Feuille 2,
Algèbre commutative

N. Perrin

À rendre le 05.02.2018
Correction le 06.02.2018

Exercice 1 (20 Points) Soit $x \in A$ nilpotent et $y \in A$ inversible. Montrer que $x + y$ est inversible.

Exercice 2 ($20 + 2 \times 10 = 40$ Points) Soit A un anneau, on considère $A[X]$ l'anneau des polynomes à coefficients dans A. Soit

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in A[X].$$

Montrer que

1. P est inversible $\Leftrightarrow$ a_0 est inversible et a_i est nilpotent pour $i > 0$.
2. P est nilpotent $\Leftrightarrow$ a_i est nilpotent pour tout $i \geq 0$.
3. P est diviseur de zéro $\Leftrightarrow$ il existe $b \in A$, $b \neq 0$ avec $bP = 0$.

Exercice 3 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soit A un anneau.

1. Montrer que $\mathfrak{n}(A) = \{x \in A \mid x \text{ nilpotent}\}$ est un idéal et que le quotient $A/\mathfrak{n}(A)$ n'a pas d'élément nilpotent.

2. Montrer l'équivalence :

(a) A a un unique idéal premier.
(b) un élément $x \in A$ est soit inversible soit nilpotent.
(c) $A/\mathfrak{n}(A)$ est un corps.

Exercice 4 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soit A un anneau et soit

$\Sigma = \{\mathfrak{a} \subset A \mid \mathfrak{a} \text{ est un idéal dont tous les éléments sont des diviseurs de zéro}\}.$

1. Montrer que Σ a un élément maximal.

2. Montrer que les éléments maximaux de Σ sont des idéaux premiers et que l'ensemble $\{x \in A \mid x \text{ diviseur de zéro}\}$ est une union d'idéaux premiers..