Feuille 3,
Algebre commutative

N. Perrin

À rendre le 12.02.2018,
Correction le 13.02.2018

Exercice 1 ($6 \times 5 = 30$ Points) Soit A un anneau et soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des idéaux. Montrer les propositions suivantes :

1. $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}}$.
2. $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$.
3. $\sqrt{\mathfrak{a}} = A \Leftrightarrow \mathfrak{a} = A$.
4. $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$
5. $\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}} = A \Rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$.
6. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier. Montrer que $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2 ($5 \times 5 = 25$ Points) Soit A un anneau et soient $\mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ des idéaux. Montrer les propositions suivantes :

1. $\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.
2. $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.
3. $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b})$
4. $(\cap_{i \in I} \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) = \cap_{i \in I} (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$.
5. $(\mathfrak{a} : \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \cap_{i \in I} (\mathfrak{a} : \mathfrak{a}_i)$.

Exercice 3 ($5 + 4 \times 10 = 45$ Points) Soit A un anneau. **Le spectre de** A est l'ensemble suivant :

$$\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ idéal premier}\}.$$

Pour $E \subset A$ on définit $V(E) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid E \subset \mathfrak{p}\}$.

1. Soit $E \subset A$ et $\mathfrak{a} = (E)$ l'idéal engendré par E. Montrer que $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

2. Montrer que la famille des sous-ensembles $V(E)$ pour tout $E \subset A$ forme les fermés d'une topologie (plus précisemment montrer les propositions suivantes $V(0) = \mathrm{Spec}(A)$, $V(1) = \emptyset$, $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ pour tous les idéaux $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ et

$$\bigcap_{i \in I} V(E_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right)$$

pour toutes les familles $(E_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de A).

Cette topologie s'appelle **la topologie de Zariski** de $\mathrm{Spec}(A)$. Lorsque l'on considère un élément de $\mathrm{Spec}(A)$ comme point de cet espace topologique nous écrirons x pour ce point. Ce point représente également un idéal que l'on notera $\mathfrak{p}_x$. Pour un sous-ensemble $Y \subset \mathrm{Spec}(A)$, on notera $\overline{Y}$ son adhérence.

Soient $x, y \in \mathrm{Spec}(A)$. Montrer que

3. $\{x\}$ est fermé $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{p}_x$ est maximal.
4. $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$.
5. $y \in \overline{\{x\}} \Leftrightarrow \mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_y$.