $\ker f$ est de type fini.

Exercice 3 ($30 + 10 = 40$ Points) Soit $0 \to M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ une suite exacte.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a. Il existe un sous-module $N \subset M$ tel que $M \simeq N \oplus u(M')$.
b. Il existe un morphisme $p : M \to M'$ tel que $p \circ u = \mathrm{Id}_{M'}$.
c. Il existe un morphisme $s : M'' \to M$ tel que $v \circ s = \mathrm{Id}_{M''}$.

2. Une suite exacte vérifiant l'une des propriétés équivalentes ci-dessus est dite **scindée**. Donner un exemple de suite exacte scindée et un exemple de suite exacte non scindée.

Exercice 4 (20 Points) Soit

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes. Montrer l'implication (f' et f'' isomorphismes) $\Rightarrow$ (f isomorphisme).