

Algèbre commutative, feuille 1

N. Perrin

À rendre le lundi 29.01.2018

Correction le mardi 30.01.2018

Exercice 1 (10 + 6 × 5 = 40 Points) Soit A un anneau et soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subset A$ des idéaux.

1. Montrer que $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$.
- 2.a. Montrer que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c} \subset \mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.
- 2.b. Donner un exemple avec $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c} \subsetneq \mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.
- 2.c. Si on a $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$, montrer que $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$.
- 3.a. Montrer que $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.
- 3.b. Donner un exemple avec $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subsetneq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.
- 3.c. Montrer que l'on a $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ dès que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$.

Exercice 2 (12 × 5 = 60 Points) Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal. On note $(f(\mathfrak{a}))$ l'idéal engendré par $f(\mathfrak{a})$.

Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset A$ et $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subset B$ des idéaux. Montrer que l'on a

1. $(f(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)) = (f(\mathfrak{a}_1)) + (f(\mathfrak{a}_2))$.
- 2.a. $(f(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)) \subset (f(\mathfrak{a}_1)) \cap (f(\mathfrak{a}_2))$.
- 2.b. Donner un exemple avec $(f(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)) \subsetneq (f(\mathfrak{a}_1)) \cap (f(\mathfrak{a}_2))$.
3. $(f(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)) = (f(\mathfrak{a}_1))(f(\mathfrak{a}_2))$.
- 4.a. $(f(\sqrt{\mathfrak{a}})) \subset \sqrt{(f(\mathfrak{a}))}$.
- 4.b. Donner un exemple avec $(f(\sqrt{\mathfrak{a}})) \subsetneq \sqrt{(f(\mathfrak{a}))}$.
- 5.a. $f^{-1}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) \supset f^{-1}(\mathfrak{b}_1) + f^{-1}(\mathfrak{b}_2)$.
- 5.b. Donner un exemple avec $f^{-1}(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) \supsetneq f^{-1}(\mathfrak{b}_1) + f^{-1}(\mathfrak{b}_2)$.
6. $f^{-1}(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) = f^{-1}(\mathfrak{b}_1) \cap f^{-1}(\mathfrak{b}_2)$.
- 7.a. $f^{-1}(\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2) \supset f^{-1}(\mathfrak{b}_1) f^{-1}(\mathfrak{b}_2)$.
- 7.b. Donner un exemple avec $f^{-1}(\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2) \supsetneq f^{-1}(\mathfrak{b}_1) f^{-1}(\mathfrak{b}_2)$.
8. $f^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}}) = \sqrt{f^{-1}(\mathfrak{b})}$.