

---

# REPRÉSENTATIONS LISSES DE $GL_m(D)$

## IV : REPRÉSENTATIONS SUPERCUSPIDALES

*par*

V. Sécherre & S. Stevens

---

**Résumé.** — Soit  $F$  un corps commutatif localement compact non archimédien, et soit  $D$  une algèbre à division de centre  $F$ . Nous prouvons que toute représentation irréductible supercuspidale du groupe  $GL_m(D)$ , de niveau non nul, est l'induite compacte d'une représentation d'un sous-groupe ouvert compact modulo le centre de  $GL_m(D)$ . Plus précisément, nous prouvons que de telles représentations contiennent un type simple maximal au sens de [21].

**Abstract.** — Let  $F$  be a non-Archimedean locally compact field and let  $D$  be a central  $F$ -division algebra. We prove that any positive level supercuspidal irreducible representation of the group  $GL_m(D)$  is compactly induced from a representation of a compact mod center open subgroup of  $GL_m(D)$ . More precisely, we prove that such representations contain a maximal simple type in the sense of [21].

### Introduction

Soit  $F$  un corps commutatif localement compact non archimédien, et soit  $G$  une forme intérieure de  $GL_n(F)$ , avec  $n \geq 1$ . C'est un groupe de la forme  $GL_m(D)$ , où  $D$  est une  $F$ -algèbre à division, de dimension  $d^2$  sur son centre  $F$ , et où  $n = md$ . Cet article, qui fait suite au travail entrepris par le premier auteur dans [19, 20, 21], met un terme à la classification des blocs simples de la catégorie des représentations lisses complexes de  $G$  au moyen de la théorie des types de Bushnell et Kutzko.

---

Ce travail a bénéficié d'un financement de la part de l'EPSRC (grant GR/T21714/01).

Notre résultat principal peut être formulé ainsi : si  $\rho$  est une représentation irréductible supercuspidale de  $G$ , de niveau non nul (voir plus bas), alors il existe un type pour la classe inertielle de  $\rho$ . En d'autres termes, nous prouvons qu'il existe un sous-groupe ouvert compact  $J$  de  $G$  et une représentation irréductible  $\lambda$  de  $J$  telle que les représentations irréductibles de  $G$  dont la restriction à  $J$  contient  $\lambda$  sont exactement celles qui sont équivalentes à  $\rho \otimes \chi$  pour un caractère non ramifié  $\chi$  de  $G$ . Plus précisément, nous prouvons qu'on peut choisir pour  $(J, \lambda)$  un type simple maximal au sens de [21].

Mentionnons que le cas où  $\rho$  est de niveau zéro (c'est-à-dire le cas où  $\rho$  possède un vecteur non nul invariant par le sous-groupe  $1 + M_m(\mathfrak{p}_D)$ , où  $\mathfrak{p}_D$  désigne l'idéal maximal de l'anneau des entiers de  $D$ ) a été traité par Grabitz, Silberger et Zink dans [12]. De façon plus générale, les représentations de niveau zéro du groupe des  $F$ -points d'un groupe réductif connexe défini sur  $F$  ont été étudiées, du point de vue de la théorie des types, par Morris [14, 15, 16] et Moy-Prasad [17, 18]. C'est pourquoi, dans cet article, on exclut systématiquement les représentations supercuspidales de niveau zéro de  $G$  (à l'exception du théorème 5.23).

Le problème de la classification des représentations lisses complexes de  $G$  par la théorie des types a déjà été abordé par plusieurs auteurs. Bien entendu, il faut mentionner en premier lieu les travaux fondateurs de Bushnell et Kutzko [7, 9] concernant le groupe déployé  $GL_n(F)$ , qui ont donné le ton à tous les travaux ultérieurs sur le sujet. Ensuite, les premiers travaux concernant les formes intérieures non déployées de  $GL_n(F)$  sont ceux de E.-W. Zink [25] et de Broussous [1] : tous deux donnent une classification des représentations de  $GL_1(D)$ , le premier lorsque  $F$  est de caractéristique nulle, le second sans restriction sur la caractéristique. Dans [12], Grabitz, Silberger et Zink traitent le cas très particulier du niveau zéro. Concernant le cas général, c'est-à-dire les représentations irréductibles de  $GL_m(D)$  de niveau quelconque, on trouve un certain nombre de résultats dans les travaux de Broussous [2, 3, 4], Broussous-Grabitz [5] et Grabitz [10, 11].

Ce travail — les articles [19, 20, 21] auxquels vient s'ajouter le présent article — suit la méthode générale de construction de types élaborée par Bushnell et Kutzko dans [7] et améliorée dans [8] par la théorie des paires couvrantes. Décrivons-en brièvement l'organisation. On fixe une fois pour toutes une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  de la  $F$ -algèbre  $M_m(D)$  (cf. Définition 1.18). Rappelons simplement ici que  $\beta$  est un élément de  $M_m(D)$  tel que la  $F$ -algèbre  $E = F[\beta]$  soit un corps, et que  $\mathfrak{A}$  est un  $\mathcal{O}_F$ -ordre héréditaire de  $M_m(D)$  normalisé par  $E^\times$ .

(i) Dans une première étape ([19]), on associe à la strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  un ensemble fini  $\mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$  de *caractères simples*. Il s'agit de caractères définis sur un certain sous-groupe ouvert compact  $H^1 = H^1(\beta, \mathfrak{A})$  de  $G$  jouissant de remarquables propriétés de fonctorialité connues sous le nom de propriétés de *transfert*. Plus précisément, si  $[\mathfrak{A}', n', 0, \beta]$  est n'importe quelle strate simple d'une  $F$ -algèbre centrale simple dans laquelle est plongé  $E$ , il existe une bijection canonique de  $\mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$  sur  $\mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A}')$ .

(ii) Dans une seconde étape ([20]), on construit, pour chaque caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$ , une famille finie de  $\beta$ -*extensions*. Il s'agit de représentations irréductibles d'un sous-groupe ouvert compact  $J = J(\beta, \mathfrak{A})$  de  $G$  dont la restriction à  $H^1(\beta, \mathfrak{A})$  contient  $\theta$  et — surtout — dont l'entrelacement est le même que celui de  $\theta$ .

(iii) Dans une troisième étape ([21]), lorsque  $\mathfrak{A}$  est un ordre principal, on construit pour chaque  $\beta$ -extension  $\kappa$  d'un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$  une famille finie de *types simples*. Ce sont des représentations irréductibles de  $J(\beta, \mathfrak{A})$  de la forme  $\kappa \otimes \sigma$ , où  $\sigma$  est l'inflation à  $J(\beta, \mathfrak{A})$  d'une représentation irréductible supercuspidale du groupe réductif fini :

$$J(\beta, \mathfrak{A})/J^1(\beta, \mathfrak{A}) \simeq GL_s(k)^r,$$

où  $r, s$  sont des entiers  $\geq 1$  tels que le produit  $rs$  divise  $m$ , où  $k$  est une extension finie du corps résiduel de  $E$  et où  $\sigma$  est de la forme  $\sigma_0^{\otimes r}$ , avec  $\sigma_0$  une représentation irréductible supercuspidale de  $GL_s(k)$ . Chaque type simple  $(J(\beta, \mathfrak{A}), \lambda)$  ainsi construit est un type pour une classe inertielle simple de  $G$  de la forme  $[G_0^r, \rho_0^{\otimes r}]_G$ , où  $\rho_0$  est une représentation irréductible supercuspidale

du groupe  $G_0 = \mathrm{GL}_{m/r}(\mathrm{D})$ . L'algèbre de Hecke de  $G$  relative à  $\lambda$  est une algèbre de Hecke affine. Plus précisément, elle est isomorphe à l'algèbre de Hecke-Iwahori de  $\mathrm{GL}_r(\mathrm{K})$ , où  $\mathrm{K}$  est une extension non ramifiée de  $\mathrm{E}$  dont le corps résiduel est une extension de degré  $s$  de  $k$ .

(iv) La quatrième étape est celle qui occupe le présent article. L'objectif en est l'exhaustion des représentations irréductibles supercuspidales par les types simples. Plus précisément, nous prouvons le résultat suivant (*cf.* Théorème 5.21) :

**THÉORÈME :** Soit  $\rho$  une représentation irréductible supercuspidale de niveau non nul de  $G$ . Il existe un type simple maximal  $(\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}), \lambda)$ , au sens de [21], tel que la restriction de  $\rho$  à  $\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A})$  contienne  $\lambda$ .

On en déduit immédiatement, à partir de [21, Théorème 5.6], que si  $\mathfrak{s} = [\mathrm{G}_0^r, \rho_0^{\otimes r}]_{\mathrm{G}}$  est une classe inertielle simple de niveau non nul de  $G$ , c'est-à-dire que  $r$  est un diviseur de  $m$  et  $\rho_0$  une représentation irréductible supercuspidale de niveau non nul du groupe  $G_0 = \mathrm{GL}_{m/r}(\mathrm{D})$ , il existe un type simple  $(\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}), \lambda)$  qui est un type pour  $\mathfrak{s}$ . La structure de l'algèbre de Hecke de  $G$  relative à  $(\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}), \lambda)$  est donnée par [21, Théorème 4.6]. Comme mentionné à l'étape (iii), elle est isomorphe à une algèbre de Hecke-Iwahori.

Nous passons maintenant à la description des méthodes utilisées. Notre première tâche — qui est aussi la plus difficile — est de séparer les représentations irréductibles de niveau non nul de  $G$  en trois catégories, comme suit (*cf.* Théorème 3.23) : une représentation irréductible de niveau non nul de  $G$  contient ou bien une strate scindée, ou bien un caractère scindé, ou bien un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$  pour une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  de  $A$ . (On renvoie au §3.6 pour les définitions de strate scindée et de caractère scindé — appelé *type scindé* dans [7].) Ce travail est déjà amorcé par Broussous [4], qui prouve qu'une représentation irréductible de niveau non nul  $\pi$  de  $G$  ne contenant pas de strate scindée contient un caractère simple de niveau  $m \geq 0$ , c'est-à-dire la restriction d'un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$  à un sous-groupe  $\mathrm{H}^{m+1}(\beta, \mathfrak{A})$  éventuellement plus petit que  $\mathrm{H}^1(\beta, \mathfrak{A})$ . Si  $m \geq 1$ , on cherche à

construire, en procédant par raffinement comme dans [7], un caractère simple  $\theta' \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A}')$  relatif à une autre strate simple  $[\mathfrak{A}', n', 0, \beta]$  de  $A$ , contenu dans  $\pi$  à un niveau (normalisé) strictement moindre. Mais, contrairement à ce qui se passe dans le cas déployé, il n'est pas possible de passer de  $\theta$  à  $\theta'$  en une seule étape — techniquement, c'est [7, Proposition 1.2.8] qui fait défaut : voir [21, §1.5.3]. En découpant le segment  $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}']$  dans l'immeuble de Bruhat-Tits de  $G$  en morceaux suffisamment petits (*cf.* §3.5, Hypothèse (H)), on obtient le résultat crucial 3.15, clef du processus de raffinement et analogue de [24, Lemma 5.4]. Tout ceci est assez technique et nécessite :

- (i) d'employer le langage des suites de réseaux, plus général que celui des ordres héréditaires et qui permet une description des points rationnels de l'immeuble de Bruhat-Tits de  $G$  (*cf.* [2]) ;
- (ii) de définir les caractères simples relatifs à une suite de réseaux et d'étendre le transfert des caractères simples à ce cadre : c'est l'objet de la section 2 de cet article ;
- (iii) de généraliser la notion de strate dérivée (*cf.* Définition 3.21), conduisant elle-même à celle de caractère scindé (*cf.* Définition 3.22).

Mentionnons un point important : l'introduction des caractères simples relatifs à une suite de réseaux a ceci de gênant que les niveaux normalisés deviennent des nombres rationnels dont le dénominateur n'est pas borné — ce qui risquerait d'empêcher le processus de raffinement de terminer. Il est donc indispensable de vérifier que l'on passe de  $\theta$  à un caractère simple  $\theta'$  qui, lui, est relatif à un ordre héréditaire, même si les étapes intermédiaires peuvent mettre en jeu des caractères simples relatifs à des suites de réseaux quelconques. Ceci justifie le théorème 1.7, et tous les résultats préparatoires des §§3.1–3.3.

Remarquons également que la distinction entre strate scindée et caractère scindé est assez superficielle : c'est à peu près la même que celle que l'on fait entre types simples de niveau 0 et de niveau  $> 0$ .

Notre seconde tâche, qui occupe la section 4, est de montrer qu'une représentation irréductible de niveau non nul de  $G$  contenant une strate scindée ou

un caractère scindé a un module de Jacquet non trivial. Ceci implique automatiquement que toute représentation irréductible supercuspidale de niveau non nul de  $G$  contient un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$  pour une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  de  $A$ . Pour aboutir au théorème 5.21, il reste alors à décrire le passage de  $H^1$  à  $J$ , ce qui fait l'objet de la section 5. Une représentation irréductible supercuspidale de niveau non nul de  $G$  contient *a priori* une représentation irréductible de  $J$  de la forme  $\vartheta = \kappa \otimes \sigma$ , où  $\sigma$  est l'inflation à  $J$  d'une représentation irréductible de  $J/J^1$ . En s'inspirant de [12, §1], et en utilisant la notion de *cohérence* déjà largement développée dans [20, 21], on montre que  $\vartheta$  est un type simple maximal, c'est-à-dire que  $\mathfrak{A}$  est principal, que  $\sigma$  est cuspidale de la forme  $\sigma_0^{\otimes r}$  et que  $\mathfrak{A} \cap B$  est un ordre maximal de  $B$ .

Nous terminons cette introduction en mentionnant deux problèmes qui restent à traiter au sujet des représentations lisses de  $G$ . Le premier concerne la généralisation de la notion d'endo-classe (cf. [6, §8]) aux caractères simples de  $G$ . Le second concerne la construction de types pour n'importe quelle classe inertielle de  $G$ , en généralisant la construction des types semi-simples réalisée dans [9].

### Notations et conventions

Soit  $F$  un corps commutatif localement compact non archimédien. Toutes les  $F$ -algèbres sont supposées unitaires et de dimension finie. Par *F-algèbre à division* on entend  $F$ -algèbre centrale dont l'anneau sous-jacent est un corps (pas nécessairement commutatif).

Si  $K$  est une extension finie de  $F$ , ou plus généralement une algèbre à division sur une extension finie de  $F$ , on note  $\mathcal{O}_K$  son anneau d'entiers,  $\mathfrak{p}_K$  son idéal maximal et  $k_K$  son corps résiduel.

Si  $A$  est une algèbre centrale simple sur une extension finie  $K$  de  $F$ , on note  $N_{A/K}$  (resp.  $\text{tr}_{A/K}$ ) la norme (resp. la trace) réduite de  $A$  sur  $K$ .

Si  $u$  est un nombre réel, on note  $\lceil u \rceil$  le plus petit entier  $\geq u$  et  $\lfloor u \rfloor$  le plus grand entier  $\leq u$ , c'est-à-dire la partie entière de  $u$ .

Un *caractère* d'un groupe topologique  $G$  est un homomorphisme continu de  $G$  dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^\times$  du corps des nombres complexes.

Toutes les représentations sont supposées lisses et à coefficients complexes.

## 1. Préliminaires

Dans cette section, on rappelle le langage des strates dans une  $F$ -algèbre centrale simple. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [4, 7, 9, 19].

**1.1.** Soit  $A$  une  $F$ -algèbre centrale simple, et soit  $V$  un  $A$ -module à gauche simple. L'algèbre  $\text{End}_A(V)$  est une  $F$ -algèbre à division dont l'algèbre opposée est notée  $D$ . Aussi  $V$  est-il un  $D$ -espace vectoriel à droite, et on a un isomorphisme canonique de  $F$ -algèbres entre  $A$  et  $\text{End}_D(V)$ .

**Définition 1.1.** — Une  $\mathcal{O}_D$ -suite de réseaux de  $V$  est une suite décroissante  $\Lambda = (\Lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $\mathcal{O}_D$ -réseaux de  $V$  pour laquelle il existe un entier  $e \geq 1$  tel que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on ait  $\Lambda_{k+e} = \Lambda_k \mathfrak{p}_D$ . Cet entier  $e$ , unique, est appelé la *période* de  $\Lambda$  sur  $\mathcal{O}_D$  et noté  $e(\Lambda | \mathcal{O}_D)$ .

Une  $\mathcal{O}_D$ -suite de réseaux est dite *stricte* si elle est strictement décroissante. On emploie aussi le terme de *chaîne* de réseaux pour suite de réseaux stricte. On note  $\mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$  l'ensemble des  $\mathcal{O}_D$ -suites de réseaux de  $V$ .

Si  $W$  est un sous- $D$ -espace vectoriel de  $V$ , l'application  $k \mapsto \Lambda_k \cap W$  est une  $\mathcal{O}_D$ -suite de réseaux de  $W$  de même période que  $\Lambda$ . On la note  $\Lambda \cap W$ .

Si  $a$  est un entier  $\geq 1$  et si  $\Lambda \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$ , on note  $a\Lambda$  la suite  $k \mapsto \Lambda_{\lceil k/a \rceil}$ .

**Remarque 1.2.** — Il est commode de prolonger les suites de réseaux à  $\mathbb{R}$  tout entier, en posant  $\Lambda_x = \Lambda_{\lceil x \rceil}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . De cette façon,  $\Lambda$  devient une fonction décroissante à valeurs dans l'ensemble des  $\mathcal{O}_D$ -réseaux de  $V$ , continue à gauche pour la topologie discrète sur l'espace d'arrivée. Ses points de discontinuité sont entiers. L'application  $x \mapsto \Lambda(xe(\Lambda | \mathcal{O}_F))$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , est une  $\mathcal{O}_D$ -*fonction de réseaux* au sens de [2].

**1.2.** À toute suite de réseaux  $\Lambda \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$  on associe une suite de réseaux  $\mathfrak{a}(\Lambda) \in \mathcal{L}(A, \mathcal{O}_F)$  définie par :

$$\mathfrak{a}_k(\Lambda) = \{a \in A \mid a\Lambda_l \subset \Lambda_{l+k}, l \in \mathbb{Z}\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Elle caractérise la classe de translation de  $\Lambda$ . Deux  $\mathcal{O}_F$ -réseaux de cette suite sont d'une importance particulière :  $\mathfrak{A}(\Lambda) = \mathfrak{a}_0(\Lambda)$  est un ordre héréditaire de  $A$ , et son radical de Jacobson est  $\mathfrak{B}(\Lambda) = \mathfrak{a}_1(\Lambda)$ . Ils ne dépendent que de l'ensemble  $\{\Lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

On note  $\mathfrak{K}(\Lambda)$  le normalisateur de  $\Lambda$  dans  $A^\times$ . Si  $g \in \mathfrak{K}(\Lambda)$ , on note  $v_\Lambda(g)$  l'entier  $n \in \mathbb{Z}$  défini par  $g(\Lambda_k) = \Lambda_{k+n}$ . L'application  $v_\Lambda$  est un morphisme de groupes de  $\mathfrak{K}(\Lambda)$  dans  $\mathbb{Z}$ , dont le noyau, noté  $U(\Lambda)$ , est le groupe multiplicatif de l'ordre héréditaire  $\mathfrak{A}(\Lambda)$ . On pose  $U_0(\Lambda) = U(\Lambda)$  et, pour  $k \geq 1$ , on pose  $U_k(\Lambda) = 1 + \mathfrak{a}_k(\Lambda)$ .

**1.3.** Soit  $E$  une extension finie de  $F$  telle qu'il existe un homomorphisme de  $F$ -algèbres  $\iota : E \rightarrow A$ , qu'on suppose fixé dans la suite. On identifie ainsi  $E$  à la sous- $F$ -algèbre  $\iota E$  de  $A$ .

**Définition 1.3.** — Une suite  $\Lambda \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$  est dite *E-pure* si elle est normalisée par  $E^\times$ , c'est-à-dire si c'est une  $\mathcal{O}_E$ -suite de réseaux de  $V$ .

Le commutant de  $E$  dans  $A$ , qu'on note  $B$ , est une  $E$ -algèbre centrale simple. On fixe un  $B$ -module à gauche simple  $V_E$  et on note  $D_E$  l'algèbre opposée à  $\text{End}_B(V_E)$ . Si  $\Gamma$  est une  $\mathcal{O}_{D_E}$ -suite de réseaux de  $V_E$ , on note  $\mathfrak{b}(\Gamma)$  la  $\mathcal{O}_E$ -suite de réseaux de  $B$  qu'elle définit.

Le théorème suivant traduit en termes de suites de réseaux la correspondance [2] entre  $\mathcal{O}_D$ -fonctions de réseaux de  $V$  invariantes par  $E^\times$  et  $\mathcal{O}_{D_E}$ -fonctions de réseaux de  $V_E$ . Il étend aux suites  $E$ -pures quelconques la correspondance définie par [3, Théorème 1.3].

**Théorème 1.4.** — *Soit  $\Lambda \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$  une suite E-pure. Il existe une  $\mathcal{O}_{D_E}$ -suite  $\Gamma$  de réseaux de  $V_E$ , unique à translation près, telle que :*

$$\mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap B = \mathfrak{b}_k(\Gamma), \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Le normalisateur de  $\Gamma$  dans  $B^\times$  est égal à  $\mathfrak{K}(\Lambda) \cap B^\times$ .

*Démonstration.* — On se réfère à [2], qui utilise le langage des fonctions de réseaux. On désigne par  $d$  le degré réduit de  $D$  sur  $F$ , par  $e$  l'indice de ramification de  $E/F$  et par  $r$  la période de  $\Lambda$  sur  $\mathcal{O}_D$ . À la suite  $\Lambda$  correspond la  $\mathcal{O}_D$ -fonction  $\mathcal{F} : x \mapsto \Lambda(rdx)$  (cf. Remarque 1.2). Il lui correspond une  $\mathcal{O}_{D_E}$ -fonction  $\mathcal{G}$  de réseaux de  $V_E$ , unique à translation près, telle que :

$$(1.1) \quad \mathfrak{a}_x(\mathcal{F}) \cap B = \mathfrak{b}_{ex}(\mathcal{G}), \quad x \in \mathbb{R}$$

(cf. [2, Theorem II.1.1]). On note  $d_E$  le degré réduit de  $D_E$  sur  $E$ . C'est un diviseur de  $d$ , et le quotient de  $d$  par  $d_E$  est égal au pgcd de  $d$  et  $[E : F]$  (voir par exemple [26]). Puisque  $\Lambda$  est  $E$ -pure, l'entier  $e$  divise  $rd$ , donc  $ed_E$  divise  $rd$ . On en déduit que  $\Gamma : k \mapsto \mathcal{G}(ke/rd)$  est une  $\mathcal{O}_{D_E}$ -suite de réseaux de  $V_E$  qui satisfait à la condition voulue. L'unicité est immédiate.  $\square$

**Remarque 1.5.** — En particulier, l'intersection  $\mathfrak{B}(\Lambda) = \mathfrak{A}(\Lambda) \cap B$  est un ordre héréditaire de  $B$ .

**1.4.** L'inconvénient de la correspondance  $\Lambda \mapsto \Gamma$  définie par le théorème 1.4 est qu'elle n'est pas normalisée, ce qui fait que son image ne contient pas, en général, toutes les  $\mathcal{O}_{D_E}$ -chaînes.

**Exemple 1.6.** — Soit  $A = M_2(D)$  et soit  $E/F$  une extension quadratique non ramifiée incluse dans  $D$ . Une chaîne  $E$ -pure de période 2 a pour image une suite non stricte (de période 4), une chaîne  $E$ -pure de période 1 a pour image une suite de période 2, et une suite  $E$ -pure non stricte a pour image une suite non stricte. Donc, si  $\Gamma$  est une  $\mathcal{O}_{D_E}$ -chaîne de période 1, il ne lui correspond aucune  $\mathcal{O}_D$ -suite  $E$ -pure  $\Lambda$ .

Si l'on veut récupérer toutes les  $\mathcal{O}_{D_E}$ -chaînes, il est nécessaire de rajouter un facteur de normalisation. Le résultat suivant complète [2, Proposition II.5.4].

**Théorème 1.7.** — Soit  $\Gamma$  une  $\mathcal{O}_{D_E}$ -suite stricte de  $V_E$ . Il existe un unique entier  $\rho \geq 1$  et une suite  $\Lambda \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$  stricte et  $E$ -pure, unique à translation

près, tels que :

$$\mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap B = \mathfrak{b}_{k/\rho}(\Gamma), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le normalisateur de  $\Gamma$  dans  $B^\times$  est égal à  $\mathfrak{K}(\Lambda) \cap B^\times$ .

**Remarque 1.8.** — Autrement dit, il existe un unique entier  $\rho$  tel que  $\rho\Gamma$  soit dans l'image de la correspondance définie par le théorème 1.4 et ait une chaîne pour antécédent.

*Démonstration.* — On reprend en partie les notations de la preuve précédente. On note  $s$  le pgcd de  $d$  et du degré résiduel de  $E/F$  et  $r$  la période de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{O}_E$ . À la suite  $\Gamma$  correspond la  $\mathcal{O}_{D_E}$ -fonction  $\mathcal{G} : x \mapsto \Gamma(rx)$ . L'ensemble de ses points de discontinuité est  $r^{-1}\mathbb{Z}$ . Il lui correspond une  $\mathcal{O}_D$ -fonction  $E$ -pure  $\mathcal{F}$  de réseaux de  $V$ , unique à translation près, vérifiant (1.1). Plus précisément, la fonction  $\mathcal{F}$  est définie en [2, Lemma II.3.1], où l'on voit que ses points de discontinuité sont les nombres réels de la forme :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{er}, \quad 0 \leq a \leq s-1 \text{ et } b \in \mathbb{Z}.$$

On va voir qu'ils forment un idéal fractionnaire de  $\mathbb{Z}$ . Le quotient de  $d$  par  $d_E$  divise  $se$ . On en déduit que l'ensemble des points de discontinuité de  $\mathcal{F}$  est :

$$\frac{1}{d}\mathbb{Z} + \frac{1}{er}\mathbb{Z} = \frac{(d, er)}{der}\mathbb{Z},$$

où  $(a, b)$  désigne le pgcd de deux entiers  $a, b \geq 1$ . Si on pose  $\rho = d/(d, er)$ , l'application  $\Lambda : k \mapsto \mathcal{F}(k/\rho er)$  est une  $\mathcal{O}_D$ -suite de réseaux stricte qui répond à la question.

Il reste à prouver l'unicité. Si le couple  $(\rho', \Lambda')$  est une autre solution, alors  $\mathfrak{a}_k(\rho\Lambda') \cap B = \mathfrak{a}_k(\rho'\Lambda) \cap B$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Les suites  $\rho'\Lambda$  et  $\rho\Lambda'$  définissent la même fonction de réseaux  $\mathcal{F}$  et ont la même période : elles sont donc dans la même classe de translation. Puisque  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont toutes les deux strictes, on en déduit que  $\rho = \rho'$ , puis que  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont dans la même classe de translation.  $\square$

**Exemple 1.9.** — (i) On reprend l'exemple 1.6. Si  $\Gamma$  est une chaîne de période 2, alors  $\Lambda$  est de période 1 et  $\rho = 1$ . Si  $\Gamma$  est une chaîne de période 1, alors  $\Lambda$  est de période 1 et  $\rho = 2$ .

(ii) Dans le cas déployé, c'est-à-dire lorsque  $D = F$ , la chaîne  $\Lambda$  est simplement  $\Gamma$  vue comme une  $\mathcal{O}_F$ -chaîne et on a  $\rho = 1$ .

**Remarque 1.10.** — L'entier  $\rho$  est égal au rapport de  $e(\Lambda|\mathcal{O}_F)$  sur  $e(\Gamma|\mathcal{O}_F)$ .

1.5. Soit :

$$(1.2) \quad V = V^1 \oplus \dots \oplus V^l$$

une décomposition de  $V$  en une somme directe de  $l \geq 1$  sous- $D$ -espaces vectoriels. Pour chaque  $1 \leq i \leq l$ , on note  $e^i$  le projecteur sur  $V^i$  parallèlement à  $\bigoplus_{j \neq i} V^j$ . On pose  $A^{ij} = e^i A e^j = \text{Hom}_D(V^j, V^i)$  et  $A^i = A^{ii} = \text{End}_D(V^i)$ . On note :

$$M = \text{Aut}_D(V^1) \times \dots \times \text{Aut}_D(V^l)$$

le stabilisateur de la décomposition (1.2) dans  $A^\times$ . C'est un sous-groupe de Levi de  $A^\times$ . Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $A^\times$  de facteur de Levi  $M$ , et écrivons  $P = MN$ , où  $N$  est le radical unipotent de  $P$ . On note  $P^-$  le sous-groupe parabolique opposé à  $P$ , et  $N^-$  son radical unipotent.

**Définition 1.11** ([8], 6.1). — Soit  $K$  un sous-groupe de  $A^\times$ .

(i) On dit que  $K$  est *décomposé*, ou qu'il admet une *décomposition d'Iwahori*, relativement à  $(M, P)$ , si :

$$K = (K \cap N^-) \cdot (K \cap M) \cdot (K \cap N).$$

(ii) Soit  $\tau$  une représentation de  $K$ . La paire  $(K, \tau)$  est dite *décomposée* relativement à  $(M, P)$  si  $K$  est décomposé relativement à  $(M, P)$  et si  $K \cap N$ ,  $K \cap N^-$  sont dans le noyau de  $\tau$ .

On utilisera le lemme suivant pour prouver que certains sous-groupes de  $A^\times$  admettent une décomposition d'Iwahori.

**Lemme 1.12** ([6], 10.4). — Soit  $R$  un  $\mathcal{O}_F$ -réseau dans  $A$  tel que  $1 + R$  soit un sous-groupe de  $A^\times$ . On suppose que  $e^i R e^j \subset R$  pour chaque paire  $(i, j)$ . Alors  $1 + R$  admet une décomposition d'Iwahori relativement à  $(M, P)$ , pour tout sous-groupe parabolique  $P$  de  $A^\times$  de facteur de Levi  $M$ .

Soit  $\Lambda$  une  $\mathcal{O}_D$ -suite de réseaux de  $V$ . Pour chaque  $i$ , on pose  $\Lambda^i = \Lambda \cap V^i$ .

**Définition 1.13.** — On dit que (1.2) est *conforme* à  $\Lambda$ , ou encore que  $\Lambda$  est *décomposée par* (1.2), si :

$$(1.3) \quad \Lambda = \Lambda^1 \oplus \dots \oplus \Lambda^l.$$

Une décomposition (1.2) est conforme à  $\Lambda$  si, et seulement si  $e^i \in \mathfrak{A}(\Lambda)$  pour chaque  $i$ . Dans ce cas, on a  $\Lambda^i = e^i \Lambda$  et  $\mathfrak{a}(\Lambda) \cap \Lambda^i = \mathfrak{a}(\Lambda^i)$ .

**Exemple 1.14.** — On suppose que (1.2) est conforme à  $\Lambda$ . Pour  $k \geq 1$ , le groupe  $U_k(\Lambda)$  admet une décomposition d'Iwahori relativement à  $(M, P)$ , pour tout sous-groupe parabolique  $P$  de  $A^\times$  de facteur de Levi  $M$ .

**1.6.** Soit  $A$  une  $F$ -algèbre centrale simple, soit  $V$  un  $A$ -module à gauche simple et soit  $D$  l'algèbre opposée à  $\text{End}_A(V)$ . On reprend les notations des paragraphes précédents.

**Définition 1.15.** — Une *strate* de  $A$  est un quadruplet  $[\Lambda, n, r, \beta]$  constitué d'une  $\mathcal{O}_D$ -suite  $\Lambda$  de  $V$ , de deux entiers  $r, n$  vérifiant  $0 \leq r \leq n - 1$  et d'un élément  $\beta \in \mathfrak{a}_{-n}(\Lambda)$ . Deux strates  $[\Lambda, n, r, \beta_i]$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , sont dites *équivalentes* si  $\beta_2 - \beta_1 \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda)$ .

**Exemple 1.16.** — Soit un caractère additif  $\psi_F : F \rightarrow \mathbb{C}^\times$  trivial sur  $\mathfrak{p}_F$  mais pas sur  $\mathcal{O}_F$ . Soit  $[\Lambda, n, r, \beta]$  une strate de  $A$  telle que  $\lfloor n/2 \rfloor \leq r$ . Le caractère  $\psi_\beta$  de  $U_{r+1}(\Lambda)$  défini par :

$$\psi_\beta : x \mapsto \psi_F \circ \text{tr}_{A/F}(\beta(x - 1)),$$

ne dépend que de la classe d'équivalence de  $[\Lambda, n, r, \beta]$ .

Étant donnée une strate  $[\Lambda, n, r, \beta]$  de  $A$ , on note  $E$  la  $F$ -algèbre engendrée par  $\beta$ .

**Définition 1.17.** — La strate  $[\Lambda, n, r, \beta]$  est dite *pure* si  $E$  est un corps, si la suite  $\Lambda$  est normalisée par  $E^\times$  et si  $v_\Lambda(\beta) = -n$ .

Soit  $[\Lambda, n, r, \beta]$  une strate pure. On note  $B$  le commutant de  $E$  dans  $A$ . Pour tout entier  $k \in \mathbb{Z}$ , on pose :

$$\mathfrak{n}_k(\beta, \Lambda) = \{x \in \mathfrak{a}_0(\Lambda) \mid \beta x - x\beta \in \mathfrak{a}_k(\Lambda)\}.$$

Le plus petit entier  $k \geq v_\Lambda(\beta)$  pour lequel le réseau  $\mathfrak{n}_{k+1}(\beta, \Lambda)$  est inclus dans  $\mathfrak{a}_0(\Lambda) \cap B + \mathfrak{a}_1(\Lambda)$  est noté  $k_0(\beta, \Lambda)$  et porte le nom d'*exposant critique* de la strate  $[\Lambda, n, r, \beta]$ . (Il s'agit de la convention adoptée dans [24] : dans le cas où  $E = F$ , on a  $k_0(\beta, \Lambda) = -n$ , tandis qu'avec la convention d'usage dans [7, 19], on aurait  $k_0(\beta, \Lambda) = -\infty$ .)

**Définition 1.18.** — La strate  $[\Lambda, n, r, \beta]$  est dite *simple* si elle est pure et si  $r \leq -k_0(\beta, \Lambda) - 1$ .

**1.7.** Soit  $[\Lambda, n, r, \beta]$  une strate simple de  $A$ . On pose  $q = -k_0(\beta, \Lambda)$ .

**Définition 1.19.** — (i) Si  $q = n$ , on dit que  $\beta$  est *minimal* sur  $F$ .

(ii) Si  $q \leq n - 1$ , une *approximation de  $\beta$  relativement à  $\Lambda$*  est un élément  $\gamma \in A$  tel que  $[\Lambda, n, q, \gamma]$  soit une strate simple équivalente à  $[\Lambda, n, q, \beta]$ .

Selon [21, Théorème 2.2], un élément  $\beta$  qui n'est pas minimal sur  $F$  admet des approximations relativement à n'importe quelle suite de réseaux  $E$ -pure, et on peut même choisir  $\gamma$  de façon que la sous-extension non ramifiée maximale de  $F(\gamma)$  soit incluse dans  $E$ . (Par exemple, si  $E/F$  est non ramifiée, on peut choisir  $\gamma \in E$ .) Ceci permet d'avoir accès à la machinerie, développée dans [7], des constructions par récurrence sur l'exposant critique.

**Proposition 1.20.** — Soit  $V = V^1 \oplus \dots \oplus V^l$  une décomposition de  $V$  en sous- $E \otimes_F D$ -modules, qui soit conforme à  $\Lambda$ .

(i) Pour tout  $1 \leq i \leq l$ , la strate  $[\Lambda^i, n, r, e^i\beta]$  est une strate simple de  $A^i$ .

(ii) Si  $\beta$  n'est pas minimal sur  $F$ , il existe une approximation de  $\beta$  relativement à  $\Lambda$  commutant aux  $e^i$ .

*Démonstration.* — Pour le (i), voir [19, Proposition 2.28]. Pour le (ii), c'est ce que dit la preuve de [21, Théorème 2.2] (voir aussi *ibid.*, §1.3).  $\square$

**1.8.** Soit  $(k, \beta)$  une paire simple sur  $F$  au sens de [6], et soit  $E = F(\beta)$ . On appelle *donnée admissible* pour la paire  $(k, \beta)$  un quintuplet  $(A, \iota, V, \Lambda, m)$  constitué d'une  $F$ -algèbre centrale simple  $A$ , d'un plongement de  $F$ -algèbres  $\iota : E \rightarrow A$ , d'un  $A$ -module à gauche simple  $V$ , d'une  $\mathcal{O}_D$ -suite  $E$ -pure  $\Lambda$  de réseaux de  $V$  et d'un entier  $m$  vérifiant :

$$\left\lfloor \frac{m}{e(\Lambda|\mathcal{O}_E)} \right\rfloor = k.$$

On pose  $n = -v_\Lambda(\iota\beta)$ . D'après [19, §2.3.3], la strate  $[\Lambda, n, m, \iota\beta]$  est une strate simple de  $A$ .

**Définition 1.21.** — La strate simple  $[\Lambda, n, m, \iota\beta]$  est appelé une *réalisation* de la paire simple  $(k, \beta)$ .

## 2. Caractères simples

Soit  $A$  une  $F$ -algèbre centrale simple. Dans cette section, on associe à toute strate simple  $[\Lambda, n, m, \beta]$  de  $A$  un ensemble  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  de caractères simples, jouissant de propriétés remarquables de transfert et d'entrelacement. Cette construction généralise les constructions effectuées dans [9, 19, 24] lorsque  $A$  est déployée (c'est-à-dire lorsque  $D = F$ ) et celles effectuées dans [10, 19] lorsque  $\Lambda$  est une  $\mathcal{O}_D$ -chaîne de réseaux.

L'idée suivie est la même que dans [9] : on rajoute à  $\Lambda$  une  $\mathcal{O}_D$ -chaîne  $\Lambda^\circ$  d'un  $D$ -espace vectoriel adéquat  $V^\circ$ , et on définit  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  comme la projection de  $\mathcal{C}(\Lambda \oplus \Lambda^\circ, m, \beta)$  sur le facteur  $\text{Aut}_D(V)$ .

On fixe une fois pour toutes un caractère additif  $\psi_F : F \rightarrow \mathbb{C}^\times$  trivial sur  $\mathfrak{p}_F$  mais pas sur  $\mathcal{O}_F$ . Toutes les constructions de caractères simples dépendent du choix de  $\psi_F$ .

**2.1.** Soit  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$  et soit  $q = -k_0(\beta, \Lambda)$ . Dans ce paragraphe et le suivant, on suppose que  $\Lambda$  est stricte. Dans [19], on associe à une telle strate les objets suivants :

(i) Deux sous- $\mathcal{O}_F$ -ordres  $\mathfrak{J}(\beta, \Lambda)$  et  $\mathfrak{H}(\beta, \Lambda)$  de  $\mathfrak{A}(\Lambda)$ . Ils ne dépendent que de la classe d'équivalence de  $[\Lambda, n, 0, \beta]$ . Chacun d'eux est filtré par une suite décroissante d'idéaux bilatères :

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}^k(\beta, \Lambda) &= \mathfrak{J}(\beta, \Lambda) \cap \mathfrak{a}_k(\Lambda), \\ \mathfrak{H}^k(\beta, \Lambda) &= \mathfrak{H}(\beta, \Lambda) \cap \mathfrak{a}_k(\Lambda), \quad k \geq 0.\end{aligned}$$

Ces idéaux bilatères sont en particulier (avec les notations du §1.3) des sous- $\mathfrak{B}(\Lambda)$ -bimodules de  $A$ . On note  $J(\beta, \Lambda)$  (resp.  $H(\beta, \Lambda)$ ) le groupe multiplicatif de  $\mathfrak{J}(\beta, \Lambda)$  (resp. de  $\mathfrak{H}(\beta, \Lambda)$ ). De façon similaire, chacun d'eux est filtré par une suite décroissante de sous-groupes ouverts compacts :

$$\begin{aligned}J^k(\beta, \Lambda) &= J(\beta, \Lambda) \cap U_k(\Lambda), \\ H^k(\beta, \Lambda) &= H(\beta, \Lambda) \cap U_k(\Lambda), \quad k \geq 0.\end{aligned}$$

(ii) Pour tout entier  $0 \leq m \leq q - 1$ , un ensemble fini  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  de caractères de  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  appelés *caractères simples de niveau  $m$* . Ces caractères vérifient une propriété de functorialité appelée propriété de *transfert*, dont l'établissement était l'un des principaux objectifs de [19]. On reviendra largement dessus plus bas.

**2.2.** Dans ce paragraphe, on décrit, pour  $\Lambda$  stricte, le comportement de  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  par passage à une strate simple équivalente, puis par augmentation du niveau. On pose  $r = \lfloor q/2 \rfloor + 1$ .

**Proposition 2.1.** — *Soit un entier  $0 \leq l \leq q$ , et soit  $[\Lambda, n, l, \gamma]$  une strate simple équivalente à  $[\Lambda, n, l, \beta]$ . L'application  $\theta \mapsto \theta\psi_{\gamma-\beta}$  induit des bijections :*

$$\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta) \rightarrow \mathcal{C}(\Lambda, m, \gamma), \quad \lfloor l/2 \rfloor \leq m \leq q - 1.$$

*Démonstration.* — La preuve est analogue à celle de [7], corollaire 3.3.18 si  $l = q$ , et corollaire 3.3.20(ii) si  $l \neq q$ . Dans les deux cas, il suffit de remplacer [7, Proposition 3.3.9] par la proposition [19, 3.30] et [7, Proposition 2.4.11] par [10, Lemma 1.9].  $\square$

**Proposition 2.2.** — *Soit  $[\Lambda, n, m, \beta]$  une strate simple de  $A$ .*

(i) On suppose que  $m \leq \lfloor q/2 \rfloor$ . Si deux caractères de  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  coïncident sur  $H^r(\beta, \Lambda)$ , ils sont tordus l'un de l'autre par un caractère de  $U_{m+1}(\Lambda) \cap B^\times$  trivial sur  $U_r(\Lambda) \cap B^\times$  et se factorisant par  $N_{B/E}$ .

(ii) On suppose que  $m \leq q-2$ . La restriction de  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  à  $\mathcal{C}(\Lambda, m+1, \beta)$  est surjective.

*Démonstration.* — Le (i) est une conséquence de [19, Lemme 3.24]. Pour le (ii), on procède par récurrence comme pour [7, Corollary 3.3.21]. Si  $q = n$ , on sépare deux cas. Pour  $\lfloor n/2 \rfloor \leq m$ , on a :

$$(2.1) \quad \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta) = \{\psi_\beta\}$$

(cf. [19, Lemme 3.23]). Pour  $m \leq \lfloor n/2 \rfloor$ , on utilise (i). Ensuite, si  $q \leq n-1$ , on choisit une strate simple  $[\Lambda, n, q, \gamma]$  équivalente à  $[\Lambda, n, q, \beta]$  et on applique la proposition 2.1.  $\square$

**2.3.** Soit  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$ . Maintenant,  $\Lambda$  est une  $\mathcal{O}_D$ -suite quelconque. On note  $e$  sa période sur  $\mathcal{O}_D$  et on pose  $q = -k_0(\beta, \Lambda)$ .

Soit  $(V^\circ, \Lambda^\circ)$  un couple constitué d'un  $E \otimes_F D$ -module de type fini  $V^\circ$  et d'une  $\mathcal{O}_D$ -suite stricte  $E$ -pure  $\Lambda^\circ$  de réseaux de  $V^\circ$ , de période  $e$ . On pose :

$$(2.2) \quad \bar{V} = V \oplus V^\circ, \quad \bar{\Lambda} = \Lambda \oplus \Lambda^\circ.$$

La  $F$ -algèbre  $E$  se plonge naturellement dans  $\bar{A} = \text{End}_D(\bar{V})$  et  $\bar{\Lambda}$  est une  $\mathcal{O}_D$ -suite stricte  $E$ -pure de réseaux de  $\bar{V}$ . La strate  $[\bar{\Lambda}, n, 0, \beta]$  est une strate simple de  $\bar{A}$ . (On renvoie à [9, §5] pour ce procédé.)

On note  $\bar{B}$  le commutant de  $E$  dans  $\bar{A}$ . Par construction, la décomposition (2.2) est une décomposition de  $\bar{V}$  en  $E \otimes D$ -modules, qui est conforme à  $\Lambda$ , c'est-à-dire que les projecteurs  $e : \bar{V} \rightarrow V$  et  $e^\circ : \bar{V} \rightarrow V^\circ$  appartiennent tous deux à  $\mathfrak{B}(\bar{\Lambda}) = \mathfrak{A}(\bar{\Lambda}) \cap \bar{B}$ .

On pose :

$$M = \text{Aut}_D(V) \times \text{Aut}_D(V^\circ).$$



Pour  $k \geq 1$ , les  $\mathcal{O}_F$ -réseaux  $\mathfrak{J}^k(\beta, \bar{\Lambda})$  et  $\mathfrak{H}^k(\beta, \bar{\Lambda})$  sont des sous- $\mathfrak{B}(\bar{\Lambda})$ -bimodules de  $\bar{A}$ . D'après le lemme 1.12, les groupes  $J^k(\beta, \bar{\Lambda})$ ,  $H^k(\beta, \bar{\Lambda})$  admettent chacun une décomposition d'Iwahori relativement à  $(M, P)$ , pour tout sous-groupe parabolique  $P$  de  $\text{Aut}_D(\bar{V})$  de facteur de Levi  $M$ .

On pose enfin  $G = A^\times$  et  $\bar{G} = \bar{A}^\times$ .

**Théorème 2.3.** — *On suppose que  $\Lambda$  est stricte.*

(i) *Pour  $k \geq 0$ , on a  $J^k(\beta, \bar{\Lambda}) \cap G = J^k(\beta, \Lambda)$  et  $H^k(\beta, \bar{\Lambda}) \cap G = H^k(\beta, \Lambda)$ .*

(ii) *Pour  $0 \leq m \leq q - 1$  et pour  $\theta \in \mathcal{C}(\bar{\Lambda}, m, \beta)$ , la paire  $(H^{m+1}(\beta, \bar{\Lambda}), \theta)$  est décomposée par  $(M, P)$  pour tout sous-groupe parabolique  $P$  de  $\bar{G}$  de facteur de Levi  $M$ , et la restriction de  $\theta$  à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  est égale au transfert de  $\theta$  à  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ .*

*Démonstration.* — La preuve est analogue à celles de [7, Proposition 7.1.12] et [7, Proposition 7.1.19]. Dans le cas où  $q \leq n - 1$ , il suffit de choisir une approximation de  $\beta$  commutant à  $e$  et  $e^\circ$  (cf. Proposition 1.20(ii)) et, pour le (ii), on peut remplacer [7, Corollary 3.3.21] par la proposition 2.2.  $\square$

**Remarque 2.4.** — On a en fait un résultat un peu plus général que 2.3(i). L'analogue de [7, Proposition 7.1.12] est :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^k(\beta, \bar{\Lambda}) \cap A &= \mathfrak{J}^k(\beta, \Lambda), \\ \mathfrak{H}^k(\beta, \bar{\Lambda}) \cap A &= \mathfrak{H}^k(\beta, \Lambda), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

On vérifie également que  $\mathfrak{n}_k(\beta, \bar{\Lambda}) \cap A = \mathfrak{n}_k(\beta, \Lambda)$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

**2.4.** Soit  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$ , et soit  $\bar{\Lambda}$  défini comme dans la section précédente. On lui associe deux  $\mathcal{O}_F$ -ordres :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(\beta, \Lambda) &= \mathfrak{J}(\beta, \bar{\Lambda}) \cap A, \\ \mathfrak{H}(\beta, \Lambda) &= \mathfrak{H}(\beta, \bar{\Lambda}) \cap A. \end{aligned}$$

De façon similaire au §2.1, chacun d'eux est filtré par une suite décroissante d'idéaux bilatères  $\mathfrak{J}^k(\beta, \Lambda)$  et  $\mathfrak{H}^k(\beta, \Lambda)$ . Ces idéaux bilatères sont en particulier des sous- $\mathfrak{B}(\Lambda)$ -bimodules de  $A$ .

On note  $J(\beta, \Lambda)$  (resp.  $H(\beta, \Lambda)$ ) le groupe multiplicatif de  $\mathfrak{J}(\beta, \Lambda)$  (resp. de  $\mathfrak{H}(\beta, \Lambda)$ ), et chacun d'eux est filtré par une suite décroissante de sous-groupes ouverts compacts  $J^k(\beta, \Lambda)$ ,  $H^k(\beta, \Lambda)$ . Si aucune confusion n'en résulte, on notera  $J^k$  plutôt que  $J^k(\beta, \Lambda)$ . La même remarque vaut pour  $\mathfrak{J}^k(\beta, \Lambda)$ ,  $\mathfrak{H}^k(\beta, \Lambda)$  et  $H^k(\beta, \Lambda)$ .

**Proposition 2.5.** — *Pour  $k \geq 0$ , les groupes  $J^k$  et  $H^k$  sont normalisés par  $J$  et  $\mathfrak{K}(\Lambda) \cap B^\times$ .*

*Démonstration.* — C'est une conséquence de [19, Proposition 3.43].  $\square$

**Définition 2.6.** — Pour un entier  $0 \leq m \leq q-1$ , on appelle *caractère simple de niveau  $m$*  attaché à la strate simple  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  la restriction à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  d'un caractère simple de  $\mathcal{C}(\bar{\Lambda}, m, \beta)$ . Ces caractères forment un ensemble noté  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ .

D'après le théorème 2.3, (voir aussi la remarque 2.4), cette définition coïncide avec celle de [19, §3.3] lorsque  $\Lambda$  est stricte. Dans le cas contraire, elle dépend *a priori* de  $(V^\circ, \Lambda^\circ)$ . On va voir que ce n'est pas le cas.

**Proposition 2.7.** — *Les groupes  $H^k(\beta, \Lambda)$  et  $J^k(\beta, \Lambda)$ , ainsi que l'ensemble  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ , sont indépendants du choix de  $(V^\circ, \Lambda^\circ)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(V^\bullet, \Lambda^\bullet)$  un autre couple comme au §2.3. On pose  $\Lambda^\dagger = \Lambda \oplus \Lambda^\circ \oplus \Lambda^\bullet$ . On note  $R^\circ$  la restriction de  $H^{m+1}(\beta, \Lambda \oplus \Lambda^\circ)$  à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  et  $S^\circ$  la restriction de  $H^{m+1}(\beta, \Lambda^\dagger)$  à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda \oplus \Lambda^\circ)$ . On définit  $R^\bullet$  et  $S^\bullet$  de façon analogue en substituant  $\Lambda^\bullet$  à  $\Lambda^\circ$ . D'après le théorème 2.3(ii), et puisque les applications de transfert sont surjectives, on peut écrire  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  comme l'image de  $\mathcal{C}(\Lambda^\dagger, m, \beta)$  par  $R^\circ \circ S^\circ = R^\bullet \circ S^\bullet$ . Ceci prouve que  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ , et *a fortiori*  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$ , sont indépendants du choix de  $(V^\circ, \Lambda^\circ)$  pour un entier  $0 \leq m \leq q-1$ .

Pour  $H^k(\beta, \Lambda)$  et  $J^k(\beta, \Lambda)$ , avec  $k \geq 1$ , on raisonne de façon analogue à partir du point (i) du théorème 2.3.  $\square$

**2.5.** On rappelle brièvement le procédé de changement de base non ramifié décrit en détail dans [19]. Soit  $L/F$  une extension non ramifiée maximale dans  $D$ . La  $L$ -algèbre  $A \otimes_F L$  est centrale simple déployée, et s'identifie canoniquement à  $\text{End}_L(V)$ . On note  $\Lambda_L$  la suite  $\Lambda$  vue comme une  $\mathcal{O}_L$ -suite de réseaux de  $V$ . On a une décomposition :

$$E \otimes_F L = E^1 \oplus \dots \oplus E^l$$

de la  $L$ -algèbre  $E \otimes_F L$  en une somme finie de  $l \geq 1$  extensions de  $L$ , où  $l$  est le pgcd de  $[L : F]$  et du degré résiduel de  $E/F$ . On note  $e^i$  l'idempotent de  $E \otimes_F L$  correspondant à la projection sur  $E^i$ , ce qui définit une décomposition de  $V$  en une somme de  $E \otimes_F L$ -modules  $V^i = e^i V$ , qui est conforme à  $\Lambda_L$ . On pose  $\Lambda_L^i = e^i \Lambda_L$  et  $\beta^i = e^i \beta$ . Le résultat suivant vient de [19] (cf. §2.3.4) :

**Théorème 2.8.** —  $[\Lambda_L^i, n, m, \beta^i]$  est une strate simple de  $\text{End}_L(V^i)$ .

**Remarque 2.9.** — Signalons une erreur dans la preuve qui en est donnée dans [19] (cf. Théorème 2.30). Avec les notations de *loc. cit.*, on n'a pas en général égalité entre  $k_0(e^i \beta, \Lambda^i)$  et  $k_0(e^i \beta, \bar{\Lambda}^i)$  (le corollaire 2.21 ne s'applique pas à  $e^i \beta$ ). Par contre, puisque le réseau  $\mathfrak{n}_k(e^i \beta, \bar{\Lambda}^i) \cap \mathbf{A}^i$  est égal à  $\mathfrak{n}_k(e^i \beta, e^i \Lambda)$  (cf. Proposition 2.20), on a  $k_0(e^i \beta, \Lambda^i) \leq k_0(e^i \beta, \bar{\Lambda}^i)$ , ce qui suffit pour conclure. Voici un cas où l'égalité n'a pas lieu. Choisissons par exemple  $E/F$  non ramifiée,  $\beta$  non minimal sur  $F$  (i.e.  $q \neq n$ ) et  $L$  contenant  $E$ . Alors chaque  $E^i$  est de degré 1 sur  $L$ , c'est-à-dire que  $\beta^i$  est scalaire, donc minimal sur  $L$ .

**2.6.** Dans ce paragraphe, on étend le transfert aux caractères simples attachés à une suite de réseaux (cf. §2.4).

**Proposition 2.10.** — La restriction de  $H^{m+1}(\beta, \bar{\Lambda})$  à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  induit une bijection de  $\mathcal{C}(\bar{\Lambda}, m, \beta)$  sur  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ .

*Démonstration.* — La preuve est analogue à celle de [19, Théorème 3.12]. Il suffit de remplacer [7, Proposition 3.2.4] par (2.1) et [7, Proposition 3.2.5] par la proposition 2.2(i) et, dans le cas où  $q \leq n - 1$ , de choisir une approximation de  $\beta$  commutant à  $e$  et  $e^\circ$  (cf. Proposition 1.20(ii)).  $\square$

Soit  $(k, \beta)$  une paire simple sur  $F$  et soit  $E = F(\beta)$  (cf. §1.8). On note  $[k, \beta]$  la strate simple de  $\text{End}_F(E)$  correspondant à  $(k, \beta)$ , c'est-à-dire correspondant à l'unique ordre héréditaire de  $\text{End}_F(E)$  normalisé par  $E^\times$  (voir par exemple [19, §2.3.3]), et on note  $\mathcal{C}(k, \beta)$  l'ensemble des caractères simples (de niveau  $k$ ) attaché à la strate simple  $[k, \beta]$ .

Soit  $[\Lambda, n, m, \iota\beta]$  une réalisation de  $(k, \beta)$  dans  $A$ . Lorsque la suite  $\Lambda$  est stricte, on a une bijection canonique de  $\mathcal{C}(k, \beta)$  dans  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \iota\beta)$  appelée application de transfert (cf. [19, §3.3.3]) et notée  $\tau_{\Lambda, m, \iota\beta}$ . Lorsque  $\Lambda$  est quelconque, on pose la définition suivante.

**Définition 2.11.** — L'application de transfert de  $\mathcal{C}(k, \beta)$  à  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \iota\beta)$  est l'application bijective composée de  $\tau_{\bar{\Lambda}, m, \iota\beta}^{-1}$  avec la restriction de  $H^{m+1}(\iota\beta, \bar{\Lambda})$  à  $H^{m+1}(\iota\beta, \Lambda)$ . On la note  $\tau_{\Lambda, m, \iota\beta}$ .

D'après le théorème 2.3, cette définition du transfert coïncide avec celle de [19, §3.3] lorsque  $\Lambda$  est stricte. Dans le cas contraire, elle dépend *a priori* de  $(V^\circ, \Lambda^\circ)$ . Un raisonnement analogue à celui de la preuve de la proposition 2.7 montre que ce n'est pas le cas.

Si  $[\Lambda, n, m, \iota\beta]$  et  $[\Lambda', n', m', \iota'\beta]$  sont deux réalisations d'une même paire, on définit une application de transfert entre  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \iota\beta)$  et  $\mathcal{C}(\Lambda', m', \iota'\beta)$  en composant  $\tau_{\Lambda, m, \iota\beta}^{-1}$  avec  $\tau_{\Lambda', m', \iota'\beta}$ . On a une propriété de transitivité évidente.

**Exemple 2.12.** — Dans la situation du §2.3, l'application de transfert de  $\mathcal{C}(\bar{\Lambda}, m, \beta)$  à  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  est la restriction de  $H^{m+1}(\beta, \bar{\Lambda})$  à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$ .

Voici une première propriété du transfert (qu'on peut qualifier de transfert *interne*, dans la mesure où on change la suite  $\Lambda$ , mais pas le groupe  $G$ ).

**Théorème 2.13.** — Soient  $[\Lambda, n, m, \beta]$  et  $[\Lambda', n', m', \beta]$  deux strates simples de  $A$ . On suppose que :

$$\left\lfloor \frac{m}{e(\Lambda|\mathcal{O}_E)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m'}{e(\Lambda'|\mathcal{O}_E)} \right\rfloor.$$

Alors pour tout  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ , le transfert de  $\theta$  à  $\mathcal{C}(\Lambda', m', \beta)$  coïncide avec  $\theta$  sur  $H^{m+1}(\beta, \Lambda) \cap H^{m'+1}(\beta, \Lambda')$ .

**Remarque 2.14.** — Dans le cas où  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont strictes, ce résultat, quoique annoncé dans [19] (cf. Exemple 3.54) et déjà utilisé dans [20], n'y est pas démontré. On donne ici une démonstration dans le cas général, lorsque  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont quelconques.

*Démonstration.* — La preuve s'effectue en quatre étapes.

(i) On choisit un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  et on note  $\theta'$  son transfert à  $\mathcal{C}(\Lambda', m', \beta)$ . On fixe un couple  $(V^\circ, \Lambda^\circ)$  pour  $\Lambda$  et un couple  $(V'^\circ, \Lambda'^\circ)$  pour  $\Lambda'$  (cf. §2.3), de telle sorte que  $V'^\circ = V^\circ$ . On pose  $\bar{\Lambda} = \Lambda \oplus \Lambda^\circ$  et  $\bar{\Lambda}' = \Lambda' \oplus \Lambda'^\circ$ . On note  $\bar{\theta}$  (resp.  $\bar{\theta}'$ ) le caractère simple de  $\mathcal{C}(\bar{\Lambda}, m, \beta)$  (resp. de  $\mathcal{C}(\bar{\Lambda}', m, \beta)$ ) qui prolonge  $\theta$  (resp.  $\theta'$ ). Ainsi  $\bar{\theta}'$  est le transfert de  $\bar{\theta}$ .

(ii) On suppose momentanément que  $A$  est déployée. Alors  $\bar{\theta}$  et  $\bar{\theta}'$  coïncident sur l'intersection  $H^{m+1}(\beta, \bar{\Lambda}) \cap H^{m'+1}(\beta, \bar{\Lambda}')$  d'après [7, Theorem 3.6.1]. Par restriction à  $G$ , les caractères  $\theta$  et  $\theta'$  coïncident sur  $H^{m+1}(\beta, \Lambda) \cap H^{m'+1}(\beta, \Lambda')$ .

(iii) La  $F$ -algèbre  $A$  est à nouveau quelconque, mais on suppose maintenant que  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont strictes. On choisit une extension non ramifiée  $L/F$  maximale dans  $D$  (cf. §2.5). Pour chaque  $1 \leq i \leq l$ , on a une strate simple  $[\Lambda_L^i, n, m, \beta^i]$  de  $\text{End}_L(V^i)$ . On fixe un caractère additif  $\psi_L : L \rightarrow \mathbb{C}^\times$  trivial sur  $\mathfrak{p}_L$  mais pas sur  $\mathcal{O}_L$ , dont la restriction à  $F$  est  $\psi_F$ . On choisit un caractère simple  $\theta^i \in \mathcal{C}(\Lambda_L^i, m, \beta^i)$  de telle sorte que la famille  $\{\theta^i\}$  définisse un caractère quasi-simple dont la restriction à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  soit  $\theta$  (cf. [19], §3.2.4). On note  $\theta'^i$  le transfert de  $\theta^i$  à  $\mathcal{C}(\Lambda'^i, m', \beta^i)$ . D'après [19, Théorème 3.53], la famille  $\{\theta'^i\}$  définit un caractère quasi-simple dont la restriction à  $H^{m'+1}(\beta, \Lambda')$  est  $\theta'$ . D'après (ii), les caractères  $\theta^i$  et  $\theta'^i$  coïncident sur  $H^{m+1}(\beta^i, \Lambda^i) \cap H^{m'+1}(\beta^i, \Lambda'^i)$ . Ceci prouve le théorème dans le cas où  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont strictes.

(iv) On revient maintenant au cas général. Les caractères  $\bar{\theta}$  et  $\bar{\theta}'$  coïncident sur l'intersection  $H^{m+1}(\beta, \bar{\Lambda}) \cap H^{m'+1}(\beta, \bar{\Lambda}')$  d'après (iii). Par restriction à  $G$ , les caractères  $\theta$  et  $\theta'$  coïncident sur  $H^{m+1}(\beta, \Lambda) \cap H^{m'+1}(\beta, \Lambda')$ .

Ceci termine la preuve du théorème 2.13. □

**2.7.** Dans ce paragraphe, on décrit le comportement de  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  par passage à une strate simple équivalente, puis par augmentation du niveau. On pose  $r = \lfloor q/2 \rfloor + 1$ .

**Proposition 2.15.** — Soit un entier  $0 \leq l \leq q$ , et soit  $[\Lambda, n, l, \gamma]$  une strate simple équivalente à  $[\Lambda, n, l, \beta]$ . L'application  $\theta \mapsto \theta\psi_{\gamma-\beta}$  induit des bijections :

$$\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta) \rightarrow \mathcal{C}(\Lambda, m, \gamma), \quad \lfloor l/2 \rfloor \leq m \leq q-1.$$

*Démonstration.* — Par transfert de  $\Lambda$  à  $\bar{\Lambda}$ , on se ramène au cas où  $\Lambda$  est stricte, puis on applique la proposition 2.1.  $\square$

**Proposition 2.16.** — Soit  $[\Lambda, n, m, \beta]$  une strate simple de  $A$ .

(i) On suppose que  $m \leq \lfloor q/2 \rfloor$ . Si deux caractères de  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  coïncident sur  $H^r(\beta, \Lambda)$ , ils sont tordus l'un de l'autre par un caractère de  $U_{m+1}(\Lambda) \cap B^\times$  trivial sur  $U_r(\Lambda) \cap B^\times$  et se factorisant par  $N_{B/E}$ .

(ii) On suppose que  $m \leq q-2$ . La restriction de  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  à  $\mathcal{C}(\Lambda, m+1, \beta)$  est surjective.

*Démonstration.* — Par transfert de  $\Lambda$  à  $\bar{\Lambda}$ , on se ramène au cas où  $\Lambda$  est stricte, puis on applique la proposition 2.2.  $\square$

On termine par le résultat suivant.

**Théorème 2.17.** — Soit  $V = V^1 \oplus \dots \oplus V^l$  une décomposition de  $V$  en sous- $E \otimes_{\mathbb{F}} D$ -modules, qui soit conforme à  $\Lambda$ . Soit  $M$  le sous-groupe de Levi de  $G$  correspondant. Soit un entier  $1 \leq i \leq l$ .

(i) Pour  $k \geq 0$ , on a :

$$J^k(\beta, \Lambda) \cap \text{Aut}_D(V^i) = J^k(\beta, \Lambda^i), \quad H^k(\beta, \Lambda) \cap \text{Aut}_D(V^i) = H^k(\beta, \Lambda^i).$$

(ii) Pour  $0 \leq m \leq q-1$  et pour  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ , la paire  $(H^{m+1}(\beta, \Lambda), \theta)$  est décomposée par  $(M, P)$  pour tout sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$  de facteur de Levi  $M$ , et la restriction de  $\theta$  à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda^i)$  est égale au transfert de  $\theta$  à  $\mathcal{C}(\Lambda^i, m, \beta)$ .

*Démonstration.* — On fixe un couple  $(V^\circ, \Lambda^\circ)$  comme au §2.3, et on applique le théorème 2.3 à la décomposition  $\Lambda \oplus \Lambda^\circ \oplus \Lambda^\circ = (\Lambda^i \oplus \Lambda^\circ) \oplus ((\bigoplus_{j \neq i} \Lambda^j) \oplus \Lambda^\circ)$ . D'abord, on a :

$$J^k(\beta, \Lambda \oplus \Lambda^\circ \oplus \Lambda^\circ) \cap \text{Aut}_D(V^i \oplus V^\circ) = J^k(\beta, \Lambda^i \oplus \Lambda^\circ).$$

Si on projette sur  $\text{Aut}_D(V^i)$ , on obtient l'égalité voulue pour  $J^k$ . Avec un raisonnement analogue, on obtient l'égalité pour  $H^k$ . Ensuite, soit  $\theta$  un caractère simple de  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ , et soit  $\tilde{\theta} \in \mathcal{C}(\Lambda \oplus \Lambda^\circ \oplus \Lambda^\circ, m, \beta)$  prolongeant  $\theta$ . La restriction de  $\tilde{\theta}$  à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda^i \oplus \Lambda^\circ)$  est égale au transfert de  $\theta$  à  $\mathcal{C}(\Lambda^i \oplus \Lambda^\circ, m, \beta)$ . Si on restreint à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda^i)$ , on obtient l'égalité voulue entre restriction de  $\theta$  à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda^i)$  et transfert de  $\theta$  à  $\mathcal{C}(\Lambda^i, m, \beta)$ . Enfin, il reste à prouver que  $\theta$  est trivial sur chaque sous-groupe de la forme  $1 + \text{Hom}(V^i, V^j)$ , avec  $i \neq j$ . C'est vrai pour  $\tilde{\theta}$  sur  $1 + \text{Hom}(V^i \oplus V^\circ, (\bigoplus_{j \neq i} V^j) \oplus V^\circ)$ , et on obtient le résultat par restriction à  $1 + \text{Hom}(V^i, V^j)$ .  $\square$

**2.8.** Soit  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$  et soit  $q = -k_0(\beta, \Lambda)$ . On pose  $s = \lceil q/2 \rceil$ . Pour  $k \geq 1$ , on pose :

$$\mathfrak{m}_k(\beta, \Lambda) = \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-q+k}(\beta, \Lambda) + \mathfrak{J}^s(\beta, \Lambda)$$

et on pose  $\Omega_k(\beta, \Lambda) = 1 + \mathfrak{m}_k(\beta, \Lambda)$ , qui est un sous-groupe ouvert compact de  $U_{k_0}(\Lambda)$ , avec  $k_0 = \min\{k, s\}$ . Souvent, on notera simplement  $\Omega_k(\Lambda)$ , ou même  $\Omega_k$ . Remarquer que la convention de notation est différente de celle utilisée dans [19, 24] (dont le  $\mathfrak{m}_k$  correspond à notre  $\mathfrak{m}_{q-k}$ ).

Soit  $(V^\circ, \Lambda^\circ)$  un couple comme au §2.3, dont on reprend les notations. L'objectif de ce paragraphe et du suivant est de prouver le résultat suivant.

**Proposition 2.18.** — *Soit  $k \geq 1$ . On a :*

$$\Omega_k(\beta, \bar{\Lambda}) \bar{B}^\times \Omega_k(\beta, \bar{\Lambda}) \cap G = \Omega_k(\beta, \Lambda) B^\times \Omega_k(\beta, \Lambda).$$

La démonstration se fait, comme dans [19, §3.1] (cf. [19, Lemme 3.7]), par changement de base non ramifié.

**Lemme 2.19.** — Soit  $k \geq 1$ . Pour tout  $b \in B^\times$ , on a :

$$\Omega_k(\Lambda)b\Omega_k(\Lambda) \cap B^\times = (\Omega_k(\Lambda) \cap B^\times) b (\Omega_k(\Lambda) \cap B^\times).$$

*Démonstration.* — Si l'on pose  $k_0 = \min\{k, s\}$ , c'est une conséquence de :

$$U_{k_0}(\Lambda) \cap B^\times \subset \Omega_k(\Lambda) \subset U_{k_0}(\Lambda)$$

et de la propriété d'intersection simple [19, Corollaire 3.3]. La majoration est immédiate. Pour la minoration, il faut remarquer d'une part que  $\mathfrak{B}(\Lambda)$  est inclus dans  $\mathfrak{J}(\beta, \Lambda)$ , ce qui implique  $\mathfrak{a}_{k_0}(\Lambda) \cap B \subset \mathfrak{J}^s(\beta, \Lambda)$  dans le cas où  $k \geq s$ , et d'autre part que  $\mathfrak{a}_{k_0}(\Lambda) \cap B$  est inclus dans  $\mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-q+k}(\beta, \Lambda)$  dans le cas où  $k \leq s$ .  $\square$

**Lemme 2.20.** — On a  $\Omega_k(\beta, \bar{\Lambda}) \cap G = \Omega_k(\beta, \Lambda)$  pour  $k \geq 1$ .

*Démonstration.* — On vérifie que :

$$\mathfrak{a}_k(\bar{\Lambda}) \cap \mathfrak{n}_{-q+k}(\beta, \bar{\Lambda}) \cap A = \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-q+k}(\beta, \Lambda).$$

Le résultat est une conséquence de la définition de  $\mathfrak{J}^k(\beta, \Lambda)$  et du fait que, si  $R, S$  sont des sous- $\mathfrak{B}(\bar{\Lambda})$ -bimodules de  $\bar{A}$ , on a  $(R+S) \cap A = R \cap A + S \cap A$ .  $\square$

**2.9.** Soit  $F^\sharp$  une extension finie non ramifiée de  $F$ , de degré premier au degré résiduel de  $E/F$  et à la dimension de  $D$  sur  $F$ , et de groupe de Galois noté  $\mathcal{G}$ . On pose :

$$A^\sharp = A \otimes_F F^\sharp, \quad V^\sharp = V \otimes_F F^\sharp, \quad \Lambda^\sharp = \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{F^\sharp} \quad D^\sharp = D \otimes_F F^\sharp.$$

Ainsi  $F^\sharp[\beta]$  est un corps,  $D^\sharp$  est une  $F^\sharp$ -algèbre à division,  $V^\sharp$  est un  $A^\sharp$ -module simple et  $A^\sharp$  s'identifie naturellement à  $\text{End}_{D^\sharp}(V^\sharp)$ .

**Proposition 2.21.** — La strate  $[\Lambda^\sharp, n, r, \beta \otimes 1]$  de  $A^\sharp$  est simple.

*Démonstration.* — La démonstration suit formellement [19, §2] (voir notamment la proposition 2.9 et les corollaires 2.10 et 2.11), le fait que  $F^\sharp/F$  déploie  $A$  n'y jouant aucun rôle.  $\square$



On suppose en outre que l'extension  $F^\sharp/F$  est non triviale, et on choisit dans  $F^\sharp$  une racine de l'unité  $\xi$ , non triviale et d'ordre premier à la caractéristique résiduelle  $p$  de  $F$ . On note  $\Delta$  le groupe cyclique engendré par  $\xi \cdot e + e^\circ$  et  $M^\sharp$  son centralisateur dans  $\text{Aut}_{D^\sharp}(\bar{V}^\sharp)$ , c'est-à-dire le groupe des points fixes de  $\text{Aut}_{D^\sharp}(\bar{V}^\sharp)$  par  $\Delta$ . Si on identifie  $A$  à la  $F$ -algèbre  $A^{\mathcal{G}}$  des  $\mathcal{G}$ -invariants de  $A^\sharp$ , on a  $M^{\mathcal{G}} = M$ .

**Remarque 2.22.** — Ce procédé permet de calculer l'intersection de certaines parties de  $\bar{G}$  avec  $M$  par des méthodes de descente comme en [19, §2.4]. Le changement de base est nécessaire dans le cas où le corps résiduel de  $F$  n'a que deux éléments.

*Preuve de la proposition 2.18.* — On note  $\bar{B}^\sharp$  le commutant de  $E$  dans  $\bar{A}^\sharp$ . Si on applique le lemme 2.19 à la strate simple  $[\bar{\Lambda}^\sharp, n, 0, \beta]$ , alors, compte tenu de [19, Proposition 2.36] et de [19, Lemme 2.35], on obtient :

$$\Omega_k(\bar{\Lambda}^\sharp)\bar{B}^{\sharp\times}\Omega_k(\bar{\Lambda}^\sharp) \cap M^\sharp = (\Omega_k(\bar{\Lambda}^\sharp) \cap M^\sharp) (\bar{B}^{\sharp\times} \cap M^\sharp) (\Omega_k(\bar{\Lambda}^\sharp) \cap M^\sharp)$$

puis, en projetant sur  $A^{\sharp\times}$  :

$$(2.3) \quad \Omega_k(\bar{\Lambda}^\sharp)\bar{B}^{\sharp\times}\Omega_k(\bar{\Lambda}^\sharp) \cap A^{\sharp\times} = \Omega_k(\Lambda^\sharp)B^{\sharp\times}\Omega_k(\Lambda^\sharp).$$

Il reste à calculer les points fixes de (2.3) par  $\mathcal{G}$ . Pour le membre de gauche, on applique [19, Lemme 2.35] en tenant compte de [19, Proposition 2.41] et du lemme 2.19 appliqué à la strate simple  $[\bar{\Lambda}^\sharp, n, 0, \beta]$ . On obtient :

$$\Omega_k(\bar{\Lambda}^\sharp)\bar{B}^{\sharp\times}\Omega_k(\bar{\Lambda}^\sharp) \cap G = \Omega_k(\bar{\Lambda})\bar{B}^\times\Omega_k(\bar{\Lambda}) \cap G.$$

Pour le membre de droite, on applique [19, Lemme 2.35] en tenant compte de [19, Proposition 2.41] et du lemme 2.19 appliqué à la strate simple  $[\Lambda^\sharp, n, 0, \beta]$ . On obtient :

$$\Omega_k(\Lambda^\sharp)B^{\sharp\times}\Omega_k(\Lambda^\sharp) \cap G = \Omega_k(\Lambda)B^\times\Omega_k(\Lambda),$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

**2.10.** On fixe un entier  $0 \leq m \leq q-1$  et un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ . On rappelle que, si  $K$  est un sous-groupe de  $G$ , et si  $\chi$  est un caractère de  $K$ , l'entrelacement de  $\chi$  dans  $G$ , noté  $I_G(\chi)$ , est l'ensemble des éléments  $g \in G$  pour lesquels  $\chi$  et son caractère conjugué  $\chi^g$  coïncident sur  $K \cap g^{-1}Kg$ .

**Théorème 2.23.** — On a  $I_G(\theta) = \Omega_{q-m}(\beta, \Lambda)B^\times\Omega_{q-m}(\beta, \Lambda)$ .

*Démonstration.* — La preuve est analogue à celle de [24, Proposition 2.5]. Soit  $\bar{\theta} \in \mathcal{C}(\bar{\Lambda}, m, \beta)$  le caractère prolongeant  $\theta$ . D'après [19, Théorème 3.50], [24, Lemma 2.1] et la proposition 2.17 appliquée à (2.2), on a :

$$\begin{aligned} I_{\bar{G}}(\bar{\theta}_{|\mathbb{H}^{m+1}(\beta, \bar{\Lambda}) \cap M}) \cap M &= I_{\bar{G}}(\bar{\theta}) \cap M \\ &= \Omega_{q-m}(\bar{\Lambda})\bar{B}^\times\Omega_{q-m}(\bar{\Lambda}) \cap M. \end{aligned}$$

On applique la proposition 2.18, puis on projette sur  $G$ , ce qui donne :

$$I_{\bar{G}}(\bar{\theta}_{|\mathbb{H}^{m+1}(\beta, \bar{\Lambda}) \cap M}) \cap G = \Omega_{q-m}(\beta, \Lambda)B^\times\Omega_{q-m}(\beta, \Lambda).$$

Le membre de gauche vaut  $I_G(\theta)$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

**Proposition 2.24.** — Tout caractère simple de  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  est normalisé par  $(\mathfrak{K}(\Lambda) \cap B^\times)\Omega_{q-m}(\beta, \Lambda)$ .

*Démonstration.* — Soit  $\bar{\theta} \in \mathcal{C}(\bar{\Lambda}, m, \beta)$  le caractère prolongeant  $\theta$ . D'après le théorème 2.23 et [19, Théorème 3.50], le caractère  $\bar{\theta}$  est normalisé par le groupe  $(\mathfrak{K}(\bar{\Lambda}) \cap \bar{B}^\times)\Omega_{q-m}(\bar{\Lambda})$  et  $\theta$  est entrelacé par  $(\mathfrak{K}(\Lambda) \cap B^\times)\Omega_{q-m}(\Lambda)$ .  $\square$

**2.11.** Soit  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$ . On pose  $\tilde{A} = \text{End}_F(V)$ , qu'on identifie à  $A \otimes_F \text{End}_A(V)$ .

**Définition 2.25.** — Une *corestriction modérée* sur  $A$  relative à  $E/F$  est un homomorphisme de  $B$ -bimodules  $s : A \rightarrow B$  tel que  $\tilde{s} = s \otimes \text{id}_{\text{End}_A(V)}$  soit une corestriction modérée sur  $\tilde{A}$  relative à  $E/F$  au sens de [7, Définition 1.3.3].

Bien entendu, lorsque  $A$  est déployée sur  $F$ , cette définition coïncide avec celle de [7], puisque, dans ce cas, on a  $\text{End}_A(V) = F$ .

D'après [4, Lemma 4.2.1], on a un moyen de construire des corestrictions modérées sur  $A$  relatives à  $E/F$ , ce qui prouve qu'il en existe. On a les propriétés suivantes.

**Proposition 2.26.** — *Soit  $s$  une corestriction modérée sur  $A$  relative à  $E/F$ .*

(i) *Si  $s'$  est une corestriction modérée sur  $A$  relative à  $E/F$ , il existe  $u \in \mathcal{O}_E^\times$  tel que  $s' = us$ .*

(ii) *Soit  $V = V^1 \oplus V^2$  une décomposition de  $V$  en sous- $E \otimes_F D$ -modules, qui soit conforme à  $\Lambda$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ , la restriction  $s_i$  de  $s$  à  $A^i$  est une corestriction modérée sur  $A^i$  relative à  $E/F$ .*

*Démonstration.* — Les deux sont vrais lorsque la  $F$ -algèbre  $A$  est déployée. Pour (i), il existe donc  $u \in \mathcal{O}_E^\times$  tel que  $\tilde{s}' = u\tilde{s}$ , ce qui implique  $s' = us$ . Pour (ii), la restriction  $\tilde{s}_i$  de  $\tilde{s}$  à  $\tilde{A}^i$  est une corestriction modérée sur  $\tilde{A}^i$  relative à  $E/F$  égale à  $s_i \otimes \text{id}_{\text{End}_{A^i}(V^i)}$ .  $\square$

Soit  $V = V^1 \oplus V^2$  une décomposition de  $V$  en sous- $E \otimes_F D$ -modules, qui soit conforme à  $\Lambda$ . On note  $M$  le sous-groupe de Levi correspondant. Si  $\mathfrak{l}$  est un sous- $\mathcal{O}_F$ -réseau de  $A$ , on pose  $\mathfrak{l}^{ij} = \mathfrak{l} \cap A^{ij}$  pour  $i, j \in \{1, 2\}$ .

Soit  $s$  une corestriction modérée sur  $A$  relative à  $E/F$ . Pour  $x \in A$ , on pose  $a_\beta(x) = \beta x - x\beta$ . On pose  $\psi_A = \psi_F \circ \text{tr}_{A/F}$ . Pour toute partie  $R$  de  $A$ , on note :

$$R^* = \{a \in A \mid \psi_A(ax) = 1, x \in R\}$$

le dual de  $R$  relativement à  $\psi_A$ .

**Proposition 2.27.** — *Pour  $0 \leq m \leq q - 1$ , la suite :*

$$(2.4) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{a}_{q-m}(\Lambda) \cap B \rightarrow \mathfrak{m}_{q-m}(\beta, \Lambda) \xrightarrow{a_\beta} (\mathfrak{H}^{m+1}(\beta, \Lambda))^* \xrightarrow{s} \mathfrak{a}_{-m}(\Lambda) \cap B \rightarrow 0$$

*est exacte. Si on désigne cette suite par  $0 \rightarrow \mathfrak{l}_1 \rightarrow \mathfrak{l}_2 \rightarrow \mathfrak{l}_3 \rightarrow \mathfrak{l}_4 \rightarrow 0$ , alors la suite :*

$$(2.5) \quad 0 \rightarrow h^{-1}\mathfrak{l}_1^{ij}h + \mathfrak{l}_1^{ij} \rightarrow h^{-1}\mathfrak{l}_2^{ij}h + \mathfrak{l}_2^{ij} \rightarrow h^{-1}\mathfrak{l}_3^{ij}h + \mathfrak{l}_3^{ij} \rightarrow h^{-1}\mathfrak{l}_4^{ij}h + \mathfrak{l}_4^{ij} \rightarrow 0$$

*est exacte pour tout  $h \in B^\times \cap M$  et tous  $i, j \in \{1, 2\}$ .*

*Démonstration.* — On note  $\tilde{\Lambda}$  la  $\mathcal{O}_F$ -suite de  $V$  sous-jacente à  $\Lambda$ . On note  $\tilde{B}$  le commutant de  $E$  dans  $\tilde{A}$ , on note  $*$  la dualité relativement à  $\psi_F \circ \text{tr}_{\tilde{A}/F}$ , on note  $\tilde{a}_\beta$  l'application  $x \mapsto \beta x - x\beta$  définie sur  $\tilde{A}$  et on pose  $\tilde{s} = s \otimes \text{id}_{\text{End}_A(V)}$ . La strate  $[\tilde{\Lambda}, n, m, \beta]$  est une strate simple de  $\tilde{A}$  de même exposant critique que  $[\Lambda, n, m, \beta]$  (cf. [19, 2.23]). On lui applique [9, Lemma 6.3]. La suite :

$$(2.6) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{a}_{q-m}(\tilde{\Lambda}) \cap \tilde{B} \rightarrow \mathfrak{m}_{q-m}(\beta, \tilde{\Lambda}) \xrightarrow{\tilde{a}_\beta} (\mathfrak{H}^{m+1}(\beta, \tilde{\Lambda}))^* \xrightarrow{\tilde{s}} \mathfrak{a}_{-m}(\tilde{\Lambda}) \cap \tilde{B} \rightarrow 0$$

est exacte. Si on désigne cette suite par  $0 \rightarrow \tilde{l}_1 \rightarrow \tilde{l}_2 \rightarrow \tilde{l}_3 \rightarrow \tilde{l}_4 \rightarrow 0$ , alors la suite :

$$(2.7) \quad 0 \rightarrow h^{-1}\tilde{l}_1^{ij}h + \tilde{l}_1^{ij} \rightarrow h^{-1}\tilde{l}_2^{ij}h + \tilde{l}_2^{ij} \rightarrow h^{-1}\tilde{l}_3^{ij}h + \tilde{l}_3^{ij} \rightarrow h^{-1}\tilde{l}_4^{ij}h + \tilde{l}_4^{ij} \rightarrow 0$$

est exacte pour tout  $h \in B^\times \cap M$  et tous  $i, j \in \{1, 2\}$ .

**Lemme 2.28.** — On a  $\tilde{l}_k \cap A = \mathfrak{l}_k$  pour  $1 \leq k \leq 4$ .

*Démonstration.* — Pour  $k \in \{1, 4\}$ , c'est immédiat. Pour les autres cas, on choisit un couple  $(V^\circ, \Lambda^\circ)$  comme au §2.3. Par définition (cf. [19, (54) et (64)] et §2.3), on a :

$$\mathfrak{H}^{m+1}(\beta, \Lambda) = \mathfrak{H}^{m+1}(\beta, \tilde{\Lambda} \oplus \tilde{\Lambda}^\circ) \cap A$$

et le membre de droite est égal à  $\mathfrak{H}^{m+1}(\beta, \tilde{\Lambda}) \cap A$  d'après (2.4). On en déduit que  $\tilde{l}_3 \cap A = \mathfrak{l}_3$  à l'aide de [19, Lemme 2.45]. Un raisonnement analogue permet d'obtenir  $\tilde{l}_2 \cap A = \mathfrak{l}_2$ .  $\square$

Pour terminer la démonstration de la proposition 2.27, il reste à vérifier que l'exactitude de (2.4) et (2.5) est conservée par restriction à  $A$ . Ceci se fait, comme dans [4, §4], en choisissant une extension non ramifiée  $L/F$  maximale dans  $D$ , et en appliquant successivement le foncteur des  $L$ -invariants puis le foncteur des  $\text{Gal}(L/F)$ -invariants (voir aussi [19, §2.4]).  $\square$

De façon analogue, on démontre à partir de [7, Corollary 1.4.10] :

**Proposition 2.29.** — Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , la suite :

$$0 \rightarrow \mathfrak{a}_{q+k}(\Lambda) \cap B \rightarrow \mathfrak{a}_{q+k}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_k(\beta, \Lambda) \xrightarrow{a_\beta} \mathfrak{a}_k(\Lambda) \xrightarrow{s} \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap B \rightarrow 0$$

est exacte.

**2.12.** On établit une propriété de non-dégénérescence des caractères simples, qui généralise [7, Theorem 3.4.1]. Pour  $x, y \in G$ , on note  $[x, y]$  le commutateur de  $x$  et  $y$ .

**Lemme 2.30.** — Soit  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  avec  $\lfloor q/2 \rfloor \leq m \leq q - 1$ . Soient deux entiers  $k, l \geq 1$  tels que  $k + l \geq m + 1$  et  $k + 2l \geq q + 1$ . On suppose qu'on est dans l'une des situations suivantes :

- (1)  $x \in 1 + \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{k-q}(\beta, \Lambda)$  et  $y \in 1 + \mathfrak{a}_l(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{l-q}(\beta, \Lambda)$ .
- (2)  $x \in 1 + \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{k-q}(\Lambda)$  et  $y \in J^l(\beta, \Lambda)$ .
- (3)  $x \in J^k(\beta, \Lambda)$  et  $y \in J^l(\beta, \Lambda)$ .

Alors  $[x, y] \in H^{m+1}(\beta, \Lambda)$ , et on a  $\theta([x, y]) = \psi_{x^{-1}\beta x - \beta}(y)$ .

*Démonstration.* — Par transfert de  $\Lambda$  à  $\bar{\Lambda}$  (cf. §2.3), on se ramène au cas où  $\Lambda$  est stricte. Puis on applique [19, Lemmes 3.25–3.27].  $\square$

**Proposition 2.31.** — Soit  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  avec  $m \leq \lfloor q/2 \rfloor$ . L'application :

$$(x, y) \mapsto \theta([x, y]), \quad x, y \in J^{m+1},$$

induit une forme alternée non dégénérée :

$$\mathbf{k}_\theta : J^{m+1}/H^{m+1} \times J^{m+1}/H^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

*Démonstration.* — La preuve est analogue à celle de [19, Proposition 3.9]. Il suffit de remplacer [7, Theorem 3.4.1] par [19, Théorème 3.52] et [7, Proposition 3.2.12] par le lemme 2.30.  $\square$

### 3. Le processus de raffinement

Soit  $A$  une  $F$ -algèbre centrale simple, soit  $G$  son groupe multiplicatif et soit  $\pi$  une représentation irréductible de niveau non nul de  $G$ . Dans cette section, on prouve que trois cas seulement peuvent se produire (cf. Théorème 3.23) : (a) ou bien il existe une strate simple  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  de  $A$ , avec  $\Lambda$  stricte, telle que  $\pi$  contienne un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ , (b) ou bien  $\pi$  contient une strate scindée (cf. Définition 3.9), (c) ou bien  $\pi$  contient un caractère scindé (cf. Définition 3.22).

**3.1.** On fixe un  $A$ -module à gauche simple  $V$ . L'ensemble  $\mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$  des  $\mathcal{O}_D$ -suites de réseaux de  $V$  est muni d'une structure affine provenant de celle de l'immeuble de  $G$  sur  $F$ , qu'on peut décrire de la façon suivante (voir [2]). Dans ce paragraphe, on note  $n$  la dimension de  $V$  sur  $D$ .

**Remarque 3.1.** — Sauf mention explicite du contraire, dans ce qui suit, les suites de réseaux sont des  $\mathcal{O}_D$ -suites, et on note  $e(\Lambda)$  la période sur  $\mathcal{O}_D$  d'une suite  $\Lambda$ .

À chaque base  $b$  de  $V$  sur  $D$  correspond d'une part un isomorphisme  $V \simeq D^n$  de  $D$ -espaces vectoriels à droite, d'autre part l'ensemble  $\mathcal{L}^b(V, \mathcal{O}_D)$  des  $\mathcal{O}_D$ -suites de réseaux décomposées par  $b$ . Pour chaque entier  $1 \leq i \leq n$ , on a une application affine  $a_i : \mathcal{L}^b(V, \mathcal{O}_D) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour  $\Lambda \in \mathcal{L}^b(V, \mathcal{O}_D)$  et  $k \in \mathbb{R}$ , on ait :

$$(3.1) \quad \Lambda_k = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{p}_D^{\lceil k/e(\Lambda) - a_i(\Lambda) \rceil}.$$

Cette base permet d'identifier les  $F$ -algèbres  $A$  et  $M_n(D)$ , donc de faire de  $A$  un  $D$ -espace vectoriel à droite par transport de structure. Pour chaque couple d'entiers  $(i, j)$ , on pose  $\alpha_{ij} = a_i - a_j$ . Pour  $\Lambda \in \mathcal{L}^b(V, \mathcal{O}_D)$ , la  $\mathcal{O}_F$ -suite  $\mathfrak{a}(\Lambda)$  est munie d'une structure de  $\mathcal{O}_D$ -suite et, pour  $k \in \mathbb{R}$ , on a :

$$(3.2) \quad \mathfrak{a}_k(\Lambda) = \bigoplus_{i,j=1}^n \mathfrak{p}_D^{\lceil k/e(\Lambda) - \alpha_{ij}(\Lambda) \rceil}.$$

En d'autres termes, un élément  $a \in A$  appartient à  $\mathfrak{a}_k(\Lambda)$  si et seulement si, pour chaque  $1 \leq i, j \leq n$ , la valuation normalisée de  $a_{ij}$  est supérieure ou égale à  $k/e(\Lambda) - \alpha_{ij}(\Lambda)$ .

**3.2.** On établit une liste de lemmes techniques. La remarque 3.1 vaut toujours.

**Lemme 3.2.** — Soit  $\Lambda \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$  et soit un entier  $m \in \mathbb{Z}$ . Il existe une suite  $\Lambda' \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$  stricte et un entier  $m' \in \mathbb{Z}$  tels qu'on ait :

$$(3.3) \quad \mathfrak{a}_{-m}(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_{-m'}(\Lambda'), \quad \frac{m'}{e(\Lambda')} \leq \frac{m}{e(\Lambda)}.$$

*Démonstration.* — La démonstration est très proche de celle de [13, Proposition 2.3]. On se contente d'en donner les grandes lignes, et on renvoie à *loc. cit.* pour les détails. D'abord, on remarque que, pour  $i \in \mathbb{Z}$ , l'application naturelle :

$$(3.4) \quad \mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)/\mathfrak{a}_{-m+1}(\Lambda) \rightarrow \bigoplus_{l=0}^{e(\Lambda)-1} \text{Hom}_{k_D}(\Lambda_{i+l}/\Lambda_{i+l+1}, \Lambda_{i+l-m}/\Lambda_{i+l-m+1})$$

est un isomorphisme de  $k_D$ -espaces vectoriels. Donc si  $\Lambda_i \neq \Lambda_{i+1}$ , on a l'égalité  $\mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)\Lambda_i = \Lambda_{i-m}$ . En d'autres termes, la partie  $\mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)$  est *taut* par rapport à  $\Lambda$  au sens de [13], c'est-à-dire que  $\mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)$  opère sur  $\mathcal{L} = \{\Lambda_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ . Comme  $\Lambda$  n'est pas nécessairement stricte,  $\mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)$  n'est pas nécessairement *completely taut*. On note  $\mathcal{L}'$  la plus grande partie de  $\mathcal{L}$  sur laquelle l'action de  $\mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)$  est bijective, et on choisit une  $\mathcal{O}_D$ -suite stricte  $\Lambda'$  de classe de translation  $\mathcal{L}'$ . Soit  $m' \in \mathbb{Z}$  l'entier défini par :

$$(3.5) \quad \mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)\Lambda'_i = \Lambda'_{i-m'}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

En raisonnant comme dans la preuve de [13, Proposition 2.3], on obtient :

$$\frac{m'}{e(\Lambda')} \leq \frac{m}{e(\Lambda)}.$$

D'après (3.5), on a l'inclusion cherchée.  $\square$

**Remarque 3.3.** — (3.3) reste vrai si l'on remplace  $m'$  par  $me(\Lambda')/e(\Lambda) \in \mathbb{Q}$ .

**Lemme 3.4.** — Soient  $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$ , et soient  $m, m' \in \mathbb{Q}$ . On pose :

$$(3.6) \quad \Lambda(t) = (1-t)\Lambda + t\Lambda', \quad e(t) = e(\Lambda(t)), \quad \frac{m(t)}{e(t)} = (1-t)\frac{m}{e(\Lambda)} + t\frac{m'}{e(\Lambda')}$$

pour  $t \in [0, 1]$  rationnel. Alors :

$$\mathfrak{a}_{-m}(\Lambda) \cap \mathfrak{a}_{-m'}(\Lambda') \subset \mathfrak{a}_{-m(t)}(\Lambda(t)).$$

*Démonstration.* — On choisit une base de  $V$  sur  $D$  décomposant  $\Lambda$  et  $\Lambda'$ . Pour  $1 \leq i, j \leq n$ , on pose :

$$(3.7) \quad \rho_{ij}(t) = -\frac{m(t)}{e(t)} - \alpha_{ij}(\Lambda(t)),$$

qui est une application affine. Compte tenu de (3.2), il suffit de prouver que :

$$\max([\rho_{ij}(0)], [\rho_{ij}(1)]) \geq [(1-t)\rho_{ij}(0) + t\rho_{ij}(1)],$$

ce qui est immédiat.  $\square$

**Corollaire 3.5.** — *Sous les hypothèses de 3.4, on suppose que :*

$$\mathfrak{a}_{-m}(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_{-m'}(\Lambda').$$

Alors, pour tous  $0 \leq s \leq t \leq 1$  rationnels, on a :

$$\mathfrak{a}_{-m(s)}(\Lambda(s)) \subset \mathfrak{a}_{-m(t)}(\Lambda(t)).$$

*Démonstration.* — L'hypothèse implique que  $\rho_{ij}(0) \geq \rho_{ij}(1)$ , c'est-à-dire que chacune des applications affines  $\rho_{ij}$  est décroissante. Le résultat s'ensuit.  $\square$

**Corollaire 3.6.** — *Soient  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$  et soit  $m \in \mathbb{Q}$ . On pose :*

$$\Lambda' = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \Lambda_i, \quad \frac{m'}{e(\Lambda')} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \frac{m}{e(\Lambda_i)}.$$

Alors :

$$\bigcap_{i=1}^r \mathfrak{a}_m(\Lambda_i) \subset \mathfrak{a}_{m'}(\Lambda').$$

*Démonstration.* — Par récurrence sur  $r$  à partir du lemme 3.4.  $\square$

**Lemme 3.7.** — *Soient  $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$ , et soient  $m, m' \in \mathbb{Z}$ . Il existe des couples  $(\Lambda_0, m_0), \dots, (\Lambda_l, m_l) \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D) \times \mathbb{Q}$  tels que :*

$$\mathfrak{a}_{[m_{k+1}]+1}(\Lambda_{k+1}) \subset \mathfrak{a}_{m_k}(\Lambda_k), \quad 0 \leq k \leq l-1,$$

et tels que  $(\Lambda_0, m_0) = (\Lambda, m)$  et  $(\Lambda_l, m_l) = (\Lambda', m')$ .

*Démonstration.* — On choisit une base de  $V$  sur  $D$  décomposant  $\Lambda$  et  $\Lambda'$ , et on reprend les notations (3.6) et (3.7). Chaque  $\rho_{ij}$  est une application affine, de sorte que  $t \mapsto [\rho_{ij}(t)]$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Donc, compte tenu de (3.2), l'application :

$$(3.8) \quad t \mapsto \mathfrak{a}_{m(t)}(\Lambda(t))$$



ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur l'intervalle rationnel  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . On choisit une suite strictement croissante  $t_0, \dots, t_l$  de cet intervalle telle que les réseaux  $\mathfrak{a}_{m(t_k)}(\Lambda(t_k))$  décrivent les valeurs successives prises par (3.8). On pose  $\Lambda_k = \Lambda(t_k)$  et  $m_k = m(t_k)$ . Pour prouver l'inclusion, il suffit de montrer que :

$$\lceil \rho_{ij}(t_k) \rceil \leq \lfloor \rho_{ij}(t_{k+1}) \rfloor + 1$$

pour  $1 \leq i, j \leq m$  et  $0 \leq k \leq l - 1$ , ce qui est immédiat.  $\square$

**Lemme 3.8.** — Soient  $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D)$ , soient  $m, m' \in \mathbb{Z}$  et soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\times$ . Il existe des couples  $(\Lambda_0, m_0), \dots, (\Lambda_l, m_l) \in \mathcal{L}(V, \mathcal{O}_D) \times \mathbb{Q}$  tels que :

$$\mathfrak{a}_{m_{k+1}}(\Lambda_{k+1}) \subset \mathfrak{a}_{m_k - e(\Lambda_k)\varepsilon}(\Lambda_k), \quad 0 \leq k \leq l - 1,$$

et tels que  $(\Lambda_0, m_0) = (\Lambda, m)$  et  $(\Lambda_l, m_l) = (\Lambda', m')$ .

*Démonstration.* — On choisit une base de  $V$  sur  $D$  décomposant  $\Lambda$  et  $\Lambda'$ , et on reprend les notations (3.6) et (3.7). Compte tenu de (3.2), l'inclusion :

$$\mathfrak{a}_{m(t)}(\Lambda(t)) \subset \mathfrak{a}_{m(s) - e(s)\varepsilon}(\Lambda(s))$$

a lieu, pour  $s, t \in [0, 1]$  rationnels, si et seulement si on a  $\lceil \rho_{ij}(t) \rceil \geq \lceil \rho_{ij}(s) - \varepsilon \rceil$ . Puisque  $\rho_{ij}$  est affine, il suffit de choisir un entier  $l \geq 1$  suffisamment grand et de poser  $t_k = k/l$ , pour  $0 \leq k \leq l$ , puis  $\Lambda_k = \Lambda(t_k)$  et  $m_k = m(t_k)$ .  $\square$

**3.3.** Soit  $[\Lambda, m, m - 1, b]$  une strate de  $A$ . On pose  $e = e(\Lambda | \mathcal{O}_F)$  et on note  $g$  le plus grand diviseur commun à  $e$  et  $m$ . On choisit une uniformisante  $\varpi_F$  de  $F$ , et on pose  $y_b = \varpi_F^{m/g} b^{e/g}$ , que l'on considère comme un élément de  $\text{End}_F(V)$ . Son polynôme caractéristique est à coefficients dans  $\mathcal{O}_F$ , et la réduction modulo  $\mathfrak{p}_F$  de celui-ci est appelée le *polynôme caractéristique* de la strate. On le note  $\varphi_b$ . Il est à coefficients dans  $k_F$  (cf. [23, §2.2]).

**Définition 3.9.** — La strate  $[\Lambda, m, m - 1, b]$  est dite *fondamentale* (resp. *scindée*) si son polynôme caractéristique  $\varphi_b \in k_F[X]$  n'est pas une puissance de  $X$  (resp. a au moins deux facteurs irréductibles distincts).

**Remarque 3.10.** — Le polynôme  $\varphi_b$  dépend de l'uniformisante choisie, mais pas les notions de strate fondamentale et de strate scindée.

Les résultats suivants généralisent respectivement [4, Proposition 1.2.2] et [4, Theorem 1.2.5].

**Proposition 3.11.** — *Soit  $[\Lambda, m, m - 1, b]$  une strate non fondamentale de  $A$ . Il existe un entier  $m' \in \mathbb{Z}$  et une  $\mathcal{O}_D$ -suite stricte  $\Lambda'$  tels que :*

$$b + \mathfrak{a}_{1-m}(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_{-m'}(\Lambda'), \quad \frac{m'}{e(\Lambda')} < \frac{m}{e(\Lambda)}.$$

*Démonstration.* — On procède par changement de base non ramifié. On choisit un couple  $(V^\circ, \Lambda^\circ)$  comme au §2.3 et une extension non ramifiée  $F^\sharp$  de  $F$  comme au §2.9, dont on reprend les notations. On pose  $\bar{b} = b \oplus 0$ , de sorte que la strate  $[\bar{\Lambda}^\sharp, m, m - 1, \bar{b}]$  de  $\bar{A}^\sharp$  est non fondamentale. On peut donc appliquer [4, Proposition 1.2.2]. On en tire une  $\mathcal{O}_{D^\sharp}$ -suite stricte  $\mathcal{L}$  de  $\bar{V}^\sharp$  et un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tels que :

$$(3.9) \quad \bar{b} + \mathfrak{a}_{1-m}(\bar{\Lambda}^\sharp) \subset \mathfrak{a}_{-k}(\mathcal{L}), \quad \frac{k}{e(\mathcal{L}|\mathcal{O}_{D^\sharp})} < \frac{m}{e(\Lambda)}.$$

Puisque le membre de gauche est stable par le groupe fini  $\mathcal{G} \times \Delta$ , la relation (3.9) est toujours valable si l'on remplace  $\mathcal{L}$  par un de ses conjugués par ce groupe. Si on applique le corollaire 3.6 à la famille des conjugués de  $\mathcal{L}$ , on obtient :

$$(3.10) \quad \bar{b} + \mathfrak{a}_{1-m}(\bar{\Lambda}^\sharp) \subset \mathfrak{a}_{-k'}(\mathcal{L}'), \quad \frac{k'}{e(\mathcal{L}'|\mathcal{O}_{D^\sharp})} = \frac{k}{e(\mathcal{L}|\mathcal{O}_{D^\sharp})} < \frac{m}{e(\Lambda)},$$

où  $\mathcal{L}'$  désigne la moyenne de  $\mathcal{L}$  relativement à  $\mathcal{G} \times \Delta$ , c'est-à-dire l'isobarycentre des conjugués de  $\mathcal{L}$ . La suite  $\mathcal{L}'$  est à la fois invariante par  $\mathcal{G}$  et invariante par  $\Delta$ , c'est-à-dire que  $\Delta$  est contenu dans  $U(\mathcal{L}')$ , donc que  $\mathcal{L}'$  est décomposée par la décomposition  $\bar{V}^\sharp = V^\sharp \oplus V^{\circ\sharp}$ . En projetant (3.10) sur  $A$ , on obtient :

$$b + \mathfrak{a}_{1-m}(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_{-k'}(\mathcal{L}' \cap V), \quad \frac{k'}{e(\mathcal{L}' \cap V)} < \frac{m}{e(\Lambda)}.$$

Enfin, on applique le lemme 3.2 à la suite  $\mathcal{L}' \cap V$  : il existe une  $\mathcal{O}_D$ -suite stricte  $\Lambda'$  de  $V$  et un entier  $m' \in \mathbb{Z}$  vérifiant l'inclusion et l'inégalité voulues.  $\square$

**Proposition 3.12.** — Soit  $[\Lambda, m, m-1, b]$  une strate fondamentale non scindée de  $A$ . Il existe une strate simple  $[\Lambda', m', m'-1, b']$  avec  $\Lambda'$  stricte, vérifiant :

$$b + \mathfrak{a}_{1-m}(\Lambda) \subset b' + \mathfrak{a}_{1-m'}(\Lambda'), \quad \frac{m'}{e(\Lambda')} = \frac{m}{e(\Lambda)}.$$

*Démonstration.* — On note  $\tilde{\Lambda}$  la  $\mathcal{O}_F$ -suite sous-jacente à  $\Lambda$ . L'élément caractéristique  $y_b$  est dans  $\mathfrak{A}(\tilde{\Lambda})$ , et sa réduction modulo  $\mathfrak{P}(\tilde{\Lambda})$  est inversible, puisque son polynôme caractéristique  $\varphi_b$  est une puissance d'un polynôme irréductible distinct de  $X$ . D'après (3.4), on en déduit que  $y_b \in U(\tilde{\Lambda})$ , puis que  $b \in \mathfrak{K}(\Lambda)$ .

Soit  $\mathcal{L}$  une  $\mathcal{O}_D$ -suite stricte de  $V$  telle que  $\mathfrak{a}_0(\mathcal{L}) = \mathfrak{a}_0(\Lambda)$ . En particulier,  $b$  normalise  $\mathcal{L}$ . D'après [4, Lemma 2.1.9(i)], si on pose  $k = -v_{\mathcal{L}}(b)$ , la strate  $[\mathcal{L}, k, k-1, b]$  est fondamentale non scindée, et on a :

$$(3.11) \quad \mathfrak{a}_{-m}(\Lambda) = \mathfrak{a}_{-k}(\mathcal{L}), \quad \mathfrak{a}_{1-m}(\Lambda) = \mathfrak{a}_{1-k}(\mathcal{L}).$$

D'après [4, Theorem 1.2.5], il existe une strate simple  $[\Lambda', m', m'-1, b']$  avec  $\Lambda'$  stricte, telle que :

$$b + \mathfrak{a}_{1-k}(\mathcal{L}) \subset b' + \mathfrak{a}_{1-m'}(\Lambda').$$

Compte tenu de (3.11), ceci met fin à la démonstration.  $\square$

**3.4.** Soit  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$ . On pose  $q = -k_0(\beta, \Lambda)$  et on fixe un entier  $1 \leq m \leq q-1$ . On pose  $r = \lfloor q/2 \rfloor + 1$  et  $s = \lceil q/2 \rceil$ .

**Lemme 3.13.** — Soit  $m_0 = \min\{m, s\}$  et soit  $\vartheta$  un caractère de  $H^{m_0}$  dont la restriction à  $H^{m+1}$  est dans  $\mathcal{C}(\beta, m, \Lambda)$ . Il existe une unique représentation irréductible  $\tau$  de  $U_{m_0}(\Lambda)$  dont la restriction à  $H^{m_0}$  contient  $\vartheta$ .

*Démonstration.* — La démonstration est similaire à celle de [7, Lemma 8.1.8]. D'après la proposition 2.30, la forme alternée :

$$(x, y) \mapsto \vartheta([x, y]), \quad x, y \in J^{m_0},$$

ne dépend que de la restriction de  $\vartheta$  à  $H^{m+1}$ . D'après la proposition 2.31, c'est donc une forme non dégénérée. Il existe donc une unique représentation

irréductible  $\mu$  de  $J^{m_0}$  dont la restriction à  $H^{m_0}$  contient  $\vartheta$ . Il reste à prouver que l'entrelacement de  $\mu$  dans  $U_{m_0}(\Lambda)$  est contenu dans  $J^{m_0}$ , et l'induite :

$$\tau = \text{Ind}_{J^{m_0}}^{U_{m_0}(\Lambda)}(\mu)$$

sera irréductible. L'entrelacement de  $\mu$  est contenu dans :

$$I_G(\theta) = \Omega_{q-m}(\beta, \Lambda) B^\times \Omega_{q-m}(\beta, \Lambda)$$

par le théorème 2.23. Il faut donc montrer que :

$$\Omega_{q-m}(\beta, \Lambda) \cap U_{m_0}(\Lambda) \subset J^{m_0}(\beta, \Lambda),$$

ce qui revient à montrer :

$$(3.12) \quad \mathfrak{a}_{q-m}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-m}(\beta, \Lambda) \cap \mathfrak{a}_{m_0}(\Lambda) \subset \mathfrak{J}^{m_0}(\beta, \Lambda).$$

On continue par récurrence sur  $k_0(\beta, \Lambda)$ . Si  $m < r$ , l'équation (3.12) est impliquée par [7, Proposition 3.1.10(i)] dans le cas déployé  $D = F$ , d'où le cas général en appliquant le lemme 2.28.

On suppose donc que  $m \geq r$  (et  $m_0 = s$ ). Si  $\beta$  est minimal sur  $F$ , alors  $\mathfrak{J}^{m_0}(\beta, \Lambda) = \mathfrak{a}_{m_0}(\Lambda)$  et il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit  $[\Lambda, n, q, \gamma]$  une strate simple équivalente à  $[\Lambda, n, q, \beta]$ , soit  $B_1$  le commutant de  $\gamma$  dans  $A$  et soit  $q_1 = -k_0(\gamma, \Lambda)$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{q-m}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-m}(\beta, \Lambda) &= \mathfrak{a}_{q-m}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-m}(\gamma, \Lambda) \\ &= \mathfrak{a}_{q-m}(\Lambda) \cap B_1 + \mathfrak{a}_{q_1-m}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-m}(\gamma, \Lambda). \end{aligned}$$

On a  $\mathfrak{a}_{q-m}(\Lambda) \cap B_\gamma \subset \mathfrak{J}^{m_0}(\gamma, \Lambda)$  et, puisque  $m_0 < r_1 = \lfloor q_1/2 \rfloor + 1$ , on a :

$$\mathfrak{a}_{q_1-m}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-m}(\gamma, \Lambda) \cap \mathfrak{a}_{m_0} \subset \mathfrak{J}^{m_0}(\gamma, \Lambda)$$

par récurrence. Puisque  $\mathfrak{J}^{m_0}(\gamma, \Lambda) = \mathfrak{J}^{m_0}(\beta, \Lambda)$ , la preuve est terminée.  $\square$

**Lemme 3.14.** — *Soit  $m_0 = \min\{m, s\}$  et soit  $\vartheta$  un caractère de  $H^{m_0}$  dont la restriction à  $H^{m+1}$  est dans  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ . Soit  $K$  un sous-groupe ouvert compact de  $U_{m_0}(\Lambda)$ , et soit  $\rho$  une représentation irréductible de  $K$  dont la restriction à  $H^{m_0} \cap K$  contient  $\vartheta|_{H^{m_0} \cap K}$ . Alors toute représentation irréductible de  $G$  contenant  $\vartheta$  contient  $\rho$ .*

*Démonstration.* — La preuve est similaire à celle de [7, Proposition 8.1.7]. Il suffit de remplacer [7, Lemma 8.1.8] par le lemme 3.13.  $\square$

**3.5.** Soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$  et soit  $s$  une corestriction modérée sur  $A$  relative à  $E/F$ .

**Proposition 3.15.** — Soient  $\tilde{\theta} \in \mathcal{C}(\Lambda, [m] - 1, \beta)$  et  $c \in \mathfrak{a}_{[m]}(\Lambda)$  tels que  $\pi$  contienne le caractère  $\vartheta = \tilde{\theta}\psi_c$  de  $H^{[m]}(\beta, \Lambda)$ . Soit  $\Lambda'$  une  $\mathcal{O}_D$ -suite  $E$ -pure de période  $e(\Lambda')$  et soit  $m' = me(\Lambda')/e(\Lambda)$ . Soit  $\alpha' \in \mathfrak{a}_{[m]}(\Lambda) \cap \mathfrak{a}_{[m']}(\Lambda') \cap B$  tel que :

$$s(c) + \mathfrak{a}_{1-[m]}(\Lambda) \cap B \subset \alpha' + \mathfrak{a}_{1-[m']}(\Lambda') \cap B.$$

Alors il existe  $\tilde{\theta}' \in \mathcal{C}(\Lambda', [m'] - 1, \beta)$  et  $c' \in \mathfrak{a}_{[m']}(\Lambda')$  tels que  $s(c') = \alpha'$  et tels que  $\pi$  contienne le caractère  $\vartheta' = \tilde{\theta}'\psi_{c'}$  de  $H^{[m']}(\beta, \Lambda')$ . Si  $\alpha' = 0$ , on peut choisir  $c' = 0$ .

*Démonstration.* — Soit  $m_0 = \min\{[m], s\}$ . Puisque  $H^{m_0}(\beta, \Lambda)/H^{[m]}(\beta, \Lambda)$  est abélien,  $\pi$  contient un caractère  $\tilde{\vartheta}$  de  $H^{m_0}(\beta, \Lambda)$  qui prolonge  $\vartheta$ . En prolongeant  $\tilde{\theta}$  en un caractère simple de  $H^{m_0}(\beta, \Lambda)$ , que l'on note aussi  $\tilde{\theta}$ , et en changeant  $c$  dans sa classe modulo  $\mathfrak{a}_{1-[m]}(\Lambda)$ , on a encore  $\tilde{\vartheta} = \tilde{\theta}\psi_c$ .

Nous démontrons la proposition dans un premier temps sous l'hypothèse supplémentaire :

$$(H) \quad H^{[m']}(\beta, \Lambda') \subset U^{m_0}(\Lambda).$$

On commence par prouver le lemme suivant.

**Lemme 3.16.** — Pour tous  $k, k' \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$s(\mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap \mathfrak{a}_{k'}(\Lambda')) = s(\mathfrak{a}_k(\Lambda)) \cap s(\mathfrak{a}_{k'}(\Lambda')).$$

*Démonstration.* — Dans le cas où  $A$  est déployée sur  $F$  et où  $\Lambda, \Lambda'$  sont strictes, c'est une conséquence de [7, §1.3] et du fait que  $\mathfrak{a}_k(\Lambda)$  et  $\mathfrak{a}_{k'}(\Lambda')$  sont des réseaux  $E$ -exactes. Dans le cas général, on choisit un couple  $(V^\circ, \Lambda^\circ)$  comme au §2.3. L'égalité est valable pour les  $\mathcal{O}_F$ -suites sous-jacentes à  $\bar{\Lambda}$  et à  $\bar{\Lambda}'$ , appliquée avec une corestriction modérée de  $\text{End}_F(V \oplus V^\circ)$  dont la restriction à  $A$  est  $s$ . On obtient le lemme 3.16 par projection sur  $A$ .  $\square$

Puisque  $\alpha'$  appartient à  $\mathfrak{a}_{\lceil -m \rceil}(\Lambda) \cap \mathfrak{a}_{\lceil -m' \rceil}(\Lambda') \cap B$ , il existe, d'après le lemme 3.16, un élément  $c' \in \mathfrak{a}_{\lceil -m \rceil}(\Lambda) \cap \mathfrak{a}_{\lceil -m' \rceil}(\Lambda')$  tel que  $s(c') = \alpha'$ , et on peut prendre  $c' = 0$  si  $\alpha' = 0$ . On pose  $\delta = c' - c \in \mathfrak{a}_{\lceil -m \rceil}(\Lambda)$ .

**Lemme 3.17.** — *Il existe  $x \in \mathfrak{a}_{q-\lfloor m \rfloor}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-\lfloor m \rfloor}(\beta, \Lambda)$  tel que :*

$$\delta - (1+x)^{-1}a_\beta(x) - (1+x)^{-1}(cx - xc) \in \mathfrak{a}_{1-\lceil m' \rceil}(\Lambda').$$

*Démonstration.* — On démontre par récurrence que, pour  $t \geq 0$ , il existe  $x_t \in \mathfrak{a}_{q-\lfloor m \rfloor}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-\lfloor m \rfloor}(\beta, \Lambda)$  tel que :

$$(3.13) \quad \delta - (1+x_t)^{-1}a_\beta(x_t) - (1+x_t)^{-1}(cx_t - x_t c) \in \mathfrak{a}_{1-\lceil m' \rceil}(\Lambda') + \mathfrak{a}_{t-\lfloor m \rfloor}(\Lambda).$$

Le lemme s'ensuit puisque  $\mathfrak{a}_{t-\lfloor m \rfloor}(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_{1-\lceil m' \rceil}(\Lambda')$  pour  $t$  suffisamment grand. Puisque  $\delta \in \mathfrak{a}_{-\lfloor m \rfloor}(\Lambda)$ , on peut prendre  $x_0 = 0$ . Supposons donc que  $t \geq 0$  et qu'on ait trouvé  $x_t \in \mathfrak{a}_{q-\lfloor m \rfloor}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-\lfloor m \rfloor}(\beta, \Lambda)$  tel que (3.13) soit satisfaite. Il existe alors  $\delta_t \in \mathfrak{a}_{t-\lfloor m \rfloor}(\Lambda)$  tel que :

$$\delta - (1+x_t)^{-1}a_\beta(x_t) - (1+x)^{-1}(cx_t - x_t c) \in \delta_t + \mathfrak{a}_{1-\lceil m' \rceil}(\Lambda').$$

On impose  $\delta_0 = \delta$  dans le cas  $t = 0$  et, dans ce cas :

$$s(\delta_0) = \alpha' - s(c) \in \mathfrak{a}_{1-\lceil m' \rceil}(\Lambda') \cap B.$$

Également, pour  $t > 0$ , on a :

$$s(\delta_t) \in \mathfrak{a}_{t-\lfloor m \rfloor}(\Lambda) \cap B \subset \mathfrak{a}_{1-\lceil m' \rceil}(\Lambda) \cap B \subset \mathfrak{a}_{1-\lceil m' \rceil}(\Lambda') \cap B.$$

Donc  $\delta_t \in \mathfrak{a}_{t-\lfloor m \rfloor}(\Lambda) \cap (\mathfrak{a}_{1-\lceil m' \rceil}(\Lambda') + a_\beta(A))$ .

**Lemme 3.18.** — *Pour tous  $k, k' \in \mathbb{Z}$ , on a :*

$$\mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap (\mathfrak{a}_{k'}(\Lambda') + a_\beta(A)) = \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap \mathfrak{a}_{k'}(\Lambda') + \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap a_\beta(A).$$

*Démonstration.* — Dans le cas où  $A$  est déployée sur  $F$  et où  $\Lambda, \Lambda'$  sont strictes, c'est une conséquence de [7, 8.1.13]. On traite le cas général comme au lemme 3.16.  $\square$

D'après le lemme 3.18, on a :

$$\mathfrak{a}_{t-\lfloor m \rfloor}(\Lambda) \cap (\mathfrak{a}_{1-\lceil m' \rceil}(\Lambda') + a_\beta(A)) = \mathfrak{a}_{t-\lfloor m \rfloor}(\Lambda) \cap \mathfrak{a}_{1-\lceil m' \rceil}(\Lambda') + \mathfrak{a}_{t-\lfloor m \rfloor}(\Lambda) \cap a_\beta(A).$$

D'après la proposition 2.29, il existe  $y_t \in \mathfrak{a}_{q+t-\lfloor m \rfloor}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{t-\lfloor m \rfloor}(\beta, \Lambda)$  tel que :

$$\delta_t - a_\beta(y_t) \in \mathfrak{a}_{t-\lfloor m \rfloor}(\Lambda) \cap \mathfrak{a}_{1-\lceil m' \rceil}(\Lambda'),$$

et  $x_{t+1} = x_t + y_t$  est comme il faut.  $\square$

Revenons à la démonstration de la proposition 3.15 sous l'hypothèse (H). Soit  $x$  comme dans le lemme 3.17. Par le lemme 2.30, l'élément  $1+x$  normalise  $H^{m_0}(\beta, \Lambda)$  et :

$$\tilde{\vartheta}^{1+x} = \tilde{\vartheta} \psi_{(1+x)^{-1}a_\beta(x)} \psi_{(1+x)^{-1}(cx-xc)}.$$

Soit  $\tilde{\theta}'$  le caractère simple dans  $\mathcal{C}(\Lambda', \lceil m' \rceil - 1, \beta)$  qui coïncide avec  $\tilde{\theta}$  sur  $H^{\lceil m' \rceil}(\beta, \Lambda') \cap H^{m_0}(\beta, \Lambda)$ . Le lemme 3.17 implique que, comme caractère du groupe  $H^{\lceil m' \rceil}(\beta, \Lambda') \cap H^{m_0}(\beta, \Lambda)$ , on a :

$$\tilde{\vartheta}^{1+x} = \tilde{\theta}' \psi_{c'}.$$

Puisque l'hypothèse (H) est satisfaite, on déduit du lemme 3.14 que  $\pi$  contient  $\vartheta' = \tilde{\theta}' \psi_{c'}$ .

Traisons maintenant le cas général. Supposons d'abord que  $m \leq q/2$ . D'après le lemme 3.7, il existe une famille finie  $(\Lambda_i)_{0 \leq i \leq l}$  vérifiant :

$$U_{\lceil m_i \rceil}(\Lambda_i) \supset U_{\lceil m_{i+1} \rceil + 1}(\Lambda_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq l-1,$$

avec  $(\Lambda_0, m_0) = (\Lambda, m)$ ,  $(\Lambda_l, m_l) = (\Lambda', m')$  et  $m_i = me_i/e$ , où  $e_i$  est la période de  $\Lambda_i$ . Par le lemme 3.4, on a  $s(c) \in \mathfrak{a}_{-\lfloor m_i \rfloor}(\Lambda_i) \cap B$ , pour chaque  $i$ , et :

$$s(c) + \mathfrak{a}_{1-\lceil m_i \rceil}(\Lambda_i) \cap B \subset s(c) + \mathfrak{a}_{1-\lceil m_{i+1} \rceil}(\Lambda_{i+1}) \cap B, \quad 0 \leq i \leq l-1.$$

Par dualité, on obtient :

$$U_{\lceil m_i \rceil}(\Lambda_i) \cap B \supset U_{\lceil m_{i+1} \rceil}(\Lambda_{i+1}) \cap B.$$

Soit  $q_i = -k_0(\beta, \Lambda_i) = qe_i/e$ . Puisque  $m \leq q/2$ , on a  $m_i \leq q_i/2$  et donc :

$$H^{\lceil m_{i+1} \rceil}(\beta, \Lambda_{i+1}) = (U_{\lceil m_{i+1} \rceil}(\Lambda_{i+1}) \cap B) H^{\lceil m_{i+1} \rceil + 1}(\beta, \Lambda_{i+1}) \subset U_{\lceil m_i \rceil}(\Lambda_i).$$

Appliquant le cas où l'hypothèse (H) est vérifiée, on voit que, pour chaque  $i$ , il existe  $\tilde{\theta}_i \in \mathcal{C}(\Lambda_i, [m_i] - 1, \beta)$  et  $c_i \in \mathfrak{a}_{[m_i]}(\Lambda_i)$  tels que  $s(c_i) = s(c)$  et  $\pi$  contienne le caractère  $\vartheta_i = \tilde{\theta}_i \psi_{c_i}$  de  $H^{[m_i]}(\beta, \Lambda_i)$ . À la dernière étape, on peut remplacer  $s(c)$  par  $\alpha'$  et on en déduit le résultat.

Finalement, supposons que  $m > q/2$  et fixons  $\varepsilon > 0$  tel que  $e\varepsilon < m - q/2$ . Par le lemme 3.8, il existe une famille finie  $(\Lambda_i)_{0 \leq i \leq l}$  vérifiant :

$$U_{[m_{i+1}]}(\Lambda_{i+1}) \subset U_{[m_i - e_i \varepsilon]}(\Lambda_i), \quad 0 \leq i \leq l - 1,$$

avec  $(\Lambda_0, m_0) = (\Lambda, m)$ ,  $(\Lambda_l, m_l) = (\Lambda', m')$  et  $m_i = me_i/e$ , où  $e_i$  est la période de  $\Lambda_i$ . On a :

$$m_i - e_i \varepsilon = \frac{e_i}{e}(m - e\varepsilon) > \frac{e_i}{e} \cdot \frac{q}{2} = \frac{q_i}{2},$$

donc  $[m_i - e_i \varepsilon] \geq [q_i/2] = s_i$  et :

$$H^{[m_{i+1}]}(\beta, \Lambda_{i+1}) \subset U_{[m_{i+1}]}(\Lambda_{i+1}) \subset U_{[m_i - e_i \varepsilon]}(\Lambda_i) \subset U_{[s_i]}(\Lambda_i).$$

La démonstration se termine maintenant comme dans le cas précédent.  $\square$

**3.6.** Soit  $\pi$  une représentation irréductible de niveau non nul de  $G$ .

**Proposition 3.19.** — *On est dans l'un des deux cas suivants :*

(1) *Il existe une strate scindée  $[\Lambda, n, n - 1, b]$  de  $A$ , avec  $n \geq 1$  et  $\Lambda$  stricte, telle que la restriction de  $\pi$  à  $U_n(\Lambda)$  contienne  $\psi_b$  ;*

(2) *Il existe une strate simple  $[\Lambda, n, m, \beta]$  de  $A$ , avec  $\Lambda$  stricte, et un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ , tels que la restriction de  $\pi$  à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  contienne  $\theta$ .*

**Remarque 3.20.** — Dans le cas (1), on dit que  $\pi$  contient une strate scindée.

*Démonstration.* — D'abord, d'après [4, Theorem 1.2.1(i)], la représentation  $\pi$  contient une strate fondamentale  $[\Lambda, n, n - 1, b]$  de  $A$ , avec  $\Lambda$  stricte, c'est-à-dire que la restriction de  $\pi$  à  $U_n(\Lambda)$  contient  $\psi_b$ . Si elle est scindée, alors on est dans le premier cas. Si elle ne l'est pas, alors, d'après [4, Theorem 1.2.4], la représentation  $\pi$  contient une strate simple  $[\Lambda, n, m, \beta]$  de  $A$ , avec  $\Lambda$  stricte, c'est-à-dire que la restriction de  $\pi$  à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  contient un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ .  $\square$



Il est commode d'introduire la définition suivante. Soit  $[\Lambda, n, m, \beta]$  une strate simple de  $A$  avec  $m \geq 1$ . Soit  $V_E$  un  $B$ -module à gauche simple, soit  $D_E$  l'algèbre opposée à  $\text{End}_B(V_E)$ , soit  $\Gamma$  une  $\mathcal{O}_{D_E}$ -suite de réseaux de  $V_E$  vérifiant la condition du théorème 1.4 et soit  $s$  une corestriction modérée sur  $A$  relativement à  $E/F$  (cf. §2.11).

**Définition 3.21.** — Une *strate dérivée* de  $[\Lambda, n, m, \beta]$  est une strate de  $B$  de la forme  $[\Gamma, m, m-1, s(c)]$  avec  $c \in \mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)$ .

On définit maintenant les caractères scindés de  $G$ . C'est ce qui est appelé, dans [7], les types scindés de niveau  $(x, y)$ , avec  $x > y > 0$ .

**Définition 3.22.** — Un couple  $(K, \vartheta)$  est un *caractère scindé* de  $G$  s'il existe une strate simple  $[\Lambda, n, m, \beta]$  de  $A$ , avec  $m \geq 1$  et  $\Lambda$  stricte, un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m-1, \beta)$  et  $c \in \mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)$  tels que :

(i) On a  $K = H^m(\beta, \Lambda)$  et  $\vartheta = \theta\psi_c$ .

(ii) La strate dérivée  $[\Gamma, m, m-1, s(c)]$  est scindée, pour n'importe quelle corestriction modérée  $s$  sur  $A$  relativement à  $E/F$ .

La distinction entre strate scindée et caractère scindé est assez superficielle : c'est à peu près la même que celle qu'on fait entre types simples de niveau 0 et de niveau  $> 0$  (cf. [21]).

On est maintenant en mesure de formuler le résultat principal de cette section.

**Théorème 3.23.** — Soit  $\pi$  une représentation irréductible de niveau non nul de  $G$ . Alors :

(1) ou bien il existe une strate simple  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  de  $A$ , avec  $\Lambda$  stricte, telle que  $\pi$  contienne un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$  ;

(2) ou bien  $\pi$  contient une strate scindée.

(3) ou bien  $\pi$  contient un caractère scindé.

Le reste du paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 3.23. D'après la proposition 3.19, si  $\pi$  ne contient pas de strate scindée, il existe une strate simple  $[\Lambda, n, m, \beta]$  de  $A$ , avec  $\Lambda$  stricte, et un caractère simple  $\theta \in$

$\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ , tels que la restriction de  $\pi$  à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  contienne  $\theta$ . On choisit  $[\Lambda, n, m, \beta]$  et  $\theta$  tels que le rapport  $m/e(\Lambda|\mathcal{O}_F)$  soit minimal. Si  $m = 0$ , alors on est dans le cas (1) du théorème 3.23. Dans toute la suite du §, on suppose que  $m \geq 1$ . On fixe un B-module à gauche simple  $V_E$  et on note  $D_E$  l'algèbre opposée à  $\text{End}_B(V_E)$ . On fixe une  $\mathcal{O}_{D_E}$ -suite  $\Gamma$  de réseaux de  $V_E$  vérifiant la condition du théorème 1.4. On fixe un caractère  $\vartheta$  de  $H^m(\beta, \Lambda)$  contenu dans  $\pi$  et prolongeant  $\theta$ , un caractère simple  $\tilde{\theta} \in \mathcal{C}(\Lambda, m-1, \beta)$  prolongeant  $\theta$  et un élément  $c \in \mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)$  tel que  $\vartheta = \tilde{\theta}\psi_c$ . Enfin, on fixe une corestriction modérée  $s$  sur  $A$  relativement à  $E/F$ . Il s'agit de prouver que la strate dérivée  $[\Gamma, m, m-1, s(c)]$  est scindée.

**Proposition 3.24.** — *La strate  $[\Gamma, m, m-1, s(c)]$  est fondamentale.*

**Remarque 3.25.** — Pour simplifier les notations, on calcule toutes les périodes de suites de réseaux sur  $\mathcal{O}_F$  et, si  $\Lambda$  est une suite de réseaux, on note  $e(\Lambda)$  pour  $e(\Lambda|\mathcal{O}_F)$ . Cette remarque se substitue donc à la remarque 3.1. Pour une  $\mathcal{O}_D$ -suite de réseaux  $\Lambda$ , on a  $e(\Lambda|\mathcal{O}_F) = e(\Lambda|\mathcal{O}_D)d$ , où  $d$  désigne le degré réduit de  $D$  sur  $F$ . Pour une  $\mathcal{O}_{D_E}$ -suite de réseaux  $\Gamma$ , on a  $e(\Gamma|\mathcal{O}_F) = e(\Gamma|\mathcal{O}_E)e_{E/F}$ , où  $e_{E/F}$  désigne l'indice de ramification de  $E/F$ .

*Démonstration.* — On raisonne par l'absurde. D'après la proposition 3.11, il existe un entier  $k' \in \mathbb{Z}$  et une  $\mathcal{O}_{D_E}$ -suite stricte  $\Gamma'$  de  $V_E$  tels que :

$$(3.14) \quad s(c) + \mathfrak{a}_{1-m}(\Lambda) \cap B = s(c) + \mathfrak{b}_{1-m}(\Gamma) \subset \mathfrak{b}_{-k'}(\Gamma')$$

et :

$$(3.15) \quad \frac{k'}{e(\Gamma')} < \frac{m}{e(\Gamma)}.$$

On fixe un couple  $(\rho', \Lambda')$  correspondant à  $\Gamma'$  par le théorème 1.7 et on pose  $m' = me(\Lambda')/e(\Lambda)$ .

**Lemme 3.26.** — *On a :*

$$(3.16) \quad s(c) + \mathfrak{a}_{1-m}(\Lambda) \cap B \subset \mathfrak{a}_{1-\lceil m' \rceil}(\Lambda') \cap B$$

et :

$$(3.17) \quad \frac{\lceil m' \rceil - 1}{e(\Lambda')} < \frac{m}{e(\Lambda)}.$$

*Démonstration.* — À partir de (3.15) et de la remarque 1.10, on écrit :

$$\rho'k' < \frac{e(\Lambda')}{e(\Lambda)}m = m'.$$

Compte tenu du fait que  $\rho'k'$  est entier, on en déduit :

$$-\rho'k' \geq 1 - \lceil m' \rceil,$$

ce qui, avec (3.14), donne (3.16). Ensuite, on écrit  $m' = \lceil m' \rceil - 1 + a/e(\Lambda)$ , avec  $1 \leq a \leq e(\Lambda)$ . On obtient :

$$\frac{\lceil m' \rceil - 1}{e(\Lambda')} = \frac{m'}{e(\Lambda')} - \frac{a}{e(\Lambda)e(\Lambda')} < \frac{m}{e(\Lambda)},$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

D'après le lemme 3.15 appliqué avec  $\alpha' = 0$ , il existe un caractère simple de  $\mathcal{C}(\Lambda', \lceil m' \rceil - 1, \beta)$  contenu dans  $\pi$ , ce qui contredit la minimalité de  $m/e(\Lambda)$ .  $\square$

**Proposition 3.27.** — *La strate  $[\Gamma, m, m - 1, s(c)]$  est scindée.*

*Démonstration.* — On raisonne par l'absurde. D'après la proposition 3.12, il existe un entier  $k' \in \mathbb{Z}$ , une  $\mathcal{O}_{\mathbb{D}_E}$ -suite stricte  $\Gamma'$  de  $V_E$  et  $\alpha' \in \mathbb{B}$  tels que :

$$s(c) + \mathfrak{a}_{1-m}(\Lambda) \cap \mathbb{B} \subset \alpha' + \mathfrak{b}_{1-k'}(\Gamma')$$

et tels que la strate  $[\Gamma', k', k' - 1, \alpha']$  soit simple. On fixe un couple  $(\rho', \Lambda')$  correspondant à  $\Gamma'$  par le théorème 1.7 et on pose  $m' = \rho'k' \in \mathbb{Z}$ . On a donc :

$$s(c) + \mathfrak{a}_{1-m}(\Lambda) \cap \mathbb{B} \subset \alpha' + \mathfrak{a}_{1-m'}(\Lambda') \cap \mathbb{B}.$$

Avant d'appliquer à nouveau le lemme 3.15, on a besoin des deux lemmes suivants.

**Lemme 3.28.** — *On a  $m/e(\Lambda) = m'/e(\Lambda')$ .*

*Démonstration.* — Puisque la strate  $[\Gamma, m, m-1, s(c)]$  est fondamentale, on a  $s(c) \in \mathfrak{K}(\Gamma)$ . Ensuite, on a  $s(c) - \alpha' \in \mathfrak{a}_{1-k'}(\Gamma')$  et  $\alpha' \in \mathfrak{a}_{-k'}(\Gamma')$ , c'est-à-dire que les strates  $[\Gamma', k', k'-1, s(c)]$  et  $[\Gamma', k', k'-1, \alpha']$  sont équivalentes. Elles ont donc le même polynôme caractéristique, de sorte que  $[\Gamma', k', k'-1, s(c)]$  est fondamentale. Ainsi  $s(c) \in \mathfrak{K}(\Gamma')$ . On en déduit que  $m/e(\Gamma) = k'/e(\Gamma')$ , ce qui implique l'égalité voulue.  $\square$

**Lemme 3.29.** — On a  $\mathfrak{a}_{-m'}(\Lambda') \cap B \subset \mathfrak{a}_{-m}(\Lambda) \cap B$ .

*Démonstration.* — En prenant le dual de l'inclusion :

$$\mathfrak{a}_{1-m}(\Lambda) \cap B \subset \mathfrak{a}_{1-m'}(\Lambda') \cap B,$$

on obtient  $\mathfrak{a}_{m'}(\Lambda') \cap B \subset \mathfrak{a}_m(\Lambda) \cap B$ . Puis, en multipliant par  $s(c)^2$  et en tenant compte du lemme 3.28, on obtient l'inclusion voulue.  $\square$

D'après le lemme 3.15, il existe un caractère simple  $\tilde{\theta}' \in \mathcal{C}(\Lambda', m'-1, \beta)$  et  $c' \in \mathfrak{a}_{-m'}(\Lambda')$  tels que  $s(c') = \alpha'$  et que  $\pi$  contienne le caractère  $\vartheta' = \tilde{\theta}'\psi_{c'}$ . Pour terminer la preuve de la proposition 3.27, on a besoin du résultat suivant, analogue de [7, Theorem 2.2.8].

**Proposition 3.30.** — La strate  $[\Lambda', n', m'-1, \beta + c']$  est équivalente à une strate simple.

On reporte la preuve de la proposition 3.30 au paragraphe suivant. En attendant, on termine la preuve de la proposition 3.27. On choisit une strate simple  $[\Lambda', n', m'-1, \beta']$  équivalente à  $[\Lambda', n', m'-1, \beta + c']$ . La strate  $[\Lambda', n', m', \beta']$  est équivalente à la strate simple  $[\Lambda', n', m', \beta]$ . On applique la proposition 2.15. On a une bijection :

$$\mathcal{C}(\Lambda', m'-1, \beta) \rightarrow \mathcal{C}(\Lambda', m'-1, \beta')$$

envoyant  $\tilde{\theta}'$  sur  $\vartheta'\psi_{\beta'-\beta-c'}$ . Mais  $\beta' - \beta - c' \in \mathfrak{a}_{1-m'}(\Lambda')$ . Ceci implique que  $\vartheta' \in \mathcal{C}(\Lambda', m'-1, \beta')$ , et contredit la minimalité de  $m/e(\Lambda|\mathcal{O}_F)$ .  $\square$

**3.7.** Dans ce paragraphe, on démontre la proposition 3.30. D'après [21, Théorème 2.2], il suffit de prouver que  $[\Lambda', n', m' - 1, \beta + c']$  est équivalente à une strate pure.

On pose  $K = E(\alpha')$  et on note  $C$  le commutant de  $K$  dans  $A$ . On fixe un  $K \otimes_F D$ -module à droite simple  $S$  et on pose  $A(K) = \text{End}_D(S)$ . On note  $D_K$  le commutant de  $K$  dans  $A(K)$ . C'est une  $K$ -algèbre à division. On choisit une décomposition de  $V$  en somme de  $K \otimes_F D$ -modules qui soit conforme à  $\Lambda'$ . On en déduit un plongement de  $F$ -algèbres  $\iota : A(K) \rightarrow A$  et un isomorphisme de  $(A(K), C)$ -bimodules (cf. [21, §1.3]) :

$$(3.18) \quad A(K) \otimes_{D_K} C \rightarrow A.$$

On a besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.31.** — *Soit  $s'$  une corestriction modérée sur  $A(K)$  relativement à  $E/F$ . Alors  $s' \otimes \text{id}_C$  est une corestriction modérée sur  $A$  relativement à  $E/F$ .*

*Démonstration.* — La preuve est analogue à celle de [7, Proposition 1.3.9], compte tenu de [4, Lemmas 4.2.1–4.2.2].  $\square$

On note  $s'$  la corestriction modérée sur  $A(K)$  relativement à  $E/F$  telle que  $s' \otimes \text{id}_C$  corresponde à  $s$  via (3.18). On note  $\mathfrak{A}(K)$  l'unique ordre héréditaire de  $A(K)$  normalisé par  $K^\times$  et  $\mathfrak{P}(K)$  son radical de Jacobson. On note  $e$  le rapport de  $e(\Lambda' | \mathcal{O}_D)$  sur  $e(\mathfrak{A}(K) | \mathcal{O}_D)$ . On pose  $n'' = n'/e$  et  $m'' = m'/e$ . Ce sont des entiers, égaux respectivement à  $-v_{\mathfrak{A}(K)}(\beta)$  et  $-v_{\mathfrak{A}(K)}(\alpha')$ . Soit enfin un élément  $c_0 \in \mathfrak{P}(K)^{-m''}$  tel que  $s'(c_0) = \alpha'$ .

**Lemme 3.32.** — *La strate  $[\mathfrak{A}(K), n'', m'' - 1, \beta + c_0]$  est pure.*

*Démonstration.* — La preuve est très proche de celle de [7, Proposition 2.2.3]. D'après le théorème 1.4, le normalisateur de  $\mathfrak{A}(K)$  dans  $D_K$  est égal au normalisateur de l'unique  $\mathcal{O}_K$ -ordre de  $D_K$ , qui est  $\mathcal{O}_{D_K}$ . Donc  $\mathfrak{A}(K)$  est normalisé par  $D_K^\times$ . On note  $B(K)$  le commutant de  $E$  dans  $A(K)$ .

Soit  $x \in A(K)^\times$  commutant à  $\beta + c_0$  et soit  $t \in \mathbb{Z}$  le plus grand entier tel que  $x \in \mathfrak{P}(K)^t$ . En raisonnant comme dans la preuve de [7, Proposition 2.2.3]

et en remplaçant [7, Corollary 1.4.10] par la proposition 2.29, on obtient :

$$x \in (\mathfrak{P}(\mathbb{K})^t \cap D_{\mathbb{K}} + \mathfrak{P}(\mathbb{K})^{t+1}) \setminus \mathfrak{P}(\mathbb{K})^{t+1} \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{A}(\mathbb{K})).$$

Donc le centralisateur de  $F[\beta + c_0]$  dans  $A(\mathbb{K})^\times$  est compact modulo le centre. Ainsi la  $F$ -algèbre  $F[\beta + c_0]$  est un corps dont le groupe multiplicatif est contenu dans  $\mathfrak{K}(\mathfrak{A}(\mathbb{K}))$ , ce qui termine la démonstration du lemme 3.32.  $\square$

Ainsi l'image par  $\iota$  de la strate pure  $[\mathfrak{A}(\mathbb{K}), n'', m'' - 1, \beta + c_0]$  est une strate pure  $[\Lambda', n', m' - 1, \beta + c_0]$ . On a  $s(\beta + c') = s(\beta + c_0)$ . D'après la proposition 2.29, il existe un élément  $y \in \mathfrak{a}_{q'-m'}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-m'}(\Lambda)$  tel que :

$$c' - c_0 \equiv a_\beta(y) \pmod{\mathfrak{a}_{1-m'}(\Lambda')}.$$

On en déduit que  $[\Lambda', n', m' - 1, \beta + c']$  est équivalente à la conjuguée de la strate  $[\Lambda', n', m' - 1, \beta + c_0]$  par  $1 + y$ , ce qui met fin à la fois à la preuve de la proposition 3.30 et à celle du théorème 3.23.

#### 4. Modules de Jacquet

Soit  $\pi$  une représentation irréductible de niveau non nul de  $G$ . Par le théorème 3.23, on sait que  $\pi$  contient soit un caractère simple d'un groupe  $H^1(\beta, \Lambda)$  avec  $\Lambda$  stricte, soit un caractère scindé, soit une strate scindée. Le but principal de cette section est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 4.1.** — *Soit  $\pi$  une représentation irréductible supercuspidale de niveau non nul de  $G$ . Il existe une strate simple  $[\Lambda, n, 0, \beta]$ , avec  $\Lambda$  stricte, et un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$  tels que  $\pi|_{H^1(\beta, \Lambda)}$  contienne  $\theta$ .*

L'idée est d'utiliser la notion de paire couvrante pour démontrer que, dans le cas où la représentation  $\pi$  contient un caractère scindé ou une strate scindée, elle a un module de Jacquet non nul.

**4.1.** Soit  $[\Lambda, n, m, \beta]$  une strate simple de  $A$  avec  $m \geq 1$  et avec  $\Lambda$  stricte. Soit  $V = V^1 \oplus V^2$  une décomposition de  $V$  en  $E \otimes_F D$ -modules, qui est conforme à  $\Lambda$ , et soit :

$$M = \text{Aut}_D(V^1) \times \text{Aut}_D(V^2),$$

qui est un sous-groupe de Levi de  $G$ . Soient  $N = 1 + A^{12}$  et  $N^- = 1 + A^{21}$ , et soient  $P = MN$  et  $P^- = MN^-$ . Donc  $P$  est un sous-groupe parabolique avec facteur de Levi  $M$ , et  $P^-$  est le sous-groupe parabolique opposé.

Soit  $B$  le commutant de  $E$  dans  $A$ . On fixe un  $B$ -module à gauche simple  $V_E$  et on note  $D_E$  l'algèbre opposée à  $\text{End}_B(V_E)$ . Soit  $\Gamma$  une  $\mathcal{O}_{D_E}$ -suite de réseaux telle que  $\mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap B = \mathfrak{b}_k(\Gamma)$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ , donnée par le théorème 1.4. La décomposition  $V = V^1 \oplus V^2$  correspond à une décomposition  $V_E = V_E^1 \oplus V_E^2$  telle que :

$$M \cap B = \text{Aut}_{D_E}(V_E^1) \times \text{Aut}_{D_E}(V_E^2).$$

C'est une décomposition conforme à  $\Gamma$ , et on pose  $\Gamma^i = \Gamma \cap V_E^i$ . On fixe aussi une corestriction modérée  $s : A \rightarrow B$ . Alors les restrictions  $s_i = s|_{A^i} : A^i \rightarrow B^i$  sont aussi des corestrictions modérées.

Soient  $c_i \in A^i \cap \mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)$ . On pose  $c = c_1 + c_2 \in A$ . On suppose que la strate  $[\Gamma, m, m-1, s(c)]$  de  $B$  est (fondamentale) scindée par la décomposition, c'est-à-dire que les polynômes caractéristiques des strates  $[\Gamma^i, m, m-1, s(c_i)]$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ , sont premier entre eux. On suppose aussi que  $s(c_1)$  normalise  $\Gamma^1$  et que  $v_{\Gamma^1}(s(c_1)) = -m$ .

**Lemme 4.2.** — On a :

$$I_{B^\times}(\psi_{c|_{U_m(\Lambda) \cap B}}) \subset (U_1(\Lambda) \cap B) \cdot (M \cap B) \cdot (U_1(\Lambda) \cap B).$$

*Démonstration.* — L'entrelacement de  $\psi_{c|_{U_m(\Lambda) \cap B}}$  est le même que l'entrelacement de la strate  $[\Gamma, m, m-1, s(c)]$ . La démonstration est alors presque identique à celle de [22, Theorem 4.9] : il suffit de remplacer [22, Lemma 4.11] par [4, Lemma 2.3.4].  $\square$

Soit maintenant  $\theta$  un caractère simple dans  $\mathcal{C}(\Lambda, m-1, \beta)$ . On considère le caractère  $\xi = \theta\psi_c$  de  $H^m(\beta, \Lambda)$ . On pose :

$$\Omega = (U_1(\Lambda) \cap B)\Omega_{q-m+1}(\beta, \Lambda).$$

D'après la proposition 2.24, le caractère  $\theta$  est normalisé par  $\Omega$ . Puisque  $\Omega \subset U_1(\Lambda)$  normalise  $\psi_c$ , le caractère  $\xi$  est lui aussi normalisé par  $\Omega$ .

**Théorème 4.3.** — *On a  $I_G(\xi) \subset \Omega M \Omega$ .*

*Démonstration.* — Si  $g \in G$  entrelace  $\xi$ , alors  $g$  entrelace *a fortiori* sa restriction  $\xi|_{H^{m+1}(\beta, \Lambda)} = \theta|_{H^{m+1}(\beta, \Lambda)}$ . D'après le théorème 2.23, l'élément  $g$  appartient donc à  $\Omega_{q-m}(\beta, \Lambda)B^\times\Omega_{q-m}(\beta, \Lambda)$ .

On écrit  $\gamma = (1+x)t(1+y)^{-1}$ , avec  $x, y \in \mathfrak{m}_{q-m}(\beta, \Lambda)$  et  $t \in B^\times$ . Puisque  $1+x$  est dans  $(1 + \mathfrak{a}_{q-m}(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{-m}(\beta, \Lambda))J^s(\beta, \Lambda)$ , on a, d'après la proposition 2.30 :

$$(4.1) \quad \xi^{1+x} = \xi\psi_{(1+x)^{-1}\beta(1+x)-\beta} = \xi\psi_{\mathfrak{a}_\beta(x)}.$$

L'élément  $t$  entrelace  $\xi^{1+x}$  et  $\xi^{1+y}$ , donc leur restriction au groupe  $H^m(\beta, \Lambda) \cap B = U_m(\Lambda) \cap B$ . Puisque les restrictions de  $\psi_{\mathfrak{a}_\beta(x)}$  et  $\psi_{\mathfrak{a}_\beta(y)}$  à  $U_m(\Lambda) \cap B$  sont triviales, et puisque  $t$  entrelace certainement  $\theta|_{U_m(\Lambda) \cap B}$ , on voit que  $t$  entrelace aussi le caractère  $\psi_c|_{U_m(\Lambda) \cap B}$ . D'après le lemme 4.2, on a :

$$t \in (U_1(\Lambda) \cap B)(M \cap B)(U_1(\Lambda) \cap B).$$

Puisque  $U_1(\Lambda) \cap B$  normalise  $\xi$  et le groupe  $\Omega_{q-m}(\beta, \Lambda)$ , on peut donc supposer que  $t \in M \cap B$ .

Par la décomposition d'Iwahori de  $\Omega_{q-m}(\beta, \Lambda)$  par rapport à  $(M, P)$ , on écrit  $1+x = n_x^- m_x n_x$ , avec  $n_x^- \in \Omega_{q-m}(\beta, \Lambda) \cap N^-$ ,  $m_x \in \Omega_{q-m}(\beta, \Lambda) \cap M$  et  $n_x = 1+x_n \in \Omega_{q-m}(\beta, \Lambda) \cap N$ . On écrit  $1+y = n_y^- m_y n_y$  de la même manière.

On pose :

$$\mathfrak{H}_- = \begin{pmatrix} \mathfrak{H}^{m+1}(\beta, \Lambda) & \mathfrak{H}^{m+1}(\beta, \Lambda) \\ \mathfrak{H}^m(\beta, \Lambda) & \mathfrak{H}^{m+1}(\beta, \Lambda) \end{pmatrix}$$

et  $H_- = 1 + \mathfrak{H}_- = H^{m+1}(\beta, \Lambda)(H^m(\beta, \Lambda) \cap N^-)$ . L'élément  $t$  entrelace les restrictions  $\xi^{1+x}|_{H_-}$  et  $\xi^{1+y}|_{H_-}$  et, puisque  $n_x^- m_x$  normalise  $\xi|_{H^-}$ , on a l'égalité



$\xi^{1+x}|_{\mathbb{H}_-} = \xi^{n_x}|_{\mathbb{H}_-}$ . Puisque  $\xi|_{\mathbb{H}_-} = \theta|_{\mathbb{H}_-}$  est entrelacé par  $t$ , on déduit de (4.1) que  $t$  entrelace les caractères  $\psi_{a_\beta(x_n)}$  et  $\psi_{a_\beta(y_n)}$ , c'est-à-dire que :

$$t^{-1}a_\beta(x_n)t \equiv a_\beta(y_n) \pmod{t^{-1}\mathfrak{H}_-^*t + \mathfrak{H}_-^*}.$$

Cette équivalence est certainement satisfaite dans tous les blocs sauf peut-être le bloc  $A^{12}$ , où la condition est :

$$a_\beta(t^{-1}x_nt - y_n) \in (t^{-1}(\mathfrak{H}^m(\beta, \Lambda))^*t + (\mathfrak{H}^m(\beta, \Lambda))^*) \cap A^{12}.$$

D'après le lemme 2.27, il existe  $x'_n, y'_n$  dans  $\mathfrak{m}_{q-m+1}(\beta, \Lambda) \cap A^{12}$  tels que :

$$a_\beta(t^{-1}x'_nt - y'_n) = a_\beta(t^{-1}x_nt - y_n).$$

Donc  $(t^{-1}x'_nt - y'_n) - (t^{-1}x_nt - y_n)$  appartient au  $(1, 2)$ -bloc de :

$$(t^{-1}\mathfrak{m}_{q-m}(\beta, \Lambda)t + \mathfrak{m}_{q-m}(\beta, \Lambda)) \cap \mathbb{B} \subset t^{-1}(\mathfrak{a}_1(\Lambda) \cap \mathbb{B})t + (\mathfrak{a}_1(\Lambda) \cap \mathbb{B}).$$

Il existe donc  $x''_n, y''_n \in (\mathfrak{a}_1(\Lambda) \cap \mathbb{B} + \mathfrak{m}_{q-m+1}) \cap A^{12}$  tels que  $t^{-1}x''_nt - y''_n = t^{-1}x_nt - y_n$  et donc :

$$(1 + x''_n)t(1 + y''_n)^{-1} = n_x t n_y^{-1}.$$

Puisque  $(1 + x''_n), (1 + y''_n) \in \Omega \cap \mathbb{N}$  qui normalise  $\xi$ , et puisque le groupe  $\Omega_{q-m}(\beta, \Lambda)$  normalise  $\Omega$ , on peut supposer que  $g = n_x^- m_x t (n_y^- m_y)^{-1}$ . De la même manière, en regardant la restriction de  $\xi$  à  $\mathbb{H}_+ = \mathbb{H}^{m+1}(\beta, \Lambda)(\mathbb{H}^m(\beta, \Lambda) \cap \mathbb{N})$ , on se ramène au cas  $g = m_x t m_y^{-1} \in \mathbb{M}$ , ce qui démontre le théorème.  $\square$

On pose  $\mathbb{K} = \mathbb{H}^m(\beta, \Lambda)(\Omega \cap \mathbb{N})$ , qui est un sous-groupe ouvert compact de  $\mathbb{G}$ , puisque  $\Omega$  normalise  $\mathbb{H}^m(\beta, \Lambda)$ . Comme  $\Omega$  normalise aussi  $\xi$ , on obtient :

**Lemme 4.4.** — *Il existe un unique caractère  $\tilde{\xi}$  de  $\mathbb{K}$  qui est trivial sur  $\mathbb{K} \cap \mathbb{N}$  et qui prolonge  $\xi$ .*

**Corollaire 4.5.** — *Si  $g \in \mathbb{N}$  entrelace  $\tilde{\xi}$ , alors  $g \in \mathbb{K} \cap \mathbb{N}$ .*

*Démonstration.* — Supposons que  $g \in \mathbb{N}$  entrelace  $\xi$ . D'après le théorème 4.3, il existe  $m \in \mathbb{M}$  et  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega$  tels que  $g = \gamma_1^{-1} m \gamma_2$ . Puisque  $\Omega$  possède un

décomposition d'Iwahori par rapport à  $(M, P)$ , on peut écrire  $\gamma_i = \gamma_i^- \gamma_i^M \gamma_i^+$ , pour  $i = 1, 2$ , avec  $\gamma_i^- \in \Omega \cap N^-$ ,  $\gamma_i^M \in \Omega \cap M$  et  $\gamma_i^+ \in \Omega \cap N$ . On a donc :

$$\gamma_1^+ g (\gamma_2^+)^{-1} = (\gamma_1^- \gamma_1^M)^{-1} m \gamma_2^- \gamma_2^M \in N \cap P^- = \{1\},$$

d'où on déduit que  $g = (\gamma_1^+)^{-1} \gamma_2^+ \in \Omega \cap N = K \cap N$ .  $\square$

**4.2.** Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on suppose donnés d'une part un sous-groupe ouvert  $\tilde{K}_i$  de  $U(\Lambda)G^i$  qui contient et normalise le groupe  $H^m(\beta, \Lambda) \cap G^i$ , d'autre part une représentation irréductible  $\varrho_i$  de  $\tilde{K}_i$  dont la restriction à  $\tilde{K}_i \cap K$  est multiple de  $\xi_{|\tilde{K}_i \cap H^m(\beta, \Lambda)}$ .

**Corollaire 4.6.** — (i) *L'ensemble  $\tilde{K} = (\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2) \cdot K$  est un groupe.*

(ii) *Il existe une unique représentation irréductible  $\varrho$  de  $\tilde{K}$  telle que les restrictions  $\varrho_{|\tilde{K} \cap N}$  et  $\varrho_{|\tilde{K} \cap N^-}$  soient triviales, et que  $\varrho_{|\tilde{K} \cap M} \simeq \varrho_1 \otimes \varrho_2$ .*

(iii) *La paire  $(\tilde{K}, \varrho)$  est une paire couvrante de  $(\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2, \varrho_1 \otimes \varrho_2)$ .*

*Démonstration.* — Avec l'élément fortement  $(P, \tilde{K})$ -positif :

$$\zeta = \begin{pmatrix} \varpi_F & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où  $\varpi_F$  désigne une uniformisante de  $F$ , la démonstration est identique à celle de [9, Corollary 6.6].  $\square$

**4.3.** On rappelle que  $r = \lfloor q/2 \rfloor + 1$  et  $s = \lceil q/2 \rceil$ . On définit trois entiers  $m_0 = \max\{q - m, m\}$ ,  $m_s = \max\{q - m + 1, s\}$  et  $m_r = \max\{q - m, r - 1\}$ . Soit  $\varepsilon = m_s - m_r$ . On pose :

$$K_l = \begin{cases} H^m(\beta, \Lambda)(H^{l-\varepsilon+1}(\beta, \Lambda) \cap N), & m_s \leq l < m_0 + \varepsilon, \\ H^m(\beta, \Lambda)(\Omega_{l+1}(\beta, \Lambda) \cap N), & q - m \leq l < m_s, \\ K_{q-m}(U_{l+1}(\Lambda) \cap B \cap N), & 0 \leq l < q - m, \end{cases}$$

et :

$$\Xi_l = \begin{cases} ((U_{m-l+\varepsilon}(\Lambda) \cap B)\Omega^{q-l+\varepsilon}(\beta, \Lambda)) \cap N^-, & m_s \leq l \leq m_0 + \varepsilon, \\ ((U_{m-l}(\Lambda) \cap B)H^{q-l}(\beta, \Lambda)) \cap N^-, & q - m < l < m_s, \\ (U_{m-l}(\Lambda) \cap B) \cap N^-, & 0 < l \leq q - m. \end{cases}$$

On a le lemme suivant.

**Lemme 4.7.** — *Pour  $0 < l < m + \varepsilon$ , le groupe  $\Xi_l$  agit transitivement sur les caractères de  $K_{l-1}$  qui prolongent  $\tilde{\xi}_{|K_l}$*

*Démonstration.* — On considère le cas  $m_s \leq l < m + \varepsilon$ , les autres cas étant similaires. Comme le quotient  $K_{l-1}/K_l$  est abélien, tout caractère de  $K_{l-1}$  qui étend  $\tilde{\xi}_{|K_l}$  est de la forme  $\tilde{\xi}_{|K_{l-1}}\psi_b$ , pour  $b \in \mathfrak{H}^{l-\varepsilon+1}(\beta, \Lambda)^* \cap A^{21}$ . Donc  $s(b) \in \mathfrak{a}_{-l+\varepsilon}(\Lambda) \cap B^{21}$ .

D'après [4, Lemma 2.3.8], il existe  $x \in \mathfrak{a}_{m-l+\varepsilon}(\Lambda) \cap B^{21}$  tel qu'on ait  $s(b) = s(c)x - xs(c) = s(a_c(x))$ . Pour  $h \in K_{l-1}$ , le commutateur  $[1 + x, h]$  appartient à  $H^m(\beta, \Lambda)$  et, comme  $x \in B$ , la proposition 2.30 implique :

$$\tilde{\xi}([1 + x, h]) = \psi_c([1 + x, h]) = \psi_{a_c(x)}(h).$$

D'après le lemme 2.27 il existe un élément  $y \in \mathfrak{m}_{q-l+\varepsilon} \cap A^{21}$  tel que  $a_\beta(y) = b - a_c(x)$ . D'après la proposition 2.30, pour  $h \in K_{l-1}$ , le commutateur  $[1 + y, h]$  appartient à  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  et :

$$\tilde{\xi}([1 + y, h]) = \theta([1 + y, h]) = \psi_{(1+y)^{-1}a_\beta(y)}(h).$$

On a  $ya_\beta(y) = 0$  et  $\psi_{a_c(x)}^{1+y} = \psi_{a_c(x)}$ , car  $y \in \mathfrak{a}_1(\Lambda)$ . On obtient donc :

$$\tilde{\xi}_{|K_{l-1}}^{(1+x)(1+y)} = \tilde{\xi}_{|K_{l-1}}\psi_{a_\beta(y)}\psi_{a_c(x)} = \tilde{\xi}_{|K_{l-1}}\psi_b,$$

d'où le lemme. □

**Corollaire 4.8.** — *Soit  $\pi$  une représentation lisse de  $G$  qui contient le caractère  $\xi$  de  $H^m(\beta, \Lambda)$ . Alors  $\pi$  n'est pas supercuspidale.*

*Démonstration.* — En appliquant le lemme 4.7, on voit que  $\pi$  contient aussi le caractère  $\tilde{\xi}$  de  $K = K_0$ . Par le corollaire 4.6, la paire  $(K, \tilde{\xi})$  est une paire couvrante de  $(K \cap M, \xi_{|H^m(\beta, \Lambda) \cap M})$ . D'après [8, Theorem 7.9], la composante

isotypique  $\pi_{\mathbb{N}}^{\xi_{\mathbb{H}^m(\beta, \Lambda) \cap \mathbb{M}}}$  du module de Jacquet de  $\pi$  par rapport à  $\mathbb{P}$  est non nulle.  $\square$

**4.4.** Soit  $\pi$  une représentation lisse de niveau non nul de  $G$  qui ne contient aucun caractère simple d'un groupe  $\mathbb{H}^1(\beta, \Lambda)$  avec  $\Lambda$  stricte. D'après le théorème 3.23, la représentation  $\pi$  contient alors un caractère scindé ou une strate scindée. Le cas de la strate scindée est déjà réglé par [4, Theorem 1.2.3]. On suppose donc qu'il existe une strate simple  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  avec  $\Lambda$  stricte, un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ , et un  $c \in \mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)$ , tels que  $\pi$  contienne le caractère  $\vartheta = \theta\psi_c$  et que la strate  $[\Gamma, m, m-1, s(c)]$  soit scindée, où, avec les notations habituelles,  $\Gamma$  est une  $\mathcal{O}_{D_E}$ -suite de réseaux de  $V_E$  qui correspond à  $\Lambda$  par le théorème 1.4.

**Proposition 4.9.** — *Il existe une décomposition  $V_E = V_E^1 \oplus V_E^2$  conforme à  $\Gamma$  telle que :*

- (i) *la strate  $[\Gamma, m, m-1, s(c)]$  est scindée par cette décomposition ;*
- (ii) *l'élément  $s(c)^1 \in B^1$  normalise  $\Gamma^1$  et  $v_{\Gamma^1}(s(c)^1) = -m$ .*

*Démonstration.* — Bien sûr,  $B^1$  et  $\Gamma^1$  désignent respectivement la  $E$ -algèbre  $\text{End}_{D_E}(V_E^1)$  et la suite  $\Gamma \cap V_E^1$ . Dans le cas où  $\Gamma$  est stricte, c'est [3, Proposition 2.2.1]. La démonstration dans le cas général est identique.  $\square$

Soit  $V = V^1 \oplus V^2$  la décomposition qui correspond à celle de  $V_E$  donnée par la proposition 4.9. Comme  $s(c)$  stabilise la décomposition  $V_E = V_E^1 \oplus V_E^2$ , on a  $s(e^i c e^j) = 0$ , pour  $i \neq j$ , où  $e^i$  est le projecteur sur  $V^i$ . D'après le lemme 2.27, il existe  $x \in \mathfrak{m}_{q-m}$  tel que  $e^i a_\beta(x) e^j = -e^i c e^j$ , pour  $i \neq j$ . D'après la proposition 2.30, l'élément  $1 + x$  normalise  $\mathbb{H}^m(\beta, \Lambda)$  et :

$$\vartheta^{1+x} = \theta\psi_{(1+x)^{-1}\beta(1+x)-\beta}\psi_c = \theta\psi_{c'},$$

où  $c' = c + a_\beta(x)$ . Remplaçant  $c$  par  $c'$ , on voit qu'on est dans la situation des §§4.1–4.3. Par le corollaire 4.8, on conclut que  $\pi$  n'est pas supercuspidale, ce qui termine la démonstration du théorème 4.1.

## 5. Le niveau zéro

Soit  $A$  une  $F$ -algèbre centrale simple et soit  $G$  son groupe multiplicatif. Désormais, toutes les strates sont relatives à une suite de réseaux stricte. On peut donc remplacer le langage des suites de réseaux par celui des ordres héréditaires. Par commodité, on fixe tout de même, comme d'habitude, un  $A$ -module à gauche simple  $V$ , et on note  $D$  l'algèbre opposée à  $\text{End}_A(V)$ .

Dans cette section, on prouve que toute représentation irréductible supercuspidale de niveau non nul de  $G$  contient un type simple maximal au sens de [21].

**5.1.** Soit  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$ . Soit :

$$(5.1) \quad V = V^1 \oplus \dots \oplus V^l$$

une décomposition de  $V$  en sous- $E \otimes_F D$ -modules, qui soit conforme à  $\mathfrak{A}$ . Soit  $M$  le sous-groupe de Levi de  $G$  correspondant et soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $M$ . On écrit  $P = MN$ , où  $N$  est le radical unipotent de  $P$ . On note  $N^-$  le radical unipotent du sous-groupe parabolique opposé à  $P$ . On pose :

$$\begin{aligned} H_P^1 &= H^1(\beta, \mathfrak{A}) (J^1(\beta, \mathfrak{A}) \cap N), \\ J_P^1 &= H^1(\beta, \mathfrak{A}) (J^1(\beta, \mathfrak{A}) \cap P). \end{aligned}$$

Ce sont des sous-groupes ouverts compacts de  $J^1(\beta, \mathfrak{A})$  contenant  $H^1(\beta, \mathfrak{A})$ . Pour simplifier les notations, on note  $H^1, J^1$  respectivement pour les groupes  $H^1(\beta, \mathfrak{A}), J^1(\beta, \mathfrak{A})$ . Soit  $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$  un caractère simple. On note  $\theta_P$  le caractère de  $H_P^1$  défini par  $\theta_P(hu) = \theta(h)$ , pour  $h \in H^1$  et  $u \in J^1 \cap N$ .

**5.2.** Soit  $B$  le commutant de  $E$  dans  $A$  et soit  $V_E$  un  $B$ -module à gauche simple. On note  $D_E$  l'algèbre opposée à  $\text{End}_B(V_E)$  et  $m_E$  la dimension de  $V_E$  sur  $D_E$ . Soient  $e^i$  les idempotents de  $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap B$  définis par la décomposition (5.1) et soit  $n_i$  la dimension de  $e^i V_E$ .

**Définition 5.1.** — La décomposition (5.1) est dite *subordonnée* à  $\mathfrak{B}$  s'il existe un isomorphisme de  $E$ -algèbres  $\Psi : B \rightarrow M_{m_E}(D_E)$  tel que :

(i) Pour chaque  $1 \leq i \leq l$ , l'idempotent  $\Psi(e^i)$  est égal à :

$$I^i = \text{diag}(0, \dots, \text{Id}_{n_i}, \dots, 0),$$

où la matrice identité  $\text{Id}_{n_i} \in M_{n_i}(\mathbb{D}_E)$  apparaît à la  $i$ -ième place.

(ii) L'ordre héréditaire  $\Psi(\mathfrak{B})$  est la sous- $\mathcal{O}_E$ -algèbre de  $M_{m_E}(\mathcal{O}_{\mathbb{D}_E})$  constituée des matrices dont la réduction modulo  $\mathfrak{p}_{\mathbb{D}_E}$  est triangulaire supérieure par blocs de taille  $(n_1, \dots, n_l)$ .

**Remarque 5.2.** — Si (5.1) est subordonnée à  $\mathfrak{B}$ , alors  $l$  est égal à la période de  $\mathfrak{B}$ . Les  $I^i$  définissent une décomposition de  $\mathbb{D}_E^{m_E}$  conforme à  $\Psi(\mathfrak{B})$ , et l'ordre  $I^i \Psi(\mathfrak{B}) I^i$  est un ordre maximal de  $M_{n_i}(\mathbb{D}_E)$  égal à  $M_{n_i}(\mathcal{O}_{\mathbb{D}_E})$ .

**5.3.** On suppose désormais que la décomposition (5.1) est subordonnée à  $\mathfrak{B}$ . On note  $e$  la période de  $\mathfrak{B}$ .

**Proposition 5.3.** — (i) On a des décompositions d'Iwahori :

$$\begin{aligned} J_{\mathbb{P}}^1 &= (H^1 \cap N^-) \cdot (J^1 \cap M) \cdot (J^1 \cap N), \\ H_{\mathbb{P}}^1 &= (H^1 \cap N^-) \cdot (H^1 \cap M) \cdot (J^1 \cap N). \end{aligned}$$

(ii) On a des isomorphismes de groupes :

$$J_{\mathbb{P}}^1 / H_{\mathbb{P}}^1 \simeq J^1 \cap M / H^1 \cap M \simeq \prod_{i=1}^e J^1(\beta, \mathfrak{A}^i) / H^1(\beta, \mathfrak{A}^i).$$

(iii) L'application  $(x, y) \mapsto \theta_{\mathbb{P}}([x, y])$  définit un espace symplectique non dégénéré  $(J_{\mathbb{P}}^1 / H_{\mathbb{P}}^1, \mathbf{k}_{\theta_{\mathbb{P}}})$  isomorphe à la somme directe des espaces symplectiques  $(J^1(\beta, \mathfrak{A}^i) / H^1(\beta, \mathfrak{A}^i), \mathbf{k}_{\theta^i})$ , où  $\theta^i$  est le transfert de  $\theta$  à  $\mathcal{C}(\mathfrak{A}^i, 0, \beta)$ .

*Démonstration.* — Voir [7, Proposition 7.2.3]. Cela découle des décompositions d'Iwahori existant pour  $J^1$  et  $H^1$ , du théorème 2.17 et enfin de la proposition 2.31.  $\square$

**Proposition 5.4.** — On a  $I_G(\theta_{\mathbb{P}}) = J_{\mathbb{P}}^1 B^\times J_{\mathbb{P}}^1$ .

*Démonstration.* — Il suffit de vérifier que  $I_G(\theta_{\mathbb{P}})$  contient  $B^\times$ . Soit :

$$(5.2) \quad V = W^1 \oplus \dots \oplus W^{l_0}$$

une décomposition de  $V$  en  $E \otimes_{\mathbb{F}} D$ -modules *simples*, qui soit plus fine que (5.1) et conforme à  $\mathfrak{A}$ . Soit  $M_0 \subset M$  le stabilisateur de (5.2) et soit  $P_0 = M_0 N_0$  un sous-groupe parabolique de sous-groupe de Levi  $M_0$  et contenu dans  $P$ . Alors :

$$U = (U(\mathfrak{B}) \cap P_0) U_1(\mathfrak{B})$$

est un sous-groupe d'Iwahori de  $B^\times$ . Puisque  $P_0$  est inclus  $P$ , le groupe  $U$  est inclus dans  $(U(\mathfrak{B}) \cap P) J_P^1$ , qui normalise  $\theta_P$ . D'après la décomposition de Bruhat de  $B^\times$  en doubles classes modulo  $U$ , il suffit donc de montrer que tout élément du normalisateur de  $M_0$  dans  $B^\times$  entrelace  $\theta_P$ . Soit donc  $y$  dans ce normalisateur. Le groupe  $H_P^1$  a des décompositions d'Iwahori relativement à  $(M_0, P_0)$  et à  $(M_0, P_0^y)$ . Le groupe  $H_P^1 \cap y H_P^1 y^{-1}$  admet donc lui-même une décomposition d'Iwahori relativement à  $(M_0, P_0)$ . Puisque  $\theta_P$  est trivial sur  $H_P^1 \cap N_0$  et sur  $H_P^1 \cap N_0^y$ , chacun des deux caractères  $\theta_P$  et  ${}^y\theta_P$  est trivial sur  $H_P^1 \cap y H_P^1 y^{-1} \cap N_0$ . On a un résultat analogue pour le radical unipotent opposé  $N_0^-$ . Il reste donc à vérifier que  $y$  entrelace :

$$\theta_{P|_{H_P^1 \cap M_0}} = \theta_{|_{H^1 \cap M_0}},$$

ce qui est le cas puisque  $y$  entrelace  $\theta$ .  $\square$

**5.4.** On rappelle (*cf.* [20, §2.2]) qu'il existe une représentation irréductible  $\eta$  de  $J^1$ , unique à isomorphisme près, dont la restriction à  $H^1$  contient  $\theta$ . Elle est normalisée par  $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times) J$ , son entrelacement vaut  $I_G(\eta) = J^1 B^\times J^1$  et, pour tout  $y \in B^\times$ , on a  $\dim \operatorname{Hom}_{J^1 \cap (J^1)^y}(\eta, \eta^y) = 1$ .

**Proposition 5.5.** — *Il existe une représentation irréductible  $\eta_P$  de  $J_P^1$ , unique à isomorphisme près, dont la restriction à  $H_P^1$  contient  $\theta_P$ . En outre :*

- (i) *Les représentations  $\operatorname{Ind}_{J_P^1}^{J^1}(\eta_P)$  et  $\eta$  sont isomorphes.*
- (ii) *Pour tout  $y \in B^\times$ , il existe une unique  $(J_P^1, J_P^1)$ -double classe dans  $J^1 y J^1$  entrelaçant  $\eta_P$  et  $\dim \operatorname{Hom}_{J_P^1 \cap J_P^1 y}(\eta_P, \eta_P^y) = 1$ .*

**Remarque 5.6.** — En particulier, on a  $I_G(\eta_P) = J_P^1 B^\times J_P^1$ .

*Démonstration.* — Pour le point (i), l'argument est identique à celui utilisé pour [7, Proposition 7.2.4]. Pour le (ii), voir [7, Corollary 4.1.5].  $\square$

**Remarque 5.7.** — Les propositions 5.3 à 5.5 sont valables pour une décomposition (5.1) quelconque, c'est-à-dire conforme mais pas nécessairement subordonnée. Il suffit, dans la propositions 5.3, de remplacer  $\mathfrak{A}^i$  par  $\Lambda^i$ , où  $\Lambda$  est une  $\mathcal{O}_D$ -chaîne définissant  $\mathfrak{A}$ .

**5.5.** On suppose que la décomposition (5.1) est subordonnée à  $\mathfrak{B}$ . On rappelle (cf. [20, §2.4]) qu'une  $\beta$ -extension de  $\eta$  est une représentation de  $J = J(\beta, \mathfrak{A})$  prolongeant  $\eta$  dont l'entrelacement contient  $B^\times$ . On pose :

$$J_{\mathfrak{P}} = H^1(\beta, \mathfrak{A})(J(\beta, \mathfrak{A}) \cap P).$$

On fixe une  $\beta$ -extension  $\kappa$  de  $\eta$  et on note  $\kappa_{\mathfrak{P}}$  la représentation de  $J_{\mathfrak{P}}$  sur l'espace des  $(J \cap N)$ -invariants de  $\kappa$ .

**Proposition 5.8.** — (i) On a  $I_G(\kappa_{\mathfrak{P}}) = J_{\mathfrak{P}}B^\times J_{\mathfrak{P}}$ .

(ii) Les représentations  $\text{Ind}_{J_{\mathfrak{P}}}^J(\kappa_{\mathfrak{P}})$  et  $\kappa$  sont isomorphes.

*Démonstration.* — Le point (ii) découle directement du fait que la restriction de  $\kappa_{\mathfrak{P}}$  à  $J_{\mathfrak{P}}^1$  est égale à  $\eta_{\mathfrak{P}}$ . Traitons le point (i). D'après (ii), pour chaque élément  $y \in B^\times$ , il existe une unique double classe  $J_{\mathfrak{P}}xJ_{\mathfrak{P}}$  dans  $JyJ$  entrelaçant  $\kappa_{\mathfrak{P}}$ . Par décomposition d'Iwahori, on peut supposer que  $x$  appartient à :

$$(J \cap N^-)y(J \cap N^-) = (J^1 \cap N^-)y(J^1 \cap N^-),$$

donc à  $J^1yJ^1$ . Puisque  $\kappa_{\mathfrak{P}}$  prolonge  $\eta_{\mathfrak{P}}$ , l'élément  $x$  entrelace  $\eta_{\mathfrak{P}}$ . D'après les propositions 5.4 et 5.5, la double classe  $J_{\mathfrak{P}}^1yJ_{\mathfrak{P}}^1$  est la seule double classe dans  $J^1yJ^1$  qui entrelace  $\eta_{\mathfrak{P}}$ . Ainsi  $x \in J_{\mathfrak{P}}^1yJ_{\mathfrak{P}}^1$  et  $J_{\mathfrak{P}}xJ_{\mathfrak{P}} = J_{\mathfrak{P}}yJ_{\mathfrak{P}}$ , de sorte que  $y$  entrelace  $\kappa_{\mathfrak{P}}$ .  $\square$

**Remarque 5.9.** — Si la décomposition (5.1) n'est pas subordonnée, les groupes  $U(\mathfrak{B})$  et  $J(\beta, \mathfrak{A})$  n'admettent pas, en général, de décomposition d'Iwahori relativement à  $(M, P)$ .

**Proposition 5.10.** — Soit  $\xi$  une représentation irréductible de  $J_{\mathfrak{P}}$  triviale sur  $J_{\mathfrak{P}}^1$ . On a  $I_G(\kappa_{\mathfrak{P}} \otimes \xi) = J_{\mathfrak{P}}I_{B^\times}(\xi)J_{\mathfrak{P}}$ .



*Démonstration.* — La preuve est analogue à celle de [7, Proposition 5.3.2]. Il suffit de remplacer [7, Proposition 5.1.8] par la proposition 5.5.  $\square$

**5.6.** Soit  $\kappa$  une  $\beta$ -extension de  $\eta$  et soit  $\sigma$  l'inflation à  $J$  d'une représentation irréductible du groupe  $J/J^1$ . On pose  $\vartheta = \kappa \otimes \sigma$ . Le quotient  $J/J^1$  est isomorphe à  $U(\mathfrak{B})/U_1(\mathfrak{B})$ , qui est le groupe des points rationnels d'un groupe réductif sur le corps fini  $k_{D_E}$ .

Soit  $\mathfrak{A}'$  un ordre héréditaire  $E$ -pur de  $A$  tel que l'intersection de  $\mathfrak{B}$  avec l'ordre  $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}' \cap B$  soit un ordre héréditaire. On note  $\theta'$  le transfert de  $\theta$  à  $\mathcal{C}(\mathfrak{A}', 0, \beta)$  et  $\eta'$  l'unique représentation irréductible de  $J^1(\beta, \mathfrak{A}')$  contenant  $\theta'$ . On rappelle comment, dans [21], on associe à  $\mathfrak{A}'$  une  $\beta$ -extension  $\kappa'$  de  $\eta'$ . En procédant comme dans [21, Proposition 4.5], on construit une famille finie :

$$(5.3) \quad (\mathfrak{A}_0, \dots, \mathfrak{A}_k), \quad k \geq 0,$$

d'ordres  $E$ -purs de  $A$ , avec  $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}'$ , et telle que pour tout  $0 \leq i < k$ , l'ordre  $\mathfrak{A}_i$  ou bien contienne ou bien soit contenu dans  $\mathfrak{A}_{i+1}$ . (Il suffit de tracer, dans l'immeuble de Bruhat-Tits de  $G$ , le segment joignant  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{A}'$ .) Soit  $\theta_i$  le transfert de  $\theta$  à  $\mathcal{C}(\mathfrak{A}_i, 0, \beta)$  et soit  $\eta_i$  l'unique représentation irréductible de  $J^1(\beta, \mathfrak{A}_i)$  contenant  $\theta_i$ . On définit par récurrence une famille finie :

$$(5.4) \quad (\kappa_0, \dots, \kappa_k), \quad k \geq 0,$$

de  $\beta$ -extensions, en posant  $\kappa_0 = \kappa$  et, pour  $0 \leq i < k$ , en prenant pour  $\kappa_{i+1}$  l'unique  $\beta$ -extension de  $\eta_{i+1}$  qui soit cohérente avec  $\kappa_i$  au sens de [21, §2.4.4]. On pose enfin  $\kappa' = \kappa_k$ .

**Définition 5.11.** — Une représentation  $\vartheta'$  de  $J(\beta, \mathfrak{A}')$  est dite *cohérente avec*  $\vartheta$  si elle est de la forme  $\vartheta' = \kappa' \otimes \sigma'$ , où  $\sigma'$  est l'inflation à  $J(\beta, \mathfrak{A}')$  d'une représentation irréductible de  $J(\beta, \mathfrak{A}')/J^1(\beta, \mathfrak{A}')$  telle que  $\sigma$  et  $\sigma'$  s'entrelacent sur  $U(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}')$ .

**Remarque 5.12.** — (i) Par exemple, si  $\mathfrak{B}'$  contient  $\mathfrak{B}$ , on peut considérer  $\sigma$  comme une représentation du sous-groupe parabolique  $U(\mathfrak{B})/U_1(\mathfrak{B}')$  de

$U(\mathfrak{B}')/U_1(\mathfrak{B}')$ . La condition sur  $\sigma'$  signifie alors que  $\sigma'$  est l'inflation à  $J(\beta, \mathfrak{A}')$  d'une composante irréductible de l'induite de  $\sigma$  à  $U(\mathfrak{B}')/U_1(\mathfrak{B}')$ .

(ii) Si  $\mathfrak{B}'$  est contenu dans  $\mathfrak{B}$ , la condition sur  $\sigma'$  signifie que  $\sigma'$  est l'inflation à  $J(\beta, \mathfrak{A}')$  d'une composante irréductible de la restriction de  $\sigma$  à  $U(\mathfrak{B}')/U_1(\mathfrak{B})$ .

**Proposition 5.13.** — *Soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$  contenant  $\vartheta$ . Alors  $\pi$  contient une représentation  $\vartheta'$  de  $J(\beta, \mathfrak{A}')$  cohérente avec  $\vartheta$ .*

*Démonstration.* — On procède en trois étapes.

(i) On considère d'abord le cas où  $\mathfrak{A}'$  ou bien contient, ou bien est contenu dans  $\mathfrak{A}$ . La démonstration est analogue à celle de [7, Proposition 8.3.5] : voir *op. cit.* p.296. Il suffit de remplacer [7, (5.2.14)] par [20, Proposition 2.29] et [7, Proposition 5.3.2] par [21, Lemme 4.2]. Dans le cas où  $\mathfrak{A}'$  est contenu dans  $\mathfrak{A}$ , on a même un résultat plus précis : on voit que toute représentation de  $J(\beta, \mathfrak{A}')$  cohérente avec  $\vartheta$  est contenue dans  $\pi$ .

(ii) On considère ensuite le cas où  $\mathfrak{B}'$  ou bien contient, ou bien est contenu dans  $\mathfrak{B}$ . Dans ce cas, la famille (5.3) peut être choisie de telle sorte que  $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$  pour  $0 \leq i \leq k-1$ . On peut donc définir  $\vartheta_i = \kappa_i \otimes \sigma$ . Alors  $\vartheta_i$  est l'unique représentation de  $J(\beta, \mathfrak{A}_i)$  cohérente avec  $\vartheta$ . C'est même l'unique représentation de  $J(\beta, \mathfrak{A}_i)$  cohérente avec  $\vartheta_j$  pour tout  $0 \leq j \leq k-1$ . En appliquant (i) successivement à chaque paire  $\{\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1}\}$  au lieu de  $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'\}$ , on voit que  $\pi$  contient  $\vartheta$  si et seulement si elle contient  $\vartheta_{k-1}$ . En appliquant encore (i) avec  $\mathfrak{A}_{k-1}$  au lieu de  $\mathfrak{A}$ , on voit que  $\pi$  contient  $\vartheta_{k-1}$  si et seulement si elle contient une représentation  $\vartheta'$  cohérente avec  $\vartheta_{k-1}$ , ce qui est la même chose que d'être cohérente avec  $\vartheta$ .

(iii) On considère enfin le cas général. Pour se ramener à (ii), on passe d'abord de  $\mathfrak{B}$  à  $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}'$ , de sorte que toute représentation de  $J(\beta, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}')$  cohérente avec  $\vartheta$  est contenue dans  $\pi$ , puis on passe de  $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}'$  à  $\mathfrak{B}'$ , de sorte que  $\pi$  contient une représentation  $\vartheta'$  de  $J(\beta, \mathfrak{A}')$  cohérente avec  $\vartheta$ .

Ceci termine la démonstration de la proposition 5.13. □

**Remarque 5.14.** — En particulier, si  $\pi$  contient  $\vartheta$ , alors  $\pi$  contient aussi  $\vartheta' = \kappa' \otimes \sigma$  pour tout ordre héréditaire E-pur  $\mathfrak{A}'$  tel que  $\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$ .

**5.7.** Soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$  contenant un caractère simple d'un groupe  $H^1$  – c'est-à-dire qu'il existe un couple  $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \theta)$  constitué d'une strate simple et d'un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$  tels que la restriction de  $\pi$  à  $H^1(\beta, \mathfrak{A})$  contienne  $\theta$ . Parmi ces couples, on en choisit un tel que l'ordre héréditaire  $\mathfrak{A}$  soit minimal.

Soit  $\eta$  l'unique représentation irréductible de  $J^1(\beta, \mathfrak{A})$  contenant  $\theta$ . La restriction de  $\pi$  à  $J^1(\beta, \mathfrak{A})$  contient donc  $\eta$ , et la restriction de  $\pi$  à  $J(\beta, \mathfrak{A})$  contient une représentation de la forme  $\vartheta = \kappa \otimes \sigma$ , où  $\kappa$  est une  $\beta$ -extension de  $\eta$  et  $\sigma$  est l'inflation à  $J(\beta, \mathfrak{A})$  d'une représentation irréductible de  $J(\beta, \mathfrak{A})/J^1(\beta, \mathfrak{A}) \simeq U(\mathfrak{B})/U_1(\mathfrak{B})$ , qu'on note encore  $\sigma$ .

**Proposition 5.15.** — *Dans cette situation,  $\sigma$  est une représentation cuspidale de  $U(\mathfrak{B})/U_1(\mathfrak{B})$ .*

*Démonstration.* — Supposons que  $\sigma$  n'est pas une représentation cuspidale de  $\mathcal{G} = U(\mathfrak{B})/U_1(\mathfrak{B})$ . Il existe donc un sous-groupe parabolique propre  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{G}$ , de radical unipotent  $\mathcal{U}$ , tel que la restriction de  $\sigma$  à  $\mathcal{U}$  contienne le caractère trivial. Il existe donc une représentation  $\sigma'$  de  $\mathcal{P}/\mathcal{U}$  telle que  $\sigma$  soit une composante irréductible de  $\text{Ind}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{G}}(\sigma')$ . Il existe un unique ordre héréditaire  $\mathfrak{B}'$  contenu dans  $\mathfrak{B}$  tel que  $\mathcal{P}$  soit l'image de  $U(\mathfrak{B}')$  par l'application quotient  $U(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathcal{G}$ . Le radical unipotent  $\mathcal{U}$  est alors l'image de  $U_1(\mathfrak{B}')$ . Par [20, Lemme 1.7], il existe un ordre héréditaire E-pur  $\mathfrak{A}'$  contenu dans  $\mathfrak{A}$  tel que  $\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$ . Plus précisément,  $\mathfrak{A}'$  est strictement contenu dans  $\mathfrak{A}$ , puisque  $\mathfrak{B}'$  l'est dans  $\mathfrak{B}$ .

Soit  $\theta'$  le transfert de  $\theta$  à  $\mathcal{C}(\mathfrak{A}', 0, \beta)$ , soit  $\eta'$  l'unique représentation irréductible de  $J^1(\beta, \mathfrak{A}')$  contenant  $\theta$  et soit  $\kappa'$  la  $\beta$ -extension de  $\eta'$  construite comme en (5.4). L'inflation à  $J(\beta, \mathfrak{A}')$  de la représentation  $\sigma'$  de :

$$\mathcal{P}/\mathcal{U} \simeq U(\mathfrak{B}')/U_1(\mathfrak{B}') \simeq J(\beta, \mathfrak{A}')/J^1(\beta, \mathfrak{A}')$$

est encore notée  $\sigma'$ , et on pose  $\vartheta' = \kappa' \otimes \sigma'$ . Nous sommes alors dans la situation du §5.6 et  $\vartheta$  est cohérente avec  $\vartheta'$ . Par la proposition 5.13, la représentation  $\pi$  contient donc aussi  $\vartheta'$  et *a fortiori*  $\theta'$ . Puisque  $\mathfrak{A}'$  est strictement inclus dans  $\mathfrak{A}$ , ceci contredit la minimalité de  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

**5.8.** On continue avec les notations du paragraphe précédent — donc  $\pi$  contient une représentation de la forme  $\vartheta = \kappa \otimes \sigma$  avec  $\sigma$  cuspidale. Par la proposition 5.13 (voir aussi la remarque 5.14), on peut changer l'ordre héréditaire  $\mathfrak{A}$  sans changer sa trace sur  $B$ . On peut donc supposer que :

$$(5.5) \quad \mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times = \mathfrak{K}(\mathfrak{B}).$$

Il suffit de choisir l'ordre héréditaire  $E$ -pur  $\mathfrak{A}$  associé à  $\mathfrak{B}$  par le théorème 1.7. (Dans la terminologie de Grabitz [10], un ordre principal  $E$ -pur  $\mathfrak{A}$  vérifiant (5.5) est dit *sound*.)

Soit  $V = V^1 \oplus \dots \oplus V^e$  une décomposition de  $V$  subordonnée à  $\mathfrak{B}$ . Soit  $M$  le sous-groupe de Levi de  $G$  qui est le stabilisateur de cette décomposition, et soit  $P = MN$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $M$ . On a un isomorphisme de groupes :

$$J_P \cap M \simeq \prod_{i=1}^e J(\beta, \mathfrak{A}_i).$$

Si on note  $\theta_i$  la restriction de  $\theta$  à  $H^1(\beta, \mathfrak{A}_i)$ , c'est-à-dire le transfert de  $\theta$  à  $\mathcal{C}(\mathfrak{A}_i, 0, \beta)$ , et  $\eta_i$  l'unique représentation irréductible de  $J^1(\beta, \mathfrak{A}_i)$  contenant  $\theta_i$ , il existe pour chaque  $i$  une  $\beta$ -extension  $\kappa_i$  de  $\eta_i$  telle que la restriction de  $\kappa_P$  à  $J_P \cap M$  soit équivalente à :

$$\kappa_1 \otimes \dots \otimes \kappa_e.$$

(En effet, l'entrelacement de  $\kappa_P|_{J_P \cap M}$  contient  $B^\times \cap M$ .) De façon analogue, il existe, pour chaque entier  $i$ , une représentation  $\sigma_i$  de  $J(\beta, \mathfrak{A}_i)$  qui est l'inflation d'une représentation irréductible cuspidale de  $J(\beta, \mathfrak{A}_i)/J^1(\beta, \mathfrak{A}_i) \simeq U(\mathfrak{B}_i)/U_1(\mathfrak{B}_i)$  telle que la restriction de  $\sigma$  à  $J \cap M$  soit équivalente à :

$$\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_e.$$

Si on considère  $\sigma$  comme représentation de  $J_P/J_P^1 \simeq J/J^1$ , on pose  $\vartheta_P = \kappa_P \otimes \sigma$ , qui est une représentation de  $J_P$ . Comme dans [7, Proposition 7.2.17], on a le résultat suivant.

**Proposition 5.16.** — (i)  $\vartheta_P$  est irréductible et  $\vartheta \simeq \text{Ind}_{J_P}^J(\vartheta_P)$ .

(ii) Les restrictions de  $\vartheta_P$  à  $J_P \cap N$  et  $J_P \cap N^-$  sont triviales, et la restriction de  $\vartheta_P$  à  $J_P \cap M$  est équivalente à  $\vartheta_1 \otimes \dots \otimes \vartheta_e$ , où  $\vartheta_i = \kappa_i \otimes \sigma_i$  est irréductible.

**5.9.** On fixe une extension non ramifiée  $L/E$  maximale dans  $D_E$  et une uniformisante  $\varpi$  de  $D_E$  normalisant  $L$ . Le groupe de Galois de  $L/E$  est engendré par  $\text{Ad}(\varpi)$ , l'automorphisme de conjugaison par  $\varpi$ . Par réduction, on identifie les groupes de Galois  $\text{Gal}(L/E)$  et  $\text{Gal}(k_{D_E}/k_E)$  et on note  $\phi$  l'image de  $\text{Ad}(\varpi)$  dans  $\text{Gal}(k_{D_E}/k_E)$ .

On fixe un isomorphisme de  $E$ -algèbres  $B \simeq M_{m_E}(D_E)$  vérifiant les conditions de la définition 5.1, dont on reprend les notations. Cet isomorphisme induit des isomorphismes de groupes  $B^\times \simeq GL_{m_E}(D_E)$  et :

$$U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B}) \simeq GL_{n_1}(k_{D_E}) \times \dots \times GL_{n_e}(k_{D_E}).$$

De cette façon, le groupe  $\text{Gal}(k_{D_E}/k_E)$  opère sur les représentations de  $J/J^1 \simeq U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B})$ , et notamment sur les  $\sigma_i$ .

**5.10.** Dans ce paragraphe, on suppose que les  $\sigma_i$  ne sont pas tous dans une seule orbite sous  $\text{Gal}(k_{D_E}/k_E)$ . Plus précisément, on note  $I$  l'ensemble des entiers  $1 \leq i \leq e$  tels que  $\sigma_i$  soit équivalent à un conjugué de  $\sigma_1$  sous  $\text{Gal}(k_{D_E}/k_E)$ , et on suppose que  $I$  n'est pas égal à  $\{1, \dots, e\}$  tout entier. On pose :

$$W = \bigoplus_{i \in I} V^i, \quad W' = \bigoplus_{i \notin I} V^i.$$

Soit  $M'$  le stabilisateur de la décomposition  $V = W \oplus W'$ , qui est un sous-groupe de Levi de  $G$ , et soit  $P' = M'N'$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $M'$ . Soit  $P = MN$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $M$  tel que  $P \subset P'$ .

**Proposition 5.17.** — *Dans cette situation,  $(J_P, \vartheta_P)$  est une paire couvrante de  $(J_P \cap M', \vartheta_{P|_{J_P \cap M'}})$ .*

*Démonstration.* — Nous allons d'abord majorer l'entrelacement de  $\vartheta_P$ . Soit  $U$  le sous-groupe d'Iwahori de  $B^\times$  contenu dans  $U(\mathfrak{B})$  s'identifiant au sous-groupe d'Iwahori standard de  $GL_{m_E}(D_E)$ . Soit  $\tilde{W}$  le groupe de Weyl affine généralisé

de  $B^\times \simeq \mathrm{GL}_{m_E}(D_E)$ , consistué des matrices monomiales dont les coefficients non nuls sont des puissances de  $\varpi$ . Par la décomposition de Bruhat, on a  $B^\times = U(\mathfrak{B})\tilde{W}U(\mathfrak{B})$ .

D'après [12, Proposition 1.2], l'élément  $w \in \tilde{W}$  entrelace  $\sigma_{|U(\mathfrak{B})}$  si est seulement s'il normalise  $\sigma_{|U(\mathfrak{B}) \cap M}$ . D'après la construction de  $M'$ , ceci implique que  $w \in M'$ , donc  $I_{B^\times}(\sigma_{|U(\mathfrak{B})})$  est inclus dans  $U(\mathfrak{B})M'U(\mathfrak{B})$ . En particulier, d'après le théorème 5.10, on a :

$$I_G(\vartheta_P) = J_P I_{B^\times}(\sigma_{|U(\mathfrak{B})}) J_P \subset J_P M' J_P.$$

Par la proposition 5.16, et comme  $N \supset N'$ , le couple  $(J_P, \vartheta_P)$  est décomposé au dessus de  $(J_P \cap M', \vartheta_{P|J_P \cap M'})$ . La fin de la démonstration est alors identique à celle de [9, Corollary 3.9(iii)].  $\square$

**Corollaire 5.18.** — *La représentation  $\pi$  de  $G$  n'est pas supercuspidale.*

**5.11.** Dans ce paragraphe, on traite le cas où chacun des  $\sigma_i$  est équivalent à un conjugué de  $\sigma_1$  sous  $\mathrm{Gal}(k_{D_E}/k_E)$ . En particulier, l'ordre  $\mathfrak{B}$  est principal. D'après la proposition 5.16, la représentation  $\vartheta_P$  détermine, à permutation circulaire près, le vecteur :

$$V(J, \vartheta) = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_e),$$

où chaque  $\vartheta_i$  est considéré comme une classe d'équivalence d'une représentation irréductible de  $J(\beta, \mathfrak{A}_i)$ .

**Proposition 5.19.** — *Soit  $\tau$  une permutation de  $\{1, \dots, e\}$  et, pour chaque  $1 \leq i \leq e$ , soit  $\gamma_i \in \mathrm{Gal}(k_{D_E}/k_E)$ . Alors  $\pi$  contient aussi une représentation  $\vartheta' = \kappa \otimes \sigma'$  de  $J(\beta, \mathfrak{A})$  telle que :*

$$V(J, \vartheta') = (\gamma^1 \vartheta_{\tau(1)}, \dots, \gamma^e \vartheta_{\tau(e)}),$$

où  $\gamma^i \vartheta_{\tau(i)} = \kappa_{\tau(i)} \otimes \gamma^i \sigma_{\tau(i)}$  pour chaque  $1 \leq i \leq e$ .

*Démonstration.* — Il suffit de considérer les deux cas particuliers suivants :

(i) D'abord, on suppose que  $V(J, \vartheta') = (\phi\vartheta_e, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{e-1})$ . On pose :

$$\Pi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} & I_{m_E-1} \\ \varpi & \end{pmatrix} \in GL_{m_E}(D_E).$$

L'élément  $\Pi_{\mathfrak{B}}$  normalise  $\mathfrak{B}$  donc, par (5.5), il normalise également  $J(\beta, \mathfrak{A})$  et la  $\beta$ -extension  $\kappa$ . En particulier,  $\pi$  contient la représentation  $\vartheta' = \vartheta^{\Pi_{\mathfrak{B}}} = \kappa \otimes \sigma^{\Pi_{\mathfrak{B}}}$ , et  $\sigma^{\Pi_{\mathfrak{B}}}$  est équivalent à  $\phi\sigma_e \otimes \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_{e-1}$ .

(ii) Ensuite, on suppose que :

$$V(J, \vartheta') = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_{i-1}, \vartheta_{i+1}, \vartheta_i, \vartheta_{i+2}, \dots, \vartheta_e)$$

et  $\sigma_i \not\sim \sigma_{i+1}$ . Dans ce cas, la démonstration est identique à celle de [7, Proposition 8.3.4] (voir *loc. cit.* p.297), quitte à remplacer [7, Proposition 8.3.5] par la proposition 5.13.

Ceci termine la preuve de la proposition 5.19.  $\square$

D'après la proposition 5.19, on peut supposer que toutes les  $\sigma_i$  sont équivalentes. La paire  $(J(\beta, \mathfrak{A}), \vartheta)$  est donc un type simple au sens de [21, §4.1].

**Corollaire 5.20.** — *La représentation  $\pi$  est supercuspidale si et seulement si  $\mathfrak{B}$  est un ordre maximal.*

*Démonstration.* — D'après [21, Théorème 5.6], le type simple  $(J(\beta, \mathfrak{A}), \vartheta)$  est un type pour une classe inertielle  $[M, \rho]_G$ , et le nombre de blocs du sous-groupe de Levi  $M$  est égal à la période de  $\mathfrak{B}$ . Ainsi  $\pi$  est supercuspidale si et seulement si  $M = G$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\mathfrak{B}$  est un ordre maximal.  $\square$

**5.12.** Le théorème suivant est le résultat principal de cette section — et de cet article.

**Théorème 5.21.** — *Soit  $\pi$  une représentation irréductible supercuspidale de niveau non nul de  $G$ . Alors il existe un type simple maximal  $(J, \lambda)$  tel que la restriction de  $\pi$  à  $J$  contienne  $\lambda$ .*

*Démonstration.* — D'après le théorème 4.1, la représentation  $\pi$  contient un caractère simple, c'est-à-dire qu'il existe une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  et un

caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\beta, 0, \mathfrak{A})$  tels que la restriction de  $\pi$  à  $H^1 = H^1(\beta, \mathfrak{A})$  contienne  $\theta$ . D’après le §5.7, pour une certaine choix de  $\mathfrak{A}$  et de  $\theta$ , la représentation  $\pi$  contient une représentation  $\vartheta = \kappa \otimes \sigma$  de  $J = J(\beta, \mathfrak{A})$ , où  $\kappa$  est une  $\beta$ -extension de  $\theta$  et  $\sigma$  l’inflation à  $J$  d’une représentation irréductible cuspidale de  $J/J^1 \simeq U(\mathfrak{B})/U_1(\mathfrak{B})$ . Comme dans le §5.8, on a :

$$\sigma|_{J \cap M} = \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_e,$$

où  $e$  est la période de  $\mathfrak{B}$ . Puisque  $\pi$  est supercuspidale, les  $\sigma_i$  sont toutes conjuguées sous  $\text{Gal}(k_{\mathbb{D}_E}/k_E)$  d’après le corollaire 5.18. D’après le corollaire 5.20, l’ordre  $\mathfrak{B}$  est donc maximal et  $(J, \vartheta)$  est un type simple maximal.  $\square$

**Corollaire 5.22.** — (i) *Il existe un prolongement  $\Lambda$  de  $\lambda$  à  $\bar{J} = N_G(\lambda)$  tel que  $\pi$  soit équivalente à l’induite compacte de  $\Lambda$  à  $G$ .*

(ii) *Le couple  $(J, \lambda)$  est un type pour la classe inertielle  $[G, \pi]_G$ .*

*Démonstration.* — Il s’agit de [21, Théorème 5.2].  $\square$

Le théorème suivant récapitule tout le travail effectué.

**Théorème 5.23.** — *Soit  $\mathfrak{s} = [G_0^r, \pi_0^{\otimes r}]_G$  une classe inertielle simple de  $G$ , où  $r$  est un diviseur de  $m$  et  $\pi_0$  une représentation irréductible supercuspidale de  $G_0 = \text{GL}_{m/r}(D)$ . Il existe un type simple  $(J, \lambda)$  qui est un type pour  $\mathfrak{s}$ .*

*Démonstration.* — Si  $\pi_0$  est de niveau zéro, il s’agit de [12, Theorem 5.5]. Sinon, il s’agit de [21, Théorème 5.6], conjointement au théorème 5.21.  $\square$

## Références

- [1] P. BROUSSOUS – “Extension du formalisme de Bushnell et Kutzko au cas d’une algèbre à division”, *Proc. London Math. Soc. (3)* **77** (1998), no. 2, p. 292–326.
- [2] P. BROUSSOUS & B. LEMAIRE – “Building of  $\text{GL}(m, D)$  and centralizers”, *Transform. Groups* **7** (2002), no. 1, p. 15–50.
- [3] P. BROUSSOUS – “Hereditary orders and embeddings of local fields in simple algebras”, *J. Algebra* **204** (1998), no. 1, p. 324–336.
- [4] ———, “Minimal strata for  $\text{GL}(m, D)$ ”, *J. Reine Angew. Math.* **514** (1999), p. 199–236.



- [5] P. BROUSSOUS & M. GRABITZ – “Pure elements and intertwining classes of simple strata in local central simple algebras”, *Comm. Algebra* **28** (2000), no. 11, p. 5405–5442.
- [6] C. J. BUSHNELL & G. HENNIART – “Local tame lifting for  $GL(N)$ . I. Simple characters”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1996), no. 83, p. 105–233.
- [7] C. J. BUSHNELL & P. C. KUTZKO – *The admissible dual of  $GL(N)$  via compact open subgroups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [8] ———, “Smooth representations of reductive  $p$ -adic groups: structure theory via types”, *Proc. London Math. Soc.* (3) **77** (1998), no. 3, p. 582–634.
- [9] ———, “Semisimple types in  $GL_n$ ”, *Compositio Math.* **119** (1999), no. 1, p. 53–97.
- [10] M. GRABITZ – “Simple characters for principal orders and their matching”, Preprint MPIM1999-117, Max Planck Institut, Bonn (1999).
- [11] ———, “Simple characters for principal orders, part II”, Preprint MPIM2003-56, Max Planck Institut, Bonn (2003).
- [12] M. GRABITZ, A. J. SILBERGER & E.-W. ZINK – “Level zero types and Hecke algebras for local central simple algebras”, *J. Number Theory* **91** (2001), no. 1, p. 92–125.
- [13] R. HOWE & A. MOY – “Minimal  $K$ -types for  $GL_n$  over a  $p$ -adic field”, *Astérisque* (1989), no. 171-172, p. 257–273, Orbites unipotentes et représentations, II.
- [14] L. MORRIS – “Tamely ramified intertwining algebras”, *Invent. Math.* **114** (1993), no. 1, p. 1–54.
- [15] ———, “Tamely ramified supercuspidal representations”, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **29** (1996), p. 639–667.
- [16] ———, “Level zero  $G$ -types”, *Compositio Math.* **118** (1999), p. 135–157.
- [17] A. MOY & G. PRASAD – “Unrefined minimal  $K$ -types for  $p$ -adic groups”, *Invent. Math.* **116** (1994), p. 393–408.
- [18] ———, “Unrefined minimal  $K$ -types for  $p$ -adic groups”, *Invent. Math.* **116** (1994), p. 393–408.
- [19] V. SÉCHERRE – “Représentations lisses de  $GL(m, D)$ , I : caractères simples”, *Bull. Soc. math. France* **132** (2004), no. 3, p. 327–396.
- [20] ———, “Représentations lisses de  $GL(m, D)$ , II :  $\beta$ -extensions”, *Compositio Math.* **141** (2005), p. 1531–1550.
- [21] ———, “Représentations lisses de  $GL(m, D)$ , III : types simples”, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **38** (2005), p. 951–977.
- [22] S. STEVENS – “Double coset decompositions and intertwining”, *Manuscripta Math.* **106** (2001), no. 3, p. 349–364.
- [23] ———, “Semisimple strata for  $p$ -adic classical groups”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **35** (2002), no. 3, p. 423–435.

- [24] ———, “Semisimple characters for  $p$ -adic classical groups”, *Duke Math. J.* **127** (2005), no. 1, p. 123–173.
- [25] E.-W. ZINK – “Representation theory of local division algebras”, *J. Reine Angew. Math.* **428** (1992), p. 1–44.
- [26] ———, “More on embeddings of local fields in simple algebras”, *J. Number Theory* **77** (1999), no. 1, p. 51–61.

---

V. SÉCHERRE, Institut de Mathématiques de Luminy, CNRS UMR 6206, Université de la Méditerranée, 163 avenue de Luminy, 13288 Marseille Cedex 09, France  
*E-mail* : `secherre@iml.univ-mrs.fr`

S. STEVENS, School of Mathematics, University of East Anglia, Norwich NR4 7TJ, United Kingdom • *E-mail* : `Shaun.Stevens@uea.ac.uk`