REPRÉSENTATIONS LISSES DE $\mathrm{GL}_m(D)$ III : TYPES SIMPLES

par Vincent Sécherre

Résumé. — Soit F un corps local non archimédien, soit D une F-algèbre à division et soit G le groupe $\mathrm{GL}_m(D)$, avec $m \geqslant 1$. Dans cet article, nous poursuivons le travail entrepris dans [12] et [13] visant à généraliser les résultats dus à Bushnell et Kutzko ([5]) concernant le groupe déployé $\mathrm{GL}_n(F)$. Pour tout entier $r \geqslant 1$ divisant m, et pour certaines représentations lisses irréductibles supercuspidales Π_0 de $G_0 = \mathrm{GL}_{m/r}(D)$, nous construisons un type pour la classe inertielle $[G_0^r, \Pi_0^{\otimes r}]_G$. Nous déterminons la structure de son algèbre de Hecke qui, comme dans le cas déployé, est une algèbre de Hecke affine de type A_{r-1}.

Abstract. — Let F be a non Archimedean local field, D a division algebra over F and $G = \mathrm{GL}_m(D)$, with $m \geqslant 1$. This paper is the continuation of [12] and [13], whose purpose is the generalization to G of Bushnell-Kutzko's work ([5]) concerning the split group $\mathrm{GL}_n(F)$. For any $r \geqslant 1$ dividing m, and for certain smooth irreducible supercuspidal representations Π_0 of $G_0 = \mathrm{GL}_{m/r}(D)$, we construct a type for the inertial class $[G_0^r, \Pi_0^{\otimes r}]_G$. We give the structure of its Hecke algebra which, as in the split case, is an affine Hecke algebra of type A_{r-1}.

Introduction

Soit F un corps local commutatif non archimédien, et soit G une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(F)$, $n \geqslant 1$, c'est-à-dire un groupe de la forme $\mathrm{GL}_m(D)$, où D est une F-algèbre à division, de dimension d^2 sur son centre F, et où $n = md$. Des résultats de nature très générale ([1]), valables pour le groupe des F-points de n'importe quel groupe réductif connexe défini sur F, nous renseignent sur la structure de la catégorie $\mathscr{R}_{\mathbb{C}}(G)$ des représentations lisses complexes de G. À ce groupe correspond une variété algébrique complexe dont les points sont

Vincent Sécherre, Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206, Campus de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 9 • *E-mail :* secherre@iml.univ-mrs.fr

les classes de conjugaison de paires cuspidales de G, et la catégorie $\mathscr{R}_{\mathbb{C}}(G)$ se décompose en un produit de blocs indécomposables correspondant bijectivement aux composantes connexes de cette variété, c'est-à-dire aux classes inertielles de G. La question se pose de déterminer la structure précise de ces blocs.

La théorie des types, élaborée dans [6] par Bushnell et Kutzko, a pour but de décrire explicitement chaque bloc indécomposable de $\mathscr{R}_{\mathbb{C}}(G)$ comme une catégorie de modules sur une $\mathbb{C}$-algèbre. Techniquement, il s'agit de construire, pour un bloc $\mathscr{B}$ donné, un sous-groupe ouvert compact K de G et une représentation irréductible ρ de K, de façon telle que les représentations irréductibles de G appartenant à $\mathscr{B}$ soient exactement celles dont la restriction à K contient ρ. Une fois un tel couple construit, que l'on dit être un *type* pour le bloc $\mathscr{B}$, il apparaît que $\mathscr{B}$ est équivalent à la catégorie des modules sur l'algèbre de Hecke du couple (K,ρ).

Dans [5] et [7], Bushnell et Kutzko obtiennent une classification complète, en termes de types, des représentations lisses complexes de $\mathrm{GL}_n(F)$, tout en posant les jalons d'une méthode générale de construction de types, que l'on espère assez générale pour permettre de traiter le cas de tous les groupes classiques. Cette méthode a été éprouvée avec succès dans certains cas : à propos de $\mathrm{GL}_m(D)$, mentionnons les travaux de Broussous et de Grabitz, qui ont déjà été discutés dans l'introduction de [12], et l'article [9] de Grabitz, Silberger et Zink sur les blocs de niveau zéro de $\mathrm{GL}_m(D)$. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Blasco, Blondel, Goldberg-Roche, Stevens... pour d'autres groupes classiques. C'est sur cette même méthode que nous nous fondons dans [12] et [13], ainsi que dans le présent article, pour étendre à $\mathrm{GL}_m(D)$ la classification obtenue par Bushnell et Kutzko pour le groupe déployé $\mathrm{GL}_n(F)$.

L'objet de cet article est le suivant : nous construisons des types pour certaines classes inertielles *simples* de G, c'est-à-dire de la forme $[G_0^r,\Pi_0^{\otimes r}]_G$, où r est un entier divisant m et Π_0 une représentation irréductible supercuspidale du groupe $G_0=\mathrm{GL}_{m/r}(D)$, et nous déterminons la structure de leurs algèbres de Hecke. Mentionnons que l'on s'attend à ce que cette construction soit exhaustive, c'est-à-dire qu'elle fournisse un type pour *chaque* classe inertielle simple de G. Cette construction s'effectue en trois étapes que nous allons décrire brièvement.

On fixe une fois pour toutes une strate simple $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ de $\mathrm{M}_m(D)$ (*cf.* définition 2.1). Contentons-nous de rappeler ici que β est un élément de $\mathrm{M}_m(D)$ tel que la F-algèbre $E=F[\beta]$ soit un corps, que $\mathfrak{A}$ est un $\mathfrak{o}_F$-ordre héréditaire de $\mathrm{M}_m(D)$ normalisé par $E^\times$ et que n est un entier dépendant de β et de $\mathfrak{A}$.

La première étape, effectuée dans [12], développe le processus de construction d'un ensemble fini $\mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A})$ de *caractères simples* attachés à cette strate simple. Il s'agit de caractères définis sur un certain sous-groupe ouvert compact de G, et jouissant de remarquables propriétés de fonctorialité connues sous le nom de propriétés de *transfert*. Plus précisément, si $[\mathfrak{A}',n',0,\beta]$ est n'importe quelle strate simple d'une F-algèbre centrale simple dans laquelle se plonge E, il existe une bijection canonique de $\mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A})$ sur $\mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A}')$. Dans la seconde étape, effectuée dans [13], on produit, pour chaque caractère simple $\theta\in\mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A})$, une famille finie de β-*extensions*, représentations irréductibles d'un sous-groupe ouvert compact $J=J(\beta,\mathfrak{A})$ de G contenant θ et, surtout, de même entrelacement que θ. La troisième étape est celle qui occupe le présent article. Si κ désigne une β-extension d'un caractère simple $\theta\in\mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A})$, le groupe J admet naturellement pour quotient un groupe réductif fini de la forme :

$$\mathrm{GL}_{s_1}(k)\times\cdots\times\mathrm{GL}_{s_r}(k)\ , \tag{1}$$

où les s_i sont des entiers $\geqslant 1$ et où k est une extension finie du corps résiduel de E. Ainsi, toute représentation σ du groupe réductif fini (1) peut être vue, par inflation, comme une représentation du groupe J, auquel cas on pose $\lambda=\kappa\otimes\sigma$. Lorsque tous les s_i sont égaux à un même entier $s\geqslant 1$ et lorsque σ est de la forme $\sigma_0^{\otimes r}$, où σ_0 est une représentation irréductible supercuspidale de $\mathrm{GL}_s(k)$, un couple (J,λ) obtenu par le procédé qui vient d'être décrit est appelé, par anticipation sur sa nature de type (*cf.* théorème 5.6), un *type simple* (*cf.* paragraphe 4.1). Les principaux résultats obtenus dans cet article sont les suivants.

THÉORÈME 1. — Lorsque $r=1$, le type simple étant qualifié dans ce cas de *maximal*, le couple (J,λ) est un type pour un bloc supercuspidal de $\mathscr{R}_{\mathbb{C}}(G)$. Plus précisément, il existe une représentation irréductible supercuspidale Π de G telle que les représentations irréductibles de G dont la restriction à J contient λ soient exactement les $\Pi\otimes\chi$, où χ décrit le groupe des caractères non ramifiés de G. En outre, une telle représentation Π s'obtient par induction compacte modulo le centre d'un certain prolongement de λ.

THÉORÈME 2. — On note θ_0 le transfert de θ à $\mathrm{GL}_{m/r}(D)=G_0$ relativement à une strate simple $[\mathfrak{A}_0,n_0,0,\beta]$ de $\mathrm{M}_{m/r}(D)$, on fixe une β-extension κ_0 de θ_0, définie sur le groupe $J_0=J(\beta,\mathfrak{A}_0)$, et on pose $\lambda_0=\kappa_0\otimes\sigma_0$. On suppose que l'ordre $\mathfrak{A}_0$ est choisi de façon telle que le couple (J_0,λ_0) soit un type simple maximal pour G_0. Alors le couple (J,λ) est un type pour la classe inertielle $[G_0^r,\Pi_0^{\otimes r}]_G$, où Π_0 est n'importe quelle représentation irréductible supercuspidale de G_0 dont la restriction à J_0 contient λ_0.

THÉORÈME 3. — L'algèbre de Hecke de (J,λ) est une algèbre de Hecke affine de type $\mathcal{H}(r,q_k^s)$, où q_k désigne le cardinal du corps k. En outre, tout élément de cette algèbre supporté par une double classe modulo J est inversible.

Nous donnons maintenant une description du point de vue sur lequel repose l'ensemble de ce travail. En niveau zéro, c'est-à-dire lorsque $\beta=0$ (*cf.* remarque 4.1), les types simples ont été étudiés en détail par Grabitz, Silberger et Zink dans [9]. Le point de vue adopté ici est que, si B désigne le centralisateur de E dans $\mathrm{M}_m(D)$, un type simple doit être vu comme la conjonction d'une part d'un facteur (J,σ) dont la restriction à $B^\times$ est un type simple *fixe* (U,σ) de niveau zéro dans $B^\times$, d'autre part d'un facteur (J,κ) *variable*, dépendant de façon *cohérente* de la strate simple $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$. Plus précisément, un type simple donné de niveau non nul doit être étudié non pas isolément, mais en l'inscrivant dans une famille cohérente de types simples ayant tous le même facteur de niveau zéro.

La notion de cohérence entre β-extensions de G est déjà présente dans [5] (*cf.* (5.1.12) *sqq.*) et dans [13] (*cf.* §2.4.2). On fixe une strate simple $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ et un caractère simple $\theta\in\mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A})$, tandis que le quadruplet $[\mathfrak{A}',n',0,\beta]$ décrit une famille de strates simples que nous allons préciser au fur et à mesure. Lorsque $\mathfrak{A}'$ ou bien contient ou bien est contenu dans $\mathfrak{A}$, on se trouve dans la même situation que dans [13], §2.4.2, et il existe une correspondance bijective naturelle (*cf.* paragraphe 2.4.4), définie en termes de représentations induites, entre les β-extensions de θ et les β-extensions du transfert de θ à $\mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A}')$. Lorsque cette condition entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ n'est pas vérifiée, nous étendons la relation de cohérence comme suit. Le segment de l'immeuble affine de G dont les extrémités sont les centres des facettes correspondant à $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ peut être découpé en segments $[\mathfrak{A}_i,\mathfrak{A}_{i+1}]$ de façon telle que l'ordre $\mathfrak{A}_{i+1}$ ou bien contienne ou bien soit contenu dans $\mathfrak{A}_i$. Chaque strate $[\mathfrak{A}_i,n_i,0,\beta]$ est simple et, en composant les correspondances bijectives ainsi obtenues, on obtient une correspondance bijective entre les β-extensions de θ et les β-extensions du transfert de θ à $\mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A}')$.

La cohérence entre types simples de niveau non nul, à cause de la présence du facteur de niveau zéro, nécessite de restreindre le champ de $[\mathfrak{A}',n',0,\beta]$ aux strates simples vérifiant la condition :

$$J(\beta,\mathfrak{A})\cap B^\times \;=\; J(\beta,\mathfrak{A}')\cap B^\times. \tag{2}$$

On fixe un type simple de niveau non nul (J,λ), composé d'un facteur de niveau zéro (U,σ) et d'une β-extension κ d'un caractère simple $\theta\in\mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A})$. La condition (2) permet de voir σ, par inflation, comme une représentation de $J(\beta,\mathfrak{A}')$ aussi bien que de $J(\beta,\mathfrak{A})$, et ainsi d'associer à n'importe quelle strate simple $[\mathfrak{A}',n',0,\beta]$ vérifiant (2) d'abord la β-extension κ' du transfert de θ à $\mathscr{C}(\beta,\mathfrak{A}')$ correspondant à κ par cohérence, ensuite le type simple (J',λ')

défini par $J' = J(\beta, \mathfrak{A}')$ et par $\lambda' = \kappa' \otimes \sigma$. Ce faisant, nous inscrivons le type simple (J, λ) dans une famille $\mathscr{F}$ de types simples de G ayant tous le même facteur de niveau zéro et qui, grâce à la propriété de cohérence, partagent deux propriétés importantes. D'une part, deux éléments quelconques de $\mathscr{F}$ ont des algèbres de Hecke canoniquement isomorphes. D'autre part, deux éléments de $\mathscr{F}$ sélectionnent les mêmes représentations irréductibles de G. En d'autres termes, si (J, λ) et (J', λ') sont deux types simples appartenant à la famille $\mathscr{F}$, alors les représentations irréductibles de G dont la restriction à J contient λ sont exactement celles dont la restriction à J' contient λ'.

Ainsi, la validité des théorèmes 2 et 3 pour un type simple donné entraîne leur validité pour chaque type simple de la famille cohérente à laquelle il appartient. Les preuves que nous donnons de ces deux résultats (*cf.* paragraphes 4.3 et 5.3) sont toutes deux fondées sur l'existence, dans une famille cohérente $\mathscr{F}$, de types simples, qualifiés de *propres*, dont les ordres héréditaires sous-jacents possèdent de bonnes propriétés de décomposition. Cette formulation nécessite une généralisation de la notion de (W, E)-décomposition (*cf.* [5], §1.2) qui est effectuée dans la section 1. Nous allons brièvement préciser les choses.

Dans le cas du théorème 3, la simplification apportée par la réduction au cas propre est essentiellement de nature calculatoire. Si (J, λ) est un type simple de niveau non nul de G et si (U, σ) est son facteur de niveau zéro, Grabitz, Silberger et Zink ont montré dans [9] que le support de l'algèbre de Hecke de (U, σ) est de la forme $\mathrm{U}W\mathrm{U}$, où W est un sous-groupe discret de $B^\times$ muni d'une structure de groupe de Coxeter étendu. En niveau non nul, le support de l'algèbre de Hecke de (J, λ) est égal à JWJ et, pour déterminer la structure de cette algèbre, la difficulté technique majeure réside dans le calcul de certains produits de doubles classes $JwJw'J$, avec $w, w' \in W$. Remplacer le couple (J, λ) par un type simple propre de la même famille cohérente permet d'adapter (*cf.* section 3) l'approche employée dans [9], §3 pour calculer les produits $\mathrm{U}w\mathrm{U}w'\mathrm{U}$, avec $w, w' \in W$.

Dans le cas du théorème 2, les types simples propres apparaissent de manière plus naturelle. Pour prouver que tout type simple de niveau non nul est un type pour une certaine classe inertielle de G, nous faisons appel à la théorie des paires couvrantes (*cf.* [6] §8), suivant en cela l'approche préconisée dans [5] et [7]. Les types simples eux-mêmes ne sont pas des paires couvrantes en général, et ce sont les types simples propres qui, compte tenu des propriétés de décomposition qui les caractérisent, apparaissent naturellement comme des induites de paires couvrantes, et donc comme des types.

Notations

1. Soit F un corps local commutatif non archimédien. Par *F-algèbre* on entendra F-algèbre unitaire de dimension finie, et par *F-algèbre à division* on entendra F-algèbre centrale dont l'anneau sous-jacent est un corps.

2. Si K est une extension finie de F, ou bien une F-algèbre à division, on note $\mathfrak{o}_K$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_K$ son idéal maximal, $k_K = \mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}_K$ son corps résiduel et $q_K = (\mathfrak{o}_K : \mathfrak{p}_K)$ le cardinal de k_K.

3. Si X est un groupe topologique, on appelle *caractère* de X un homomorphisme continu de groupes de X dans $\mathbb{C}^\times$. Si X est commutatif, on appelle *dual* de X le groupe de ses caractères, que l'on note $X^\wedge$.

4. Soit G un groupe topologique localement profini, soit K un sous-groupe fermé de G et soit ρ une représentation lisse de K sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel W. Pour $g \in G$, on note :

$$I_g(\rho) = \mathrm{Hom}_{K\cap K^g}(\rho, \rho^g)$$

l'espace d'entrelacement de ρ par g, et on note $I_G(\rho)$ l'entrelacement de ρ dans G, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G$ pour lesquels l'espace $I_g(\rho)$ n'est pas nul.

5. Si K est ouvert compact (mod. le centre), on note $\mathrm{cind}_K^G(\rho)$ l'induite compacte (mod. le centre) de ρ à G, c'est-à-dire l'espace des fonctions $G \to W$ à support compact (mod. le centre) vérifiant :

$$f(kg) = \rho(k)f(g) \ , \quad k \in K, \ g \in G \ ,$$

que l'on munit de l'action à gauche de G par translation.

6. Étant donnée une mesure de Haar μ sur G, on note $\mathscr{H}(G,\rho)$ l'algèbre de Hecke de G relativement à ρ (et μ), c'est-à-dire l'algèbre de convolution des fonctions $f : G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ à support compact vérifiant :

$$f(k_1gk_2) = \rho(k_1) \circ f(g) \circ \rho(k_2) \ , \quad k_1, k_2 \in K, \ g \in G \ .$$

1. Décompositions

1.1. Préliminaires. —

1.1.1. Soit A une F-algèbre centrale simple. Si V est un A-module à gauche simple, l'algèbre $\mathrm{End}_A(V)$ est une F-algèbre à division, de degré réduit noté d, et dont l'algèbre opposée est notée D. Aussi V est-il un D-espace vectoriel à droite, de dimension notée m, de sorte qu'on a un isomorphisme de F-algèbres entre A et $\mathrm{End}_D(V)$.

1.1.2. Soit E une extension finie de F telle qu'il existe un homomorphisme de F-algèbres $\iota : E \to A$. Le commutant de E dans A, que l'on note B, est une E-algèbre centrale simple. Si V' est un B-module à gauche simple, on désigne par D' l'algèbre opposée à $\mathrm{End}_B(V')$, par d' le degré réduit de D' sur E et par m' la dimension de V' sur D'.

1.2. Équivalence de Morita. — Soit A une F-algèbre centrale simple, soit V un A-module à gauche simple, soient E une extension finie de F et $\iota : E \to A$ un homomorphisme de F-algèbres. Le A-module V est naturellement muni d'une structure de E-espace vectoriel compatible avec sa structure de D-espace vectoriel à droite, ce qui en fait en d'autres termes un module à droite sur la E-algèbre $E \otimes_F D$. Celle-ci est centrale simple et de même classe de Brauer que B (*cf.* par exemple [15]). On choisit un $E \otimes_F D$-module à droite simple N, de sorte que le foncteur :

$$W \mapsto \mathrm{Hom}_{E\otimes_F D}(N, W) \tag{3}$$

définit une équivalence de Morita entre la catégorie des $E \otimes_F D$-modules à droite et celle des D'-espaces vectoriels à droite. En outre, une fois fixés le A-module V et le $E \otimes_F D$-module N, on pose $V' = \mathrm{Hom}_{E\otimes_F D}(N, V)$, qui est un B-module à gauche simple, et l'équivalence (3) induit une correspondance bijective entre sous-$E \otimes_F D$-modules de V et sous-D'-espaces vectoriels de V'.

1.3. Décompositions vectorielles. — Dans tout ce qui suit, on se place dans le contexte du paragraphe 1.2, et on fixe une base $\Phi = \Phi(V', D')$ de V' sur D'. Il lui correspond naturellement un isomorphisme :

$$b'_\Phi : D'^{m'} \to V'$$

de D'-espaces vectoriels, lui-même définissant, par le biais de l'équivalence (3), un isomorphisme $b_\Phi : N^{m'} \to V$ de $E \otimes_F D$-modules. Désignant par V^i l'image par b_Φ de la i-ème copie de N, pour chaque entier $1 \leqslant i \leqslant m'$, on obtient une décomposition de V en une somme directe de sous-$E \otimes_F D$-modules simples :

$$V = V^1 \oplus \cdots \oplus V^{m'} \ . \tag{4}$$

1.3.1. On désigne par $A(E)$ la F-algèbre centrale simple $\mathrm{End}_D(N)$. L'isomorphisme de D'-espaces vectoriels b'_Φ induit un isomorphisme de E-algèbres :

$$\mathrm{M}_{m'}(D') \to B \ , \tag{5}$$

ce qui munit B, *via* le plongement diagonal de D' dans $\mathrm{M}_{m'}(D')$, d'une structure de D'-espace vectoriel à gauche. Parallèlement à cela, l'isomorphisme de

$E \otimes_F D$-modules b_Φ, déduit de b'_Φ par équivalence de Morita, induit un isomorphisme de F-algèbres :

$$\mathrm{M}_{m'}(A(E)) \to A \ , \tag{6}$$

et le composé de cet isomorphisme avec le plongement diagonal de $A(E)$ dans $\mathrm{M}_{m'}(A(E))$ est un plongement de F-algèbres qu'on désigne par :

$$\iota_\Phi : A(E) \to A \ . \tag{7}$$

Par le biais de ce plongement, la F-algèbres $A(E)$ stabilise chacun des facteurs simples V^i, $1 \leqslant i \leqslant m'$, qui composent V dans (4). En d'autres termes, étant donné $x \in A(E)$, et désignant par v^i la composante dans V^i d'un vecteur $v \in V$ relativement à la décomposition (4), on a pour chaque entier $1 \leqslant i \leqslant m'$ l'identité :

$$\iota_\Phi(x)(v)^i = \iota_\Phi(x)(v^i) \ .$$

Ceci étant dit, observons que, par définition de $A(E)$, le commutant de E dans $A(E)$ se réduit à D', de sorte que $A(E)$ est naturellement muni d'une structure de D'-espace vectoriel à droite. Réunissant (5) et (6), le morphisme ι_Φ de F-algèbres induit un isomorphisme de $(A(E), B)$-bimodules :

$$A(E) \otimes_{D'} B \to A \ . \tag{8}$$

Exemple 1.1. — On suppose que $E = F$. Alors $A(E) = D$, le plongement (7) est induit par le choix de V, et tout choix d'une base Φ de V sur D induit le même isomorphisme canonique $D \otimes_D A \to A$ de (D, A)-bimodules.

Exemple 1.2. — On suppose que $D = F$. Si l'on choisit $N = E$, de sorte que $A(E) = \mathrm{End}_F(E)$, et si l'on choisit une base Φ de $V = V'$ sur E, alors la donnée du sous-F-espace vectoriel $W = \mathrm{Vect}_F(\Phi)$ constitue une (W, E)-décomposition au sens de [5], §1.2.

1.4. Suites de réseaux. — Si l'on souhaite des précisions concernant ce qui suit, on pourra consulter [2], [7] ou [11].

1.4.1. Conformément à [12], *déf.* 1.1, on appelle $\mathfrak{o}_D$*-suite de réseaux* de V une suite décroissante $\Lambda = (\Lambda_k \mid k \in \mathbb{Z})$ de $\mathfrak{o}_D$-réseaux de V pour laquelle il existe un entier $e \geqslant 1$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on ait $\Lambda_{k+e} = \Lambda_k \mathfrak{p}_D$. Cet entier e, unique, est appelé la *période* de Λ sur D et noté $e(\Lambda|\mathfrak{o}_D)$.

1.4.2. À toute $\mathfrak{o}_D$-suite de réseaux Λ on associe une filtration de A, définie pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$ par :

$$\mathfrak{P}_i(\Lambda) = \{a \in A \mid a\Lambda_k \subset \Lambda_{k+i}, \ \forall \ k \in \mathbb{Z}\} \ . \tag{9}$$

La suite $i \mapsto \mathfrak{P}_i(\Lambda)$ est elle-même une $\mathfrak{o}_F$-suite de réseaux de A et, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, le produit $\mathfrak{P}_i(\Lambda)\mathfrak{P}_j(\Lambda)$ est inclus dans $\mathfrak{P}_{i+j}(\Lambda)$. Mentionnons que cette filtration caractérise Λ à translation près, c'est-à-dire que deux $\mathfrak{o}_D$-suites de V induisent sur A la même filtration (9) si, et seulement si, elles sont translatées l'une de l'autre.

1.4.3. Si Λ est une $\mathfrak{o}_D$-suite de réseaux de V, le $\mathfrak{o}_F$-réseau $\mathfrak{A}(\Lambda) = \mathfrak{P}_0(\Lambda)$ est un ordre héréditaire de A, dont le radical est $\mathfrak{P}(\Lambda) = \mathfrak{P}_1(\Lambda)$. Une $\mathfrak{o}_D$-suite strictement décroissante est appelée une *$\mathfrak{o}_D$-chaîne*, et l'application $\Lambda \mapsto \mathfrak{A}(\Lambda)$ constitue une bijection entre classes de translation de $\mathfrak{o}_D$-chaînes de V et ordres héréditaires de A.

1.4.4. Si Λ est une $\mathfrak{o}_D$-suite de réseaux de V, on désigne par $\mathfrak{K}(\Lambda)$ le *normalisateur* de Λ dans $A^\times$, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in A^\times$ pour lesquels il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on ait $g(\Lambda_k) = \Lambda_{k+n}$. Cet entier n, unique, est appelé la *valuation* de g relativement à Λ et noté $v_\Lambda(g)$. L'application $v_\Lambda : \mathfrak{K}(\Lambda) \to \mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes, dont le noyau, noté $\mathrm{U}(\Lambda)$, est le groupe multiplicatif de l'ordre héréditaire $\mathfrak{A}(\Lambda)$. Pour tout $i \geqslant 1$, on pose $\mathrm{U}_i(\Lambda) = 1 + \mathfrak{P}_i(\Lambda)$.

1.4.5. (*cf.* [2], *part.* I, §7). Si Λ est une $\mathfrak{o}_D$-suite de réseaux de V, on définit une fonction *multiplicité* m_Λ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ par :

$$m_\Lambda(i) = \mathrm{card}\{k \in \mathbb{Z} \mid \Lambda_k = \Lambda_i\} ,$$

et on appelle *conducteur* de Λ, que l'on note $c(\Lambda)$, le plus grand diviseur commun aux $m_\Lambda(i)$, $i \in \mathbb{Z}$. Si a est un entier $\geqslant 1$, on pose :

$$a\Lambda : k \mapsto \Lambda_{\lceil k/a \rceil} ,$$

où $\lceil u \rceil$ désigne le plus petit entier $\geqslant u$. C'est une $\mathfrak{o}_D$-suite de réseaux de V, de période $ae(\Lambda|\mathfrak{o}_D)$, de multiplicité am_Λ et de conducteur $ac(\Lambda)$. On a une application surjective, notée $\Lambda \mapsto \bar{\Lambda}$, entre $\mathfrak{o}_D$-suites de réseaux de V et l'ensemble $\mathscr{I}_A(\mathbb{Q})$ des points rationnels de l'immeuble affine de $A^\times$, et la fibre en $\bar{\Lambda}$ de cette application est la réunion des classes de translation des $a\Lambda$, $a \geqslant 1$. En d'autres termes, l'application :

$$\Lambda \mapsto (c(\Lambda), \bar{\Lambda}) \tag{10}$$

est une bijection entre les $\mathfrak{o}_D$-suites de réseaux de V et $\mathbb{N}^* \times \mathscr{I}_A(\mathbb{Q})$.

1.4.6. Soit un homomorphisme de F-algèbres $\iota : E \to A$ comme au paragraphe 1.2, et soit Λ une $\mathfrak{o}_D$-suite de réseaux de V. On dit que la suite Λ est *E-pure* si le groupe multiplicatif de E normalise Λ, c'est-à-dire si chaque Λ_k, $k \in \mathbb{Z}$, est un $\mathfrak{o}_E$-réseau et si, désignant par $e = e_{E/F}$ l'indice de ramification de E sur$F$, la suite Λ est une $\mathfrak{o}_E$-suite de réseaux de V dont la période vérifie la relation :

$$e(\Lambda|\mathfrak{o}_E)e = e(\Lambda|\mathfrak{o}_D)d .$$

1.4.7. (*cf.* [2], *cor.* 4.7). Il existe une unique correspondance bijective affine et $B^\times$-équivariante $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{E/F}$ entre les points $E^\times$-invariants de $\mathscr{I}_A(\mathbb{Q})$ et les points de $\mathscr{I}_B(\mathbb{Q})$. Compte tenu de (10), elle se prolonge en une correspondance bijective conservant le conducteur, encore notée $\boldsymbol{j}$, entre $\mathfrak{o}_D$-suites E-pures de réseaux de V et $\mathfrak{o}_{D'}$-suites de réseaux de V'.

Remarque 1.3. — Cette correspondance s'interprète comme une équivalence *à la Morita* (*cf.* paragraphe 1.2) entre la catégorie des $\mathfrak{o}_D$-suites E-pures de réseaux et celle des $\mathfrak{o}_{D'}$-suites de réseaux (catégories qui, toutefois, ne sont pas abéliennes).

1.4.8. Puisque le commutant de E dans la F-algèbre $A(E)$ se réduit à la E-algèbre à division D', qui possède un unique ordre maximal $\mathfrak{o}_{D'}$, l'immeuble de D' est réduit à un point. Il n'existe donc, à translation près, qu'une seule suite de réseaux E-pure de N de conducteur égal à 1 et, si l'on fixe une telle suite $\mathscr{N}$ et si l'on applique 1.4.7, on voit que toute suite E-pure de réseaux de N est de la forme :

$$a\mathscr{N} + b : k \mapsto \mathscr{N}_{\lceil (k-b)/a \rceil} \ ,$$

où a est un entier $\geqslant 1$ et où $b \in \mathbb{Z}$.

1.5. Décompositions entières. — Rappelons ([2], *part.* I, *déf.* 2.6) qu'une décomposition $V = \bigoplus_{i=1}^{s} V^i$ de V en une somme directe de $s \geqslant 1$ sous-D-espaces vectoriels *décompose* la $\mathfrak{o}_D$-suite Λ si on a l'égalité :

$$\Lambda_k = (\Lambda_k \cap V^1) \oplus \cdots \oplus (\Lambda_k \cap V^{m'}) \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

1.5.1. On fixe une $\mathfrak{o}_D$-suite E-pure Λ de réseaux et une base Φ de V' sur D' décomposant la $\mathfrak{o}_{D'}$-suite $\boldsymbol{j}(\Lambda)$. Alors ([2], *part.* II, *lem.* 5.2) la décomposition (4) définie par Φ décompose Λ. Ainsi, si on désigne, pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant m'$, par Λ^i la $\mathfrak{o}_D$-suite de réseaux de V^i définie par $k \mapsto \Lambda_k \cap V^i$, on a la décomposition :

$$\Lambda_k = \Lambda_k^1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_k^{m'} \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ . \tag{11}$$

1.5.2. Compte tenu de 1.4.8, il n'existe dans $A(E)$ qu'un seul ordre héréditaire normalisé par $E^\times$. On le note $\mathfrak{A}(E)$, et son radical est noté $\mathfrak{P}(E)$. Par conséquent, pour chaque entier $1 \leqslant i \leqslant m'$, le $E \otimes_F D$-module simple V^i s'identifiant à N, on a un isomorphisme de F-algèbres entre $\mathrm{End}_D(V^i)$ et $A(E)$, induisant par restriction un isomorphisme de $\mathfrak{o}_F$-algèbres entre les ordres héréditaires $\mathfrak{A}(\Lambda^i)$ et $\mathfrak{A}(E)$.

1.5.3. On désigne maintenant par $\mathfrak{A}$ l'ordre héréditaire $\mathfrak{A}(\Lambda)$ de A défini par Λ et par $\mathfrak{B}$ la trace de $\mathfrak{A}$ sur B, qui est un ordre héréditaire de B (*cf.* [3]). Ainsi, si $x \in \mathfrak{A}(E)$, il agit sur le facteur V^i comme un élément de $\mathfrak{A}(\Lambda^i)$, de sorte que le plongement de F-algèbres ι_Φ induit par restriction un plongement de $\mathfrak{o}_F$-algèbres :

$$\iota_\Phi : \mathfrak{A}(E) \to \mathfrak{A} \ . \tag{12}$$

Ceci étant dit, compte tenu de (12) et de l'inclusion naturelle de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$, l'isomorphisme de $(A(E), B)$-bimodules (8) induit par restriction un morphisme injectif de $(\mathfrak{A}(E), \mathfrak{B})$-bimodules :

$$\mathfrak{A}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_{D'}} \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \ . \tag{13}$$

Mentionnons que, contrairement à ce qui se produit dans le cas déployé (*cf.* [5], (1.2.8)), et comme le montre l'exemple suivant, ce morphisme n'est pas toujours surjectif.

Exemple 1.4. — Supposons que $A = \mathrm{M}_2(D)$ et que D est une algèbre de quaternions sur F dans laquelle nous plongeons une extension quadratique non ramifiée E de F, de sorte que $B = \mathrm{M}_2(E)$. Il existe dans A exactement trois ordres E-purs dont la trace sur B est égale à l'ordre minimal standard $\mathfrak{B}_{\mathrm{m}}$ de B, et il s'agit de :

$$\mathfrak{A}_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_D & \mathfrak{o}_D \\ \mathfrak{p}_D & \mathfrak{o}_D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}'_{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_D & \mathfrak{p}_D^{-1} \\ \mathfrak{p}_D & \mathfrak{o}_D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}'_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_D & \mathfrak{p}_D^{-1} \\ \mathfrak{p}_D^2 & \mathfrak{o}_D \end{pmatrix} \ .$$

Si l'on choisit $N = D$, de sorte que $A(E) = D$ et $\mathfrak{A}(E) = \mathfrak{o}_D$, le plongement (7) est le plongement diagonal et, compte tenu du fait que $\mathfrak{o}_D\mathfrak{p}_E = \mathfrak{p}_D^2$, l'image par (13) de $\mathfrak{o}_D \otimes_{\mathfrak{o}_E} \mathfrak{B}_{\mathrm{m}}$ est égale à :

$$\mathfrak{A}_{\mathrm{m}} \cap \mathfrak{A}'_{\mathrm{M}} \cap \mathfrak{A}'_{\mathrm{m}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_D & \mathfrak{o}_D \\ \mathfrak{p}_D^2 & \mathfrak{o}_D \end{pmatrix} \ .$$

1.5.4. Pour prouver le théorème d'approximation 2.2, nous avons besoin d'un résultat plus précis que le plongement (12). Les hypothèses en vigueur sont celles des paragraphes précédents.

On note $\rho = \rho(\Lambda, \mathscr{N})$ le rapport de la période de Λ sur celle de $\mathscr{N}$.

Proposition 1.5. — *Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, le plongement de F-algèbres ι_Φ induit par restriction un plongement de $\mathfrak{o}_F$-modules :*

$$\iota_\Phi : \mathfrak{P}(E)^j \to \mathfrak{P}_{\rho j}(\Lambda) \ . \tag{14}$$

Démonstration. — Pour chaque entier $1 \leqslant i \leqslant m'$, la suite Λ^i est une $\mathfrak{o}_D$-suite E-pure de réseaux de V^i, de sorte que, compte tenu de 1.4.8, il existe deux entiers $a(i) \geqslant 1$ et $b(i) \in \mathbb{Z}$ tels que l'isomorphisme de $E \otimes_F D$-modules entre V^i et N induit par la donnée de Φ identifie la $\mathfrak{o}_D$-suite Λ^i à la $\mathfrak{o}_D$-suite :

$$a(i)\mathscr{N} + b(i) : k \mapsto \mathscr{N}_{\lceil (k-b(i))/a(i) \rceil} .$$

Puisque les $\mathfrak{o}_D$-suites Λ^i, $1 \leqslant i \leqslant m'$, ont toutes la même période, en l'occurrence celle de Λ, les entiers $a(i)$, $1 \leqslant i \leqslant m'$, sont tous égaux à un même entier $\rho = \rho(\Lambda, \mathscr{N}) \geqslant 1$. Ainsi, si $x \in \mathfrak{P}(E)^j$ pour un $j \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$\iota_\Phi(x) \cdot \Lambda_k = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant m'} \iota_\Phi(x) \cdot \big(\rho\mathscr{N}_k + b(i)\big) \subseteq \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant m'} \big(\rho\mathscr{N}_{k+\rho j} + b(i)\big)$$

qui vaut $\Lambda_{k+\rho j}$, ce qui termine la démonstration. □

2. Strates, *etc...*

Dans cette section, on reformule les principaux résultats de [12] et [13], et on rappelle les résultats de [9] concernant les types simples de niveau zéro. Incidemment, on prouve le théorème d'approximation 2.2, qui n'est pas utilisé dans la suite de l'article, mais qui se déduit facilement du travail déjà effectué et sera utile dans un article ultérieur.

On fixe une F-algèbre centrale simple A et un module à gauche simple V. Les notations de la section 1 sont en vigueur.

2.1. Strates simples. — Rappelons ([12], §2.1) qu'une *strate* de A est un quadruplet $[\Lambda, n, r, \beta]$ constitué d'une $\mathfrak{o}_D$-suite Λ de V, de deux entiers $r < n$ et d'un élément $\beta \in \mathfrak{P}_{-n}(\Lambda)$. Deux strates $[\Lambda, n, r, \beta_i]$, $i \in \{1, 2\}$, sont dites *équivalentes* si $\beta_2 - \beta_1 \in \mathfrak{P}_{-r}(\Lambda)$.

2.1.1. Étant donnée une strate $[\Lambda, n, r, \beta]$, on note E la F-algèbre engendrée par β. On dit que cette strate est *pure* (*ibid.*) si E est un corps, si la suite Λ est E-pure, et si $\upsilon_\Lambda(\beta) = -n$.

2.1.2. Si $[\Lambda, n, r, \beta]$ est une strate pure, la F-algèbre E est une extension de F incluse dans A, dont le commutant est une E-algèbre centrale simple notée B. On désigne par $\mathfrak{A}$ l'ordre héréditaire $\mathfrak{A}(\Lambda)$, par $\mathfrak{P}$ son radical et par $\mathfrak{B}$ la trace de $\mathfrak{A}$ sur B. Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$\mathfrak{N}_k(\beta, \Lambda) = \{x \in \mathfrak{A} \mid \beta x - x\beta \in \mathfrak{P}_k(\Lambda)\} . \tag{15}$$

Le plus petit élément $k \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ pour lequel on ait $\mathfrak{N}_{k+1}(\beta, \Lambda) \subseteq \mathfrak{B} + \mathfrak{P}$ est noté $k_0(\beta, \Lambda)$ et porte le nom d'*exposant critique* de la strate $[\Lambda, n, r, \beta]$. Si β n'appartient pas à F, c'est un entier $\geqslant \upsilon_\Lambda(\beta)$.

Définition 2.1. — Une strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ est dite *simple* si elle est pure et si $r < -k_0(\beta, \Lambda)$.

2.2. Le théorème d'approximation. — Le théorème suivant constitue une généralisation commune à [4], *th.* 5.1, qui ne s'applique qu'aux chaînes de réseaux, et à [7], *cor.* 5.3, qui n'est valable que dans le cas déployé.

THÉORÈME 2.2. — *Soit* $[\Lambda, n, r, \beta]$ *une strate pure de* A*. Il existe une strate simple* $[\Lambda, n, r, \gamma]$ *de* A*, équivalente à* $[\Lambda, n, r, \beta]$*, telle que la sous-extension non ramifiée maximale de* $F[\gamma]/F$ *soit incluse dans* E*.*

Démonstration. — Dans le cas où la strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ est elle-même simple, il suffit bien entendu de choisir $\gamma = \beta$. Nous pouvons donc nous contenter de traiter le cas où l'entier r est égal à $-k_0(\beta, \Lambda)$. Rappelons (*cf.* paragraphe 1.5.4), que $\rho = \rho(\Lambda, \mathscr{N})$ désigne le rapport de la période de Λ sur celle de $\mathscr{N}$. Compte tenu de [12], *prop.* 2.25, l'entier r est un multiple de $e(\Lambda|\mathfrak{o}_E)$, de sorte que la quantité :

$$r_0 = r/\rho \ ,$$

est un entier. Soit $-n_0$ la valuation de β relativement à $\mathfrak{A}(E)$, de façon que, conformément à [12], §2.3.3, la strate $[\mathfrak{A}(E), n_0, r_0, \beta]$ est une strate pure de la F-algèbre $A(E)$, à laquelle le théorème [4], (5.1) peut être appliqué. De fait, on peut choisir une strate simple $[\mathfrak{A}(E), n_0, r_0, \gamma_0]$ de $A(E)$ équivalente à $[\mathfrak{A}(E), n_0, r_0, \beta]$, de telle façon que la partie non ramifiée maximale de l'extension $F[\gamma_0]/F$ soit incluse dans E.

Fixons maintenant une base Φ de V' sur D' qui décompose la $\mathfrak{o}_{D'}$-suite $\boldsymbol{j}(\Lambda)$, désignons par ι_Φ le plongement de F-algèbres (7) qui s'en déduit, et posons $\gamma = \iota_\Phi(\gamma_0)$. Désignant par K_0 le corps $F[\gamma_0]$ et par K son image par ι_Φ, on a pour tout $x \in K_0^\times$ de valuation $j \in \mathbb{Z}$ relativement à $\mathfrak{A}(E)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ l'égalité :

$$\iota_\Phi(x)\Lambda_k = \Lambda_{k+\rho j} \ ,$$

ce qui prouve que la strate $[\Lambda, n, r, \gamma]$ est une strate pure de A. Appliquant derechef [12], *prop.* 2.25, on obtient l'égalité :

$$k_0(\gamma, \Lambda) = \rho k_0(\gamma, \mathfrak{A}(E)) \ .$$

Le fait que la strate $[\mathfrak{A}(E), n_0, r_0, \gamma_0]$ est simple implique alors automatiquement que la strate $[\Lambda, n, r, \gamma]$ l'est également. En outre, le fait que la partie non ramifiée maximale de K/F est incluse dans E ne fait aucun doute. Il reste donc à vérifier que cette strate simple est équivalente à $[\Lambda, n, r, \beta]$. Partant de la relation $\beta - \gamma_0 \in \mathfrak{P}(E)^{-r_0}$, on obtient grâce à la proposition 1.5 l'inclusion :

$$\beta - \gamma \in \iota_\Phi(\mathfrak{P}(E)^{-r_0}) \subset \mathfrak{P}_{-r}(\Lambda) \ ,$$

ce qui termine la démonstration du théorème 2.2. □

2.3. Caractères simples. — Dans tout ce qui suit, on fixe un caractère additif $\psi_F : F \to \mathbb{C}^\times$ trivial sur $\mathfrak{p}_F$ mais pas sur $\mathfrak{o}_F$, et une uniformisante ϖ_F de $\mathfrak{o}_F$, choix dont dépend implicitement la construction des caractères simples. On fixe une F-algèbre centrale simple A et une strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ de A. Rappelons ([12], §3.3) qu'à cette strate simple correspondent d'une part deux sous-groupes ouverts compacts de $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$, notés $H = H(\beta, \mathfrak{A})$ et $J = J(\beta, \mathfrak{A})$ et filtrés respectivement par :

$$H^k(\beta, \mathfrak{A}) = H(\beta, \mathfrak{A}) \cap \mathrm{U}^k(\mathfrak{A}) \ , \quad J^k(\beta, \mathfrak{A}) = J(\beta, \mathfrak{A}) \cap \mathrm{U}^k(\mathfrak{A}) \ , \quad k \geqslant 1 \ ,$$

d'autre part un ensemble $\mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$ de caractères du groupe $H^1(\beta, \mathfrak{A})$, que l'on appelle les *caractères simples* associés à la strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$, jouissant des propriétés suivantes.

2.3.1. (*cf.* [12], §3.3.1 et [13], §2.1.1). Pour tout $k \geqslant 1$, les sous-groupes H^k et J^k sont normalisés par $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times)J$, et on a $J = \mathrm{U}(\mathfrak{B})J^1$ et $H = \mathrm{U}(\mathfrak{B})H^1$. En outre, le quotient J/J^1 s'identifie au groupe réductif fini $\mathrm{U}(\mathfrak{B})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$, et l'application $\mathfrak{B}' \mapsto \mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1/J^1$ constitue une bijection entre les ordres héréditaires $\mathfrak{B}'$ inclus dans $\mathfrak{B}$ et les sous-groupes paraboliques de J/J^1, et le radical unipotent de $\mathrm{U}(\mathfrak{B}')J^1/J^1$ est $\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')J^1/J^1$.

2.3.2. (*cf.* [12], *prop.* 3.46 et *th.* 3.50). Tout caractère simple associé à la strate $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ est normalisé par $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times)J$, et a un entrelacement dans $A^\times$ égal à $JB^\times J$.

2.3.3. (*cf.* [13], §2.2). Étant donné un caractère simple $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$, il existe une représentation irréductible de $J^1(\beta, \mathfrak{A})$ dont la restriction à $H^1(\beta, \mathfrak{A})$ contient le caractère θ. Il n'en existe, à équivalence près, qu'une seule, et on la note $\eta = \eta(\theta)$. Son entrelacement dans $A^\times$ est égal à $JB^\times J$ et, pour tout $y \in B^\times$, l'espace $\mathrm{Hom}_{J^1 \cap J^{1y}}(\eta, \eta^y)$ est de dimension 1.

2.3.4. (*cf.* [12], *th.* 3.53). Soit A' une F-algèbre centrale simple telle qu'il existe un homomorphisme de F-algèbres $\iota : E \to A'$, soit $\mathfrak{A}'$ un ordre héréditaire de A' normalisé par $\iota E^\times$ et soit $-n'$ la $\mathfrak{A}'$-valuation de β. Alors la strate $[\mathfrak{A}', n', 0, \iota\beta]$ est simple, et il existe une bijection canonique, appelée *transfert*, de $\mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$ vers $\mathscr{C}(\iota\beta, \mathfrak{A}')$.

2.4. $\boldsymbol{\beta}$-extensions. — Dans toute la suite, on fixe un caractère simple $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$ attaché à la strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$, et on note η la représentation irréductible de $J^1(\beta, \mathfrak{A})$ définie au paragraphe 2.3.3. Rappelons ([13]) que par *β-extension* de η on entend une représentation de $J(\beta, \mathfrak{A})$ prolongeant η, et dont l'entrelacement dans $A^\times$ est égal à $JB^\times J$.

2.4.1. On note $\mathscr{O} = \mathscr{O}_E(A)$ l'ensemble des ordres héréditaires E-purs de A. Pour tout $\mathfrak{A}' \in \mathscr{O}$, on note $\theta(\mathfrak{A}')$ le transfert de θ à $\mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A}')$ et $\eta(\mathfrak{A}')$ la représentation irréductible de $J^1(\beta, \mathfrak{A}')$ lui correspondant. On note également $\mathrm{B}_{\mathfrak{A}'}$ l'ensemble des β-extensions de $\eta(\mathfrak{A}')$ et B la réunion disjointe des $\mathrm{B}_{\mathfrak{A}'}$, $\mathfrak{A}' \in \mathscr{O}$. L'ensemble B jouit des propriétés suivantes.

2.4.2. (*cf.* [13], §2.4.2). La définition que nous donnons ici de la relation de cohérence est un peu plus générale que celle donnée dans [13], §2.4.2, de façon à en faire une relation symétrique. Cette modification n'altère pas la validité des résultats que nous rappelons aux paragraphes 2.4.3 et 2.4.4 suivants.

Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ deux ordres héréditaires E-purs dont l'intersection est un ordre héréditaire. Cette intersection est E-pure, et on note :

$$\mathrm{U}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') = \mathrm{U}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}')\mathrm{U}^1(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}') = \mathrm{U}(\mathfrak{A}', \mathfrak{A})$$

et :

$$\mathrm{J}(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}) = \mathrm{U}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}')J^1(\beta, \mathfrak{A}) ,$$

qui est un sous-groupe de $\mathrm{U}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$. Un couple $(\kappa, \kappa') \in \mathrm{B}_{\mathfrak{A}} \times \mathrm{B}_{\mathfrak{A}'}$ est dit *cohérent* lorsque les deux représentations induites :

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{J}(\mathfrak{A}', \mathfrak{A})}^{\mathrm{U}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')} \big(\kappa|_{\mathrm{J}(\mathfrak{A}', \mathfrak{A})}\big) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ind}_{\mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')}^{\mathrm{U}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')} \big(\kappa'|_{\mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')}\big)$$

sont irréductibles et équivalentes, ce qu'on note $\kappa \equiv \kappa'$. La relation $\equiv$ est réflexive et symétrique sur B.

2.4.3. (*cf.* [13], *th.* 2.28). Le groupe cyclique $k_E^{\times\wedge}$ opère librement sur B par :

$$(\kappa, \chi) \mapsto \kappa \otimes (\chi \circ \mathrm{N}_{B/E}) ,$$

où $\mathrm{N}_{B/E}$ désigne la norme réduite de B sur E et où le caractère $\chi \circ \mathrm{N}_{B/E}$ est vu, compte tenu de 2.3.1, comme un caractère de J trivial sur J^1. Plus précisément, lorsque χ décrit $k_E^{\times\wedge}$, les réprésentations $\kappa \otimes (\chi \circ \mathrm{N}_{B/E})$ ont des déterminants distincts, donc sont deux-à-deux non équivalentes. Cette action respecte la relation $\equiv$, et les orbites de B sous $k_E^{\times\wedge}$ sont les $\mathrm{B}_{\mathfrak{A}'}$, $\mathfrak{A}' \in \mathscr{O}$.

2.4.4. (*cf.* [13], *lem.* 2.23, 2.24 et *prop.* 2.25, 2.29). Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ deux ordres héréditaires E-purs tels que $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$. À toute représentation $\kappa \in \mathrm{B}_{\mathfrak{A}}$ correspond une unique représentation $\kappa' \in \mathrm{B}_{\mathfrak{A}'}$ telle que $\kappa \equiv \kappa'$, et l'application $\kappa \mapsto \kappa'$ ainsi définie est une bijection de $\mathrm{B}_{\mathfrak{A}}$ dans $\mathrm{B}_{\mathfrak{A}'}$.

Bien entendu, dans le cas où $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}'$, on a encore une bijection $\mathrm{B}_{\mathfrak{A}} \to \mathrm{B}_{\mathfrak{A}'}$, définie comme la réciproque de la bijection $\mathrm{B}_{\mathfrak{A}'} \to \mathrm{B}_{\mathfrak{A}}$.

2.5. Types simples de niveau zéro. — Dans ce paragraphe, on se réfère entièrement à [9]. On fixe une mesure de Haar μ sur $A^\times$.

2.5.1. Un couple (U, τ) est un *type simple de niveau zéro* pour $A^\times$ s'il existe un ordre principal $\mathfrak{A}$ de A, de période notée r, tel que $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathfrak{A})$, et s'il existe une représentation irréductible cuspidale σ du groupe $\mathrm{GL}_s(k_D)$, avec $m = rs$, telle que la puissance tensorielle $\sigma^{\otimes r}$ vue comme représentation de $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$ triviale sur $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$ soit équivalente à τ.

2.5.2. (*cf.* [9], *prop.* 5.3). Un type simple de niveau zéro pour $A^\times$ est un type, au sens de [6], pour une classe inertielle de $A^\times$.

2.5.3. Étant donnés un entier $r \geqslant 1$ et un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^\times$, on note $\mathcal{H}_0(r, z)$ l'algèbre de Hecke finie de type A_{r-1} et de paramètre z, c'est-à-dire la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par $r - 1$ générateurs $[s_i]$, pour $1 \leqslant i < r$, vérifiant les relations :

(1) $([s_i] + 1)([s_i] - z) = 0$, pour $1 \leqslant i < r$.
(2) $[s_i]\,[s_{i-1}]\,[s_i] = [s_{i-1}]\,[s_i]\,[s_{i-1}]$, pour $1 < i < r$.
(3) $[s_i]\,[s_j] = [s_j]\,[s_i]$, pour $|i - j| \geqslant 2$.

On note $\mathcal{H}(r, z)$ l'algèbre de Hecke affine lui correspondant, c'est-à-dire la $\mathbb{C}$-algèbre contenant $\mathcal{H}_0(r, z)$ et possédant deux générateurs supplémentaires $[h]$ et $[h']$ vérifiant les relations supplémentaires :

(4) $[h]\,[s_i] = [s_{i-1}]\,[h]$, pour $1 < i < r$.
(5) $[h]^2\,[s_1] = [s_{r-1}]\,[h]^2$.
(6) $[h]\,[h'] = [h']\,[h] = 1$.

Ce sont deux $\mathbb{C}$-algèbres associatives unitaires. On note que $[h'] = [h]^{-1}$, de sorte que l'on n'utilisera plus $[h']$, et on pose $[s_0] = [h]\,[s_1]\,[h]^{-1}$.

2.5.4. ([10] 1.5, *th.* 5.1). Soit $(\mathrm{U}(\mathfrak{A}), \tau)$ un type simple de niveau zéro pour $A^\times$. On note r la période de $\mathfrak{A}$, on pose $m = rs$, et on choisit un ordre maximal $\mathfrak{A}_\mathrm{M}$ contenant $\mathfrak{A}$. On fixe un isormophisme de F-algèbres :

$$A \to \mathrm{M}_r(\mathrm{M}_s(D)) \ ,$$

de sorte que les ordres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_\mathrm{M}$ soient sous forme normale. Pour tout entier $1 \leqslant i < r$, on note s_i la matrice dans $\mathrm{GL}_r(\mathrm{M}_s(D)) = A^\times$ de la transposition $i \leftrightarrow i+1$. Alors il existe un unique isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres :

$$\Phi_0 : \mathcal{H}_0(r, q_D^s) \to \mathscr{H}(\mathrm{U}(\mathfrak{A}_\mathrm{M}), \tau) \tag{16}$$

tel que $\Phi_0([s_i])$ soit de support $\mathrm{U}(\mathfrak{A})s_i\mathrm{U}(\mathfrak{A})$ pour tout entier $1 \leqslant i < r$.

2.5.5. Soit $(\mathrm{U}(\mathfrak{A}), \tau)$ un type simple de niveau zéro pour $A^\times$ avec $\tau = \sigma^{\otimes r}$. On note l le cardinal de l'orbite de σ sous l'action du groupe de Galois de k_D sur k_F, on fixe une uniformisante ϖ_D de $\mathfrak{o}_D$, et on note $W(\tau)$ le sous-groupe de $A^\times$ engendré par les s_i, pour $1 \leqslant i < r$, et l'élément :

$$h = h(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_{r-1} \\ \varpi_D^l & 0 \end{pmatrix} , \tag{17}$$

où I_{r-1} désigne la matrice identité de $\mathrm{M}_{r-1}(\mathrm{M}_s(D))$. Alors ([9], *cor.* 1.6) tout élément de $\mathscr{H}(A^\times, \tau)$ a un support inclus dans l'ensemble $\mathrm{U}(\mathfrak{A})W(\tau)\mathrm{U}(\mathfrak{A})$, et (*ibid.*, *th.* 4.2) à tout élément φ de support $\mathrm{U}(\mathfrak{A})h\mathrm{U}(\mathfrak{A})$ correspond un unique isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres :

$$\Phi : \mathcal{H}(r, q_D^s) \to \mathscr{H}(A^\times, \tau) \tag{18}$$

prolongeant (16) et tel que $\Phi([h]) = \varphi$. En outre, tout élément dont le support est de la forme $\mathrm{U}(\mathfrak{A})w\mathrm{U}(\mathfrak{A})$, avec $w \in W(\tau)$, est inversible (*ibid.*, *cor.* 4.7).

3. Multiplication de doubles classes

Cette section est essentiellement technique. On y prouve le lemme 3.1 qui permet, dans la section 4, de majorer le support d'un produit de convolution dans l'algèbre de Hecke d'un type simple.

3.1. Préliminaires. — Soit C une F-algèbre centrale simple, et soit $\mathfrak{C}$ un $\mathfrak{o}_F$-ordre héréditaire de C, de radical noté $\mathfrak{Q}$. Étant donné un entier $r \geqslant 1$, on note A la F-algèbre $\mathrm{M}_r(C)$, et on note $\mathfrak{A}$ l'ordre héréditaire de A défini par :

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C} & \cdots & \mathfrak{C} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{Q} & \cdots & \mathfrak{C} \end{pmatrix} , \tag{19}$$

c'est-à-dire que le bloc $\mathfrak{A}_{ij}$ est égal à $\mathfrak{C}$ lorsque $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r$ et à $\mathfrak{Q}$ dans le cas contraire. Son radical est noté $\mathfrak{P}$. On fixe un élément ϖ de $\mathfrak{K}(\mathfrak{C})$ *de valuation strictement positive*, et on note W le sous-groupe de $\mathrm{GL}_r(C) = A^\times$ engendré par les matrices de permutation et l'élément h défini par :

$$h = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_{r-1} \\ \varpi & 0 \end{pmatrix} , \tag{20}$$

où I_{r-1} désigne la matrice identité de $\mathrm{M}_{r-1}(C)$. Le lemme suivant constitue le résultat principal de cette section.

Lemme 3.1. — *Soit $w \in W$. On a :*

$$\mathrm{U}(\mathfrak{A})w\mathrm{U}(\mathfrak{A})h\mathrm{U}(\mathfrak{A}) \cap W = \{wh\} \quad \textit{et} \quad \mathrm{U}(\mathfrak{A})h\mathrm{U}(\mathfrak{A})w\mathrm{U}(\mathfrak{A}) \cap W = \{hw\} .$$

C'est une conséquence du lemme suivant, qui généralise le lemme [9], 3.1.

Lemme 3.2. — *Soient $w \in W$ et $b \in h\mathrm{U}(\mathfrak{A})h^{-1}$. On a :*

$$\mathrm{U}(\mathfrak{A})wb\mathrm{U}(\mathfrak{A}) \cap W \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathrm{U}(\mathfrak{A})wb\mathrm{U}(\mathfrak{A}) = \mathrm{U}(\mathfrak{A})w\mathrm{U}(\mathfrak{A}) \ ,$$
$$\mathrm{U}(\mathfrak{A})bw\mathrm{U}(\mathfrak{A}) \cap W \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathrm{U}(\mathfrak{A})bw\mathrm{U}(\mathfrak{A}) = \mathrm{U}(\mathfrak{A})w\mathrm{U}(\mathfrak{A}) \ .$$

La démonstration du lemme 3.2 s'effectue en trois étapes, et occupe le paragraphe suivant.

Remarque 3.3. — En appliquant $x \mapsto x^{-1}$, on déduit immédiatement du lemme 3.1 que, pour tout $w \in W$, on a :

$$\mathrm{U}(\mathfrak{A})w\mathrm{U}(\mathfrak{A})h^{-1}\mathrm{U}(\mathfrak{A})\cap W = \{wh^{-1}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}(\mathfrak{A})h^{-1}\mathrm{U}(\mathfrak{A})w\mathrm{U}(\mathfrak{A})\cap W = \{h^{-1}w\} \ .$$

3.2. Démonstration du lemme principal. — Notre preuve s'inspire assez largement de [9], 3.1, quoique d'importantes modifications soient nécessaires. Nous nous contentons de prouver la première implication, la seconde s'obtenant, *mutatis mutandis* (*cf.* [9], *lem.* 3.1), de façon analogue.

3.2.1. Première étape. — La première réduction est analogue à celle effectuée dans [9], 3.1. Soit M le sous-groupe de Levi de $A^\times$ défini par :

$$M = \mathrm{GL}_{r-1}(C) \times \mathrm{GL}_1(C) \ ,$$

soit P le sous-groupe parabolique standard des matrices triangulaires supérieures par blocs relativement à M et soit N son radical unipotent. On note également N^- le sous-groupe unipotent opposé à N relativement à M et, compte tenu du fait que ϖ normalise $\mathfrak{C}$, on a la décomposition d'Iwahori :

$$h\mathrm{U}(\mathfrak{A})h^{-1} = \big(h\mathrm{U}(\mathfrak{A})h^{-1} \cap N\big) \cdot \big(h\mathrm{U}(\mathfrak{A})h^{-1} \cap M\big) \cdot \big(h\mathrm{U}(\mathfrak{A})h^{-1} \cap N^-\big) \ .$$

Les facteurs $h\mathrm{U}(\mathfrak{A})h^{-1} \cap M$ et $h\mathrm{U}(\mathfrak{A})h^{-1} \cap N^-$ étant tous deux inclus dans $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$, on peut supposer que b appartient à $h\mathrm{U}(\mathfrak{A})h^{-1} \cap N$, c'est-à-dire que :

$$b = \left(\begin{array}{c|c} & b_1 \\ \mathrm{I}_{r-1} & \vdots \\ & b_{r-1} \\ \hline (0) & 1 \end{array}\right) \ , \qquad b_k \in \mathfrak{Q}\varpi^{-1}, \ 1 \leqslant k < r \ . \tag{21}$$

On suppose désormais que b est de la forme (21), et on procède par récurrence sur l'entier r, sachant que pour $r = 1$ le résultat est immédiat puisque dans ce cas le groupe W normalise $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$.

3.2.2. Deuxième étape. — On note σ la permutation telle que $\sigma(j) = i$ si et seulement si (i, j) est dans le support de w, et on note $a_1, \dots, a_r$ les entiers tels qu'on ait $w_{\sigma(k),k} = \varpi^{a_k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$.

Lemme 3.4. — *Il existe un entier $1 \leqslant k < r$ tel que soit $a_k > a_r$, soit $b_k \in \mathfrak{C}$.*

Démonstration. — On suppose le contraire, et on désigne par $\upsilon(x)$, pour un élément $x \in C$ non nul, le plus grand entier $m \in \mathbb{Z}$ pour lequel on ait $x \in \mathfrak{Q}^m$. Ainsi, les conditions s'écrivent :

$$0 > \upsilon(b_k) > -\upsilon(\varpi) \quad \text{et} \quad a_r \geqslant a_k \ , \quad 1 \leqslant k < r \ . \tag{22}$$

En particulier, on a nécessairement $\upsilon(\varpi) \geqslant 2$, et (22) peut s'écrire :

$$\upsilon(\varpi^{a_r}) \geqslant \upsilon(\varpi^{a_k}) > \upsilon(\varpi^{a_k} b_k) \ , \quad 1 \leqslant k < r \ . \tag{23}$$

On désigne par a le minimum des $\upsilon(\varpi^{a_k} b_k)$, pour $1 \leqslant k < r$, et on note i le plus grand entier pour lequel $\upsilon(\varpi^{a_i} b_i) = a$. Par hypothèse, il existe deux matrices $u, v \in \mathrm{U}(\mathfrak{A})$ telles que $vwbu \in W$, donc un $c \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ tel que :

$$\varpi^c = (vwbu)_{ir} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} v_{i,\sigma(k)} \varpi^{a_k} u_{kr} + \sum_{1 \leqslant k < r} v_{i,\sigma(k)} \varpi^{a_k} b_k u_{rr} \ , \tag{24}$$

où $\varpi^{+\infty}$ doit être compris comme le bloc nul. Dans la première somme, chacun des blocs $v_{i,\sigma(k)}$ et u_{kr} sont dans $\mathfrak{C}$ et, selon (23), on a $\upsilon(\varpi^{a_k}) > a$. Aussi cette somme appartient-elle à $\mathfrak{Q}^{a+1}$. Dans la seconde somme, on remarque d'abord que $u_{rr} \in \mathrm{U}(\mathfrak{C})$, puis trois cas sont à distinguer suivant les valeurs de $k \neq r$.

- Dans le cas où $\sigma(k) < i$, le bloc $v_{i,\sigma(k)}$ est dans $\mathfrak{Q}$ et on a $\upsilon(\varpi^{a_k} b_k) \geqslant a$.
- Dans le cas où $\sigma(k) > i$, le bloc $v_{i,\sigma(k)}$ est dans $\mathfrak{C}$ et on a $\upsilon(\varpi^{a_k} b_k) > a$.
- Dans le cas où $\sigma(k) = i$, le bloc v_{ii} est dans $\mathrm{U}(\mathfrak{C})$ et on a $\upsilon(\varpi^{a_i} b_i) = a$.

En définitive, la somme (24) appartient à $\mathfrak{Q}^a - \mathfrak{Q}^{a+1}$, ce dont on déduit d'une part que $c \in \mathbb{Z}$, d'autre part que :

$$\upsilon(\varpi) c = a = \upsilon(\varpi) a_i + \upsilon(b_i) \ .$$

En particulier, l'entier $\upsilon(b_i)$ est un multiple de $\upsilon(\varpi)$, ce qui contredit (22). □

3.2.3. Troisième étape. — Ainsi, l'une des deux conditions **(a)** $a_k > a_r$, ou **(b)** $b_k \in \mathfrak{C}$, est vérifiée. Dans le cas **(a)**, on efface le bloc b_k en multipliant wb à gauche par la matrice $v = 1 + \varepsilon \in \mathrm{U}(\mathfrak{A})$ définie par :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -\varpi^{a_k} b_k \varpi^{-a_r} & \text{si } i = \sigma(k) \text{ et } j = \sigma(r) \ , \\ 0 & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

Dans le cas **(b)**, on efface le bloc b_k en multipliant wb à droite par la matrice $u = 1 + \varepsilon \in \mathrm{U}(\mathfrak{A})$ définie par :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -b_k & \text{si } i = k \text{ et } j = r \ , \\ 0 & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

Dans les deux cas, on se ramène à une situation dans laquelle b est de la forme (21) avec $b_k = 0$. On note b' la matrice de $\mathrm{GL}_{r-1}(C)$ obtenue en enlevant à b sa k-ième ligne et sa k-ième colonne, et on note w' la matrice de $\mathrm{GL}_{r-1}(C)$

obtenue en enlevant à w sa $\sigma(k)$-ième ligne et sa k-ième colonne. Si l'on note W', $\mathfrak{A}'$, h' les analogues dans $\mathrm{M}_{r-1}(C)$ de W, $\mathfrak{A}$, h, on en déduit que :

$$w' \in W' \quad \text{et} \quad b' \in h'\mathrm{U}(\mathfrak{A}')h'^{-1} .$$

Afin de conclure par récurrence, il nous reste à prouver le lemme suivant.

LEMME 3.5. — *L'intersection* $\mathrm{U}(\mathfrak{A}')w'b'\mathrm{U}(\mathfrak{A}') \cap W'$ *n'est pas vide.*

Démonstration. — On note ι le plongement diagonal :

$$\mathrm{GL}_{r-1}(C) \to 1 \times \mathrm{GL}_{r-1}(C) \subset A^{\times}$$

et on note τ la matrice dans $A^{\times}$ de la transposition $1 \leftrightarrow k$, de sorte que la condition $b_k = 0$ se traduit par l'égalité $\iota b' = b^{\tau}$. On choisit un isomorphisme de F-algèbres identifiant C et $\mathrm{M}_s(D)$, avec $s \geqslant 1$, on fixe une uniformisante ϖ_D de $\mathfrak{o}_D$, on note $\tilde{W}$ le groupe des matrices monomiales de $A^{\times}$ dont les coefficients non nuls sont des puissances de ϖ_D, et on note $\tilde{W}'$ son analogue dans $\mathrm{GL}_{r-1}(C)$. Pour alléger les notations, on pose $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathfrak{A})$ et $\mathrm{U}' = \mathrm{U}(\mathfrak{A}')$. Rappelons qu'on a une bijection canonique (« décomposition de Bruhat ») :

$$(\tilde{W} \cap \mathrm{U}^{w\tau})\backslash\tilde{W}/(\tilde{W} \cap \mathrm{U}^{\tau}) \to \mathrm{U}^{w\tau}\backslash A^{\times}/\mathrm{U}^{\tau}$$

qui, si l'on désigne par L le sous-groupe diagonal par blocs $\mathrm{U}(\mathfrak{C}) \times \cdots \times \mathrm{U}(\mathfrak{C})$, induit une bijection :

$$L\backslash L\tilde{W}L/L \to \mathrm{U}^{w\tau}\backslash A^{\times}/\mathrm{U}^{\tau} . \tag{25}$$

Soit $z' \in \tilde{W}' \cap \mathrm{U}'^{w'}b'\mathrm{U}'$ et soit $y \in W \cap \mathrm{U}^{w\tau}b^{\tau}\mathrm{U}^{\tau}$ qui, par hypothèse, est non vide. On a donc deux éléments $z = \iota z' \in \tilde{W}$ et $y \in W$ dans la même double classe $\mathrm{U}^{w\tau}b^{\tau}\mathrm{U}^{\tau}$. Puisque LWL est inclus dans $L\tilde{W}L$, on déduit de (25) que :

$$y \in LzL .$$

On en déduit que y est de la forme $\iota y'$, pour un $y' \in W' \cap \mathrm{U}(\mathfrak{A}')w'b'\mathrm{U}(\mathfrak{A}')$, ce qui termine la démonstration. □

On peut donc appliquer le lemme 3.2 à w' et b' par récurrence sur r, c'est-à-dire que $\mathrm{U}(\mathfrak{A}')w'b'\mathrm{U}(\mathfrak{A}') = \mathrm{U}(\mathfrak{A}')w'\mathrm{U}(\mathfrak{A}')$. En d'autres termes, il existe deux éléments $u', v' \in \mathrm{U}(\mathfrak{A}')$ tels que $v'w'b'u' = w'$. En notant u la matrice obtenue en ajoutant à u' une k-ième ligne et une k-ième colonne dont tous les blocs sont nuls à l'exception de $u_{kk} = 1$, et en notant v la matrice obtenue en ajoutant à v' une $\sigma(k)$-ième ligne et une $\sigma(k)$-ième colonne dont tous les blocs sont nuls à l'exception de $v_{\sigma(k),\sigma(k)} = 1$, on obtient l'égalité $vwbu = w$. On en déduit que $\mathrm{U}(\mathfrak{A})wb\mathrm{U}(\mathfrak{A}) = \mathrm{U}(\mathfrak{A})w\mathrm{U}(\mathfrak{A})$, ce qui met fin à la démonstration du lemme 3.2.

Pour obtenir le lemme 3.1, on applique le lemme 3.2 et on remarque que, si $w \in W$, on a $\mathrm{U}w\mathrm{U} \cap W = LwL \cap W = \{w\}$.

4. Types simples

On fixe une F-algèbre centrale simple A et on pose $G = A^\times$. Dans cette section, on définit les types simples pour le groupe G, et on calcule leurs algèbres de Hecke. Les notations des sections 1 et 2 sont en vigueur.

4.1. Types simples de niveau > 0. — Un couple (J, λ) est un *type simple de niveau* > 0 pour G s'il existe une strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ de A, un caractère simple $\theta \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$, une β-extension κ de $\eta(\theta)$ et une représentation irréductible τ de $\mathrm{U}(\mathfrak{B})$ tels que :

(1) On a $\mathrm{J} = J(\beta, \mathfrak{A})$.

(2) Le couple $(\mathrm{U}(\mathfrak{B}), \tau)$ est un type simple de niveau zéro pour $B^\times$.

(3) La représentation λ est isomorphe à $\kappa \otimes \tau$, où τ est vue comme une représentation de $J(\beta, \mathfrak{A})$ triviale sur $J^1(\beta, \mathfrak{A})$.

Par *type simple* on entendra type simple de niveau zéro ou > 0.

Remarque 4.1. — Il est possible de combiner ces deux notions en acceptant comme strate simple la *strate nulle* $[\mathfrak{A}, 0, 0, 0]$, comme le fait Stevens ([14]). On a $J(0, \mathfrak{A}) = H(0, \mathfrak{A}) = \mathrm{U}(\mathfrak{A})$, et $\mathscr{C}(0, \mathfrak{A})$ est réduit au caractère trivial de $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A})$. Les « 0-extensions » à $\mathrm{U}(\mathfrak{A})$ du caractère trivial sont les caractères de la forme $\chi \circ \mathrm{N}_{A/F}$, avec $\chi \in k_F^{\times\wedge}$ et où $\mathrm{N}_{A/F}$ désigne la norme réduite de A sur F, de sorte que la notion de type simple attaché à la strate nulle correspond bien à celle de type simple de niveau zéro.

On fixe un type simple (J, λ) de niveau > 0, auquel correspondent les quantités ci-dessus, et on fixe un ordre $\mathfrak{A}' \in \mathscr{O}$ tel que $\mathfrak{B}'$ contienne $\mathfrak{B}$.

Lemme 4.2. — *Soit $\rho' \in \mathrm{B}_{\mathfrak{A}'}$, soit ξ une représentation irréductible du groupe $\mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ triviale sur $J^1(\beta, \mathfrak{A}')$ et soit ν la représentation $\rho'|_{\mathrm{J}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')} \otimes \xi$. Alors :*

(1) *La représentation ν est irréductible sur $\mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$, et son entrelacement dans G est égal à $\mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') I_{B^\times}(\xi) \mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$.*

(2) *Pour tout $y \in B^\times$, on a :*

$$I_y(\nu) = I_y(\rho'|_{\mathrm{J}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')}) \otimes I_y(\xi) \ .$$

Démonstration. — La preuve est analogue à [5], (5.3.2). Il suffit de remplacer [5], (5.1.1) et (5.1.8) par [13], *prop.* 2.10. □

On fixe un isormophisme de E-algèbres entre B et $\mathrm{M}_r(\mathrm{M}_s(D'))$ de sorte que $\mathfrak{B}$ soit sous forme normale, on fixe une uniformisante $\varpi_{D'}$ de $\mathfrak{o}_{D'}$, et on note $W(\tau)$ le sous-groupe de $B^\times$ relatif à ces choix (*cf.* paragraphe 2.5.5).

Proposition 4.3. — *Soit (J,λ) un type simple. Alors λ est irréductible, son entrelacement est égal à $JW(\tau)J$ et, pour tout $w \in W(\tau)$, on a $\dim I_w(\lambda) = 1$.*

Démonstration. — Pour les types simples de niveau zéro, le résultat est déjà connu ([9], *cor.* 1.6 et 4.7). Pour les types simples de niveau > 0, le résultat est une conséquence du lemme 4.2, de [13], *prop.* 2.10, et de ce qui précède à propos des types simples de niveau zéro. □

4.2. Algèbre de Hecke d'un type simple. — Dans ce paragraphe, on fixe un type simple (J,λ) de niveau > 0. On fixe un ordre maximal $\mathfrak{B}_{\mathrm{M}}$ contenant $\mathfrak{B}$, on note $\mathfrak{A}_{\mathrm{M}}$ l'unique ordre $\in \mathscr{O}$ dont l'intersection avec B est égale à $\mathfrak{B}_{\mathrm{M}}$, et on choisit un ordre $\mathfrak{A}' \in \mathscr{O}$ tel que $\mathfrak{B}'$ soit compris entre $\mathfrak{B}_{\mathrm{M}}$ et $\mathfrak{B}$. On pose $J_{\mathrm{M}} = J(\beta,\mathfrak{A}_{\mathrm{M}})$ et $J^1_{\mathrm{M}} = J^1(\beta,\mathfrak{A}_{\mathrm{M}})$.

On fixe des mesures de Haar μ sur G et μ' sur $B^\times$.

4.2.1. Le quotient de $\mathrm{J}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')$ par $J^1(\beta,\mathfrak{A}')$ s'identifie à $\mathrm{U}(\mathfrak{B})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B}')$ dont le groupe $\mathrm{U}(\mathfrak{B})/\mathrm{U}^1(\mathfrak{B})$ est un quotient. On peut donc considérer τ, par inflation, comme une représentation du groupe $\mathrm{J}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')$ triviale sur $J^1(\beta,\mathfrak{A}')$ et, pour toute β-extension $\kappa' \in \mathrm{B}_{\mathfrak{A}'}$, on note $\kappa'(\tau)$ le produit tensoriel $\kappa'|_{\mathrm{J}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')} \otimes \tau$.

On note $q' = q_{D'}$ le cardinal du corps résiduel de D'.

Lemme 4.4. — *Soit $\rho_{\mathrm{M}} \in \mathrm{B}_{\mathfrak{A}_{\mathrm{M}}}$. Il existe un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres :*

$$\Phi_0^{\mathrm{M}} : \mathcal{H}_0(r,q'^s) \to \mathscr{H}(J_{\mathrm{M}},\rho_{\mathrm{M}}(\tau))$$

tel que $\Phi_0^{\mathrm{M}}([s_i])$ soit de support $\mathrm{J}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_{\mathrm{M}})s_i\mathrm{J}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_{\mathrm{M}})$ pour tout $1 \leqslant i < r$.

Démonstration. — Puisque le quotient de J_{M} par J^1_{M} s'identifie à $\mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\mathrm{M}})$, on a un isomorphisme canonique entre les $\mathbb{C}$-algèbres $\mathscr{H}(\mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\mathrm{M}}),\tau)$ et $\mathscr{H}(J_{\mathrm{M}},\tau)$. Compte tenu de ceci et de l'isomorphisme (16) correspondant à $\mathfrak{B}_{\mathrm{M}}$, il suffit de montrer qu'il existe un isomorphisme entre $\mathscr{H}(J_{\mathrm{M}},\tau)$ et $\mathscr{H}(J_{\mathrm{M}},\rho_{\mathrm{M}}(\tau))$ conservant les supports. À toute fonction $f \in \mathscr{H}(J_{\mathrm{M}},\tau)$ on fait correspondre, de façon analogue à [5], (5.6.3), la fonction f_{M} de $\mathscr{H}(J_{\mathrm{M}},\rho_{\mathrm{M}}(\tau))$ définie par :

$$f_{\mathrm{M}}(g) = \rho_{\mathrm{M}}(g) \otimes f(g)\ , \quad g \in J_{\mathrm{M}}\ .$$

L'application $f \mapsto f_{\mathrm{M}}$ est manifestement injective, et il faut vérifier qu'elle est surjective. Soit donc $f' \in \mathscr{H}(J_{\mathrm{M}},\rho_{\mathrm{M}}(\tau))$. Pour $g \in \mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\mathrm{M}})$, l'espace d'entrelacement $I_g(\rho_{\mathrm{M}}|_{\mathrm{J}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}_{\mathrm{M}})})$ est de dimension 1 (*cf.* [13], *prop.* 2.10) et engendré par $\rho_{\mathrm{M}}(g)$, de sorte que, selon le lemme 4.2, l'opérateur d'entrelacement $f'(g)$

s'écrit $\rho_{\mathrm{M}}(g) \otimes f(g)$, avec $f(g) \in I_g(\tau)$. Puis, lorsque $g \in J_{\mathrm{M}}$, on écrit $g = uy$, avec $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{B}_{\mathrm{M}})$ et $y \in J^1_{\mathrm{M}}$, et on a :

$$f'(g) = f'(u) \circ \rho_{\mathrm{M}}(\tau)(y) = f_{\mathrm{M}}(u) \circ \rho_{\mathrm{M}}(\tau)(y) = f_{\mathrm{M}}(g) \ .$$

On en déduit que $f' = f_{\mathrm{M}}$, ce qui termine la démonstration. □

4.2.2. Le résultat suivant, qui est essentiel par la suite, est fondé sur l'existence de relations de cohérence entre les diverses β-extensions de B.

Proposition 4.5. — *Soit (J, λ) un type simple de niveau > 0, et soit $\mathfrak{A}' \in \mathscr{O}$ tel que l'ordre $\mathfrak{B}'$ contienne $\mathfrak{B}$. Il existe une β-extension $\kappa' \in \mathrm{B}_{\mathfrak{A}'}$ et un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres :*

$$\Gamma' : \mathscr{H}(G, \lambda) \to \mathscr{H}(G, \kappa'(\tau))$$

conservant les supports, c'est-à-dire que pour tout $y \in B^\times$, on a :

$$\mathrm{supp}(f) = JyJ \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{supp}\ \Gamma'(f) = \mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')y\mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}') \ .$$

Démonstration. — Soient respectivement x et $x' \in \mathscr{I}_A(\mathbb{Q})$ les isobarycentres de l'immeuble affine correspondant aux ordres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$. Pour tout nombre réel $0 \leqslant t \leqslant 1$, on pose :

$$x(t) = (1-t)x + tx' \ .$$

Lorsque t est rationnel, le point $x(t)$ est rationnel et $E^\times$-invariant, c'est-à-dire que l'ordre héréditaire $\mathfrak{A}(t)$ qui lui correspond est E-pur. Le segment $[x, x']$ ne coupe qu'un nombre fini de facettes dans $\mathscr{I}_A$, de sorte que la famille d'ordres E-purs $(\mathfrak{A}(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1)$ se réduit à une famille finie :

$$(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_k) \ , \quad k \geqslant 0 \ ,$$

avec $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}'$, et telle que pour tout $0 \leqslant i < k$, l'ordre $\mathfrak{A}_i$ ou bien contienne ou bien soit contenu dans $\mathfrak{A}_{i+1}$ (selon qu'on passe d'une facette à une autre de dimension supérieure ou inférieure). On peut donc définir par récurrence une famille finie :

$$(\kappa_0, \ldots, \kappa_k) \ , \quad k \geqslant 0 \ , \tag{26}$$

de β-extensions de B, en posant $\kappa_0 = \kappa$ et, pour $0 \leqslant i < k$, en prenant pour κ_{i+1} l'unique élément de $\mathrm{B}_{\mathfrak{A}_{i+1}}$ cohérent avec κ_i (*cf.* paragraphe 2.4.4). Pour conclure, il suffit de construire un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres entre les algèbres de Hecke $\mathscr{H}_i = \mathscr{H}(G, \kappa_i(\tau))$ et $\mathscr{H}_{i+1} = \mathscr{H}(G, \kappa_{i+1}(\tau))$ conservant les supports. Les deux représentations :

$$\nu_i = \mathrm{Ind}_{\mathrm{J}(\mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_i)}^{\mathrm{U}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1})}\ \kappa_i|_{\mathrm{J}(\mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_i)} \quad \text{et} \quad \nu_{i+1} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{J}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1})}^{\mathrm{U}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1})}\ \kappa_{i+1}|_{\mathrm{J}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1})}$$

sont équivalentes. Mais, puisque $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{E/F}$ est affine, l'image par $\boldsymbol{j}$ du segment $[x, x']$ est le segment $[\boldsymbol{j}(x), \boldsymbol{j}(x')]$, qui est inclus dans l'adhérence de la facette correspondant à $\mathfrak{B}$ puisque $\mathfrak{B}'$ contient $\mathfrak{B}$. En d'autres termes, l'intersection

$\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_{i+1}$ contient $\mathfrak{B}$, de sorte que l'on peut voir τ par inflation comme une représentation de $\mathrm{U}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1})$ triviale sur $\mathrm{U}^1(\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{A}_{i+1})$. On en déduit que les représentations $\nu_i \otimes \tau$ et $\nu_{i+1} \otimes \tau$, puisque isomorphes, ont des algèbres de Hecke d'une part isomorphes entre elles, d'autre part, selon [5], (4.1.3), isomorphes respectivement à $\mathscr{H}_i$ et à $\mathscr{H}_{i+1}$.

Il reste à vérifier que les supports sont conservés. Soit $f \in \mathscr{H}_i$ de support $\mathrm{J}(\mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_i) y \mathrm{J}(\mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_i)$, avec $y \in B^\times$, et soit f' son image dans $\mathscr{H}_{i+1}$ par le morphisme que nous venons de construire. Selon [5], (4.1.5), le support de f' est une union, indexée sur $z \in G$, de doubles classes de la forme :

$$\mathrm{J}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1}) z \mathrm{J}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1}) \subset \mathrm{U}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1}) y \mathrm{U}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1}) \ ,$$

et on peut supposer que $z \in B^\times$ puisque l'entrelacement de $\kappa_{i+1}|_{J^1(\beta, \mathfrak{A}_{i+1})}$ est égal à $J^1(\beta, \mathfrak{A}_{i+1}) B^\times J^1(\beta, \mathfrak{A}_{i+1})$. Puisque selon [12], *cor.* 3.3, on a :

$$\mathrm{U}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1}) z \mathrm{U}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1}) \cap B^\times = \mathrm{U}(\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_{i+1}) z \mathrm{U}(\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_{i+1}) \ ,$$

on en déduit que :

$$\mathrm{U}(\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_{i+1}) z \mathrm{U}(\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_{i+1}) = \mathrm{U}(\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_{i+1}) y \mathrm{U}(\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_{i+1}) \ ,$$

de sorte que le support de f' se réduit à $\mathrm{J}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1}) y \mathrm{J}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1})$. Ceci met fin à la démonstration de la proposition 4.5. $\square$

4.2.3. Si l'on applique la proposition 4.5 dans le cas où $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_{\mathrm{M}}$, on en déduit l'existence d'une représentation $\kappa_{\mathrm{M}} \in \mathrm{B}_{\mathfrak{A}_{\mathrm{M}}}$ et d'un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres Γ_{M} de $\mathscr{H}(G, \lambda)$ dans $\mathscr{H}(G, \kappa_{\mathrm{M}}(\tau))$ conservant les supports. Combinant ceci avec l'isomorphisme Φ_0^{M} du lemme 4.4 et l'injection canonique de $\mathscr{H}(J_{\mathrm{M}}, \kappa_{\mathrm{M}}(\tau))$ dans $\mathscr{H}(G, \kappa_{\mathrm{M}}(\tau))$, on obtient un homomorphisme injectif de $\mathbb{C}$-algèbres :

$$\Phi'_0 : \mathcal{H}_0(r, q'^s) \to \mathscr{H}(G, \lambda) \tag{27}$$

tel que $\Phi'_0([s_i])$ soit de support $J s_i J$ pour tout entier $1 \leqslant i < r$. On peut maintenant énoncer le théorème principal de cette section.

Théorème 4.6. — *Soit (J, λ) un type simple. On note $q' = q_{D'}$ le cardinal du corps résiduel de D'. À tout élément $\varphi \in \mathscr{H}(G, \lambda)$ de support JhJ correspond un unique isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres :*

$$\Phi : \mathcal{H}(r, q'^s) \to \mathscr{H}(G, \lambda)$$

prolongeant (27) *et vérifiant* $\Phi([h]) = \varphi$.

La démonstration de ce théorème occupe le paragraphe suivant. Le résultat étant connu pour les types simples de niveau zéro ([9], *th.* 4.2), on suppose par la suite que (J, λ) est de niveau > 0.

4.3. Preuve du théorème 4.6. — C'est ici qu'interviennent les procédés de décomposition développés dans la section 1. La première étape consiste à se ramener au cas où l'ordre $\mathfrak{A}$ a une forme particulière permettant de lui appliquer le lemme principal 3.1, lui-même permettant de prouver le lemme 4.13.

4.3.1. Réduction au cas propre. — Soit $\mathfrak{A}$ un ordre héréditaire E-pur de A.

Définition 4.7. — L'ordre $\mathfrak{A}$ est dit *propre* s'il existe une base de V' sur D' et deux entiers r et s tels que $m' = rs$, et tels que l'isomorphisme (6) entre les F-algèbres A et $\mathrm{M}_r(\mathrm{M}_s(A(E)))$ identifie $\mathfrak{A}$ à l'ordre :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{M}_s(\mathfrak{A}(E)) & \cdots & \mathrm{M}_s(\mathfrak{A}(E)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{M}_s(\mathfrak{P}(E)) & \cdots & \mathrm{M}_s(\mathfrak{A}(E)) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

En d'autres termes, si l'ordre $\mathfrak{A}$ est propre, on se trouve dans le contexte de la section 3 pour les choix $C = \mathrm{M}_s(A(E))$ et $\mathfrak{C} = \mathrm{M}_s(\mathfrak{A}(E))$. Notamment, l'ordre $\mathfrak{B}$ qui lui correspond est principal de période r, et il est décomposé par n'importe quelle base de V' sur D' satisfaisant à la définition 4.7.

Remarque 4.8. — Mentionnons que, pour tout ordre principal $\mathfrak{B}$ de B, il existe un ordre $\mathfrak{A} \in \mathscr{O}$ qui soit propre et dont l'intersection avec B soit égale à $\mathfrak{B}$.

Remarque 4.9. — Il peut exister dans A des ordres purs non propres. Par exemple, dans la situation de l'exemple 1.4, on a $\mathfrak{A}(E) = \mathfrak{o}_D$ donc tout ordre propre dont la trace sur B est $\mathfrak{B}_{\mathrm{m}}$ doit être de période 2, c'est-à-dire minimal. On vérifie que $\mathfrak{A}_{\mathrm{m}}$ et $\mathfrak{A}'_{\mathrm{m}}$ sont propres, et que $\mathfrak{A}'_{\mathrm{M}}$ ne l'est pas.

Remarque 4.10. — La notion de propreté définie en 4.7 ne coïncide pas avec celle de « *soundness* » dégagée par Grabitz dans [8]. Par exemple, dans la situation de l'exemple 1.4 : le *prolongement* (au sens de [8]) de $\mathfrak{B}_{\mathrm{m}}$ est l'ordre pur $\mathfrak{A}'_{\mathrm{M}}$ qui n'est pas propre, et l'ordre $\mathfrak{A}_{\mathrm{m}}$ est propre mais n'est pas *sound*.

Soit (J, λ) un type simple de niveau > 0. On note r la période de l'ordre $\mathfrak{B}$, et on pose $m' = rs$.

Lemme 4.11. — *Soit $\mathfrak{A}' \in \mathscr{O}$ un ordre propre tel que $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$. Il existe un type simple (J', λ') tel que $J' = J(\beta, \mathfrak{A}')$, et un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres entre $\mathscr{H}(G, \lambda)$ et $\mathscr{H}(G, \lambda')$ conservant les supports.*

Démonstration. — Il existe, d'après la proposition 4.5, une β-extension $\kappa' \in \mathrm{B}_{\mathfrak{A}'}$ et un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres entre $\mathscr{H}(G,\lambda)$ et $\mathscr{H}(G,\kappa'(\tau))$ conservant les supports. La représentation $\lambda' = \kappa'(\tau)$ est un type simple défini sur $\mathrm{J}(\mathfrak{A},\mathfrak{A}') = J(\beta,\mathfrak{A}')$. □

Il suffit donc de prouver le théorème 4.6 lorsque l'ordre $\mathfrak{A}$ associé au type simple (J,λ) est propre. *C'est ce qu'on supposera désormais.*

4.3.2. Soit (J,λ) un type simple de niveau > 0 tel que $\mathfrak{A}$ soit propre.

Lemme 4.12. — *Soit $w \in W(\tau)$. On a :*

$$JwJhJ \cap W(\tau) = \{wh\} \quad \textit{et} \quad JhJwJ \cap W(\tau) = \{hw\}\ ,$$

et :

$$JwJh^{-1}J \cap W(\tau) = \{wh^{-1}\} \quad \textit{et} \quad Jh^{-1}JwJ \cap W(\tau) = \{h^{-1}w\}\ .$$

Démonstration. — On effectue la démonstration pour la première égalité. Les autres cas sont analogues. Puisque $\mathfrak{A}$ est propre, nous sommes dans le contexte de la section 3 pour les choix $C = \mathrm{M}_s(A(E))$ et $\mathfrak{C} = \mathrm{M}_s(\mathfrak{A}(E))$. On choisit en outre pour ϖ l'élément $\varpi_{D'}^l$ (*cf.* paragraphe 2.5.5), de sorte que l'élément défini en (20) coïncide avec l'élément défini en (17), et que le groupe W coïncide avec le groupe $W(\tau)$. On peut donc appliquer le lemme 3.1, et il vient :

$$JwJhJ \cap W(\tau) \subset \mathrm{U}(\mathfrak{A})w\mathrm{U}(\mathfrak{A})h\mathrm{U}(\mathfrak{A}) \cap W(\tau) = \{wh\}\ ,$$

ce qui termine la démonstration. □

On pose $\mathscr{H} = \mathscr{H}(G,\lambda)$ et on fixe un élément $\varphi \in \mathscr{H}$ de support JhJ.

Lemme 4.13. — *Pour tout $w \in W$ et tout $f \in \mathscr{H}$ de support JwJ, on a :*

$$\mathrm{supp}\ (f * \varphi) \subset JwhJ \quad \textit{et} \quad \mathrm{supp}\ (\varphi * f) \subset JhwJ\ .$$

Démonstration. — Nous faisons la démonstration pour la première égalité. L'autre cas est analogue. Puisque le support de $f * \varphi$ est inclus à la fois dans $JwJhJ$ et dans $JW(\tau)J$, tout revient à montrer que l'intersection de $JwJhJ$ avec $W(\tau)$ est réduite au singleton $\{wh\}$. On conclut donc en appliquant le lemme 4.12. □

Lemme 4.14. — *L'élément φ est inversible dans $\mathscr{H}$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le support de φ^k est Jh^kJ.*

Démonstration. — On choisit $\varphi' \in \mathscr{H}$ de support $Jh^{-1}J$, et on pose $I = \varphi(h)$ et $I' = \varphi'(h^{-1})$. D'après le lemme 4.13, le support de $\varphi * \varphi'$ est majoré par J donc, puisque $I_1(\lambda)$ est de dimension 1, il existe un nombre complexe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi * \varphi' = c \cdot e$, où e désigne l'unité de $\mathscr{H}$. Par conséquent, le produit $\varphi * \varphi'$

est soit nul, soit inversible, et nous allons montrer que $\varphi * \varphi'(1)$ n'est pas nul. Si l'on écrit $x \in JhJ$ sous la forme $x = jhj'$, avec $j, j' \in J$, on obtient :

$$\varphi(x)\varphi'(x^{-1}) = \lambda(j)II'\lambda(j)^{-1} \ ,$$

de sorte que la trace de $\varphi * \varphi'(1)$ est égale à :

$$\mathrm{tr}\ \varphi * \varphi'(1) = \int_G \mathrm{tr}\ \varphi(x)\varphi'(x^{-1})\ dx = \mu(JhJ) \cdot \mathrm{tr}(II') \ ,$$

et il reste à prouver que la trace de II' est non nulle. D'après la proposition 4.3, les espaces $I_h(\lambda)$ et $I_{h^{-1}}(\lambda)$ sont de dimension 1. On a donc, dans l'espace Z de λ, un unique facteur irréductible Z_0 de $\lambda|_{J\cap J^h}$ tel que $I(Z_0)$ soit un facteur irréductible de $\lambda^h|_{J\cap J^h}$, et un unique facteur irréductible Z_0' de $\lambda|_{J\cap J^{h^{-1}}}$ tel que $I'(Z_0')$ soit un facteur irréductible de $\lambda^{h^{-1}}|_{J\cap J^{h^{-1}}}$. Puisque :

$$\lambda(J \cap J^h) = \lambda^{h^{-1}}(J \cap J^{h^{-1}}) \quad \text{et} \quad \lambda^h(J \cap J^h) = \lambda(J \cap J^{h^{-1}}) \ ,$$

on a par unicité $I(Z_0) = Z_0'$ et $I'(Z_0') = Z_0$. Donc II' est, à un scalaire non nul près, la projection de Z sur Z_0' donc sa trace est non nulle.

On en déduit que φ est inversible dans $\mathscr{H}$. La seconde partie de l'énoncé s'obtient par récurrence sur l'entier k et à l'aide du lemme 4.13. □

On note Φ_0 l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres (16) correspondant à $\mathfrak{B}_{\mathrm{M}}$.

Lemme 4.15. — *Pour tout entier* $1 < i < r$*, on a :*

$$\varphi * \Phi_0([s_i]) * \varphi^{-1} = \Phi_0([s_{i-1}]) \quad \textit{et} \quad \varphi^2 * \Phi_0([s_1]) * \varphi^{-2} = \Phi_0([s_{r-1}]) \ .$$

Démonstration. — Selon le lemme 4.13, et puisque φ est inversible, les deux membres ont, dans chaque cas, même support. Ainsi, pour $1 < i < r$, la quantité $\Psi_i = \varphi * \Phi_0([s_i]) * \varphi^{-1}$ est d'une part un multiple non nul de $\Phi_0([s_{i-1}])$ (*cf.* proposition 4.3), d'autre part annulée par le polynôme $(X+1)(X-q^s)$. On en déduit que $\Psi_i = \Phi_0([s_{i-1}])$. Le cas restant se traite de façon analogue. □

On déduit des lemmes 4.14 et 4.15 qu'il existe un unique homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres Φ de $\mathcal{H}(r, q'^s)$ dans $\mathscr{H}$ prolongeant (27) et vérifiant $\Phi([h]) = \varphi$. Il nous reste à prouver que c'est un isomorphisme.

4.3.3. Nous renvoyons à [9], *Fact* 4.5 et à [5], (5.4.8) *et seq.* pour la définition de la *longueur* d'un élément du groupe W vu comme groupe de Coxeter étendu.

Proposition 4.16. — *Pour tout* $[w] \in W$*, le support de* $\Phi([w])$ *est égal à* JwJ*, et tout élément de* $\mathscr{H}$ *de support* JwJ *est inversible.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur la longueur de $[w]$ dans W. Si $[w]$ est de longueur nulle, c'est-à-dire si $[w] = [h]^k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, le résultat est une conséquence du lemme 4.14. Sinon, on écrit $[w] = [w'][s]$, où $[w'] \in W$ est de longueur strictement moindre et où $[s] = [s_i]$ pour un $0 \leqslant i < r$. Si $i \neq 0$, on écrit :

$$\Phi([w]) = \Phi([w']) * \Phi([s]) \ . \tag{29}$$

Désignant par Γ_{M} l'isomorphisme construit au paragraphe 4.2.3, on pose $\Phi^{\mathrm{M}} = \Gamma_{\mathrm{M}} \circ \Phi$, de sorte que, puisque Φ^{M} conserve les supports, il suffit de prouver que l'élément :

$$\Phi^{\mathrm{M}}([w]) = \Phi^{\mathrm{M}}([w']) * \Phi^{\mathrm{M}}([s])$$

est de support $\mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{\mathrm{M}})w\mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{\mathrm{M}})$. En tant que produit de convolution dans $\mathscr{H}(G, \kappa_{\mathrm{M}}(\tau))$, et puisque s normalise J^1_{M}, ce support est majoré par :

$$\mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{\mathrm{M}})w'\mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{\mathrm{M}})s\mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{\mathrm{M}})w'\mathrm{U}(\mathfrak{B})s\mathrm{J}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{\mathrm{M}}) \ .$$

Compte tenu de [12], *cor.* 3.3 et de [9], *lem.* 2.7, l'intersection avec $W(\tau)$ vaut :

$$\mathrm{U}(\mathfrak{B})w'\mathrm{U}(\mathfrak{B})s\mathrm{U}(\mathfrak{B}) \cap W(\tau) = \{w's\} = \{w\} \ ,$$

ce dont on déduit finalement que $\Phi([w])$ est de support JwJ. Si $[s] = [s_0]$, on conjugue l'égalité (29) par $\Phi([h^{-1}])$, de façon à obtenir :

$$\Phi([h^{-1}]\,[w]\,[h]) = \Phi([h^{-1}]\,[w']\,[h]) * \Phi([s_1]) \ .$$

Puisque $[h^{-1}]\,[w']\,[h]$ et $[w']$ sont de même longueur, on applique ce qui vient d'être fait dans le cas $i \neq 0$, ce dont on déduit que $\Phi([h^{-1}]\,[w]\,[h])$ est de support $Jh^{-1}whJ$. Il reste à conjuguer par $\Phi([h])$ et à appliquer le lemme 4.13 pour conclure que $\Phi([w])$ est de support JwJ. Enfin, si $f \in \mathscr{H}$ est de support JwJ, avec $[w] \in W$, alors f est un multiple non nul de $\Phi([w])$, qui est inversible dans $\mathscr{H}$ puisque $[w]$ l'est dans $\mathcal{H}(r, q^s)$. Ceci termine la démonstration de la proposition 4.16. □

La proposition 4.16 permet de conclure que l'homomorphisme Φ est un isomorphisme, ce qui met fin à la démonstration du théorème 4.6.

5. Paires couvrantes

Dans cette section, on prouve que les types simples de niveau > 0 construits dans la section précédente sont des types au sens de [6]. Pour cela, on construit des paires couvrantes ([6], §8), suivant en cela l'approche préconisée dans [7], §1 et dans [5], §7.2.

Les notations des sections 1, 2 et 4 sont en vigueur.

5.1. Types maximaux. — Soit A une F-algèbre centrale simple, et soit $G = A^\times$. Un type simple (J, λ) de niveau > 0 pour G est dit *maximal* si $\mathfrak{B}$ est un ordre maximal de B. Dans ce cas, si on fixe une uniformisante $\varpi_{D'}$ de $\mathfrak{o}_{D'}$ et si l'on note $h = \varpi_{D'}^l$ (*cf.* (17)), l'entrelacement de λ est le sous-groupe ouvert et compact modulo le centre engendré par J et h. On le note $\bar{J}$.

On désigne par $\mathrm{N}_{A/F}$ la norme réduite de A sur F.

Lemme 5.1. — *La représentation λ se prolonge en une représentation de $\bar{J}$. Si Λ est un tel prolongement, les autres sont de la forme $\Lambda \otimes (\chi \circ \mathrm{N}_{A/F})$, où χ décrit le groupe des caractères non ramifiés de $F^\times$.*

Démonstration. — Puisque h normalise J, l'espace $I_h(\lambda) = \mathrm{Hom}_J(\lambda, \lambda^h)$ est de dimension 1 et tout opérateur d'entrelacement non nul est inversible. On choisit $I \in I_h(\lambda)$ non nul, et on pose :

$$\Lambda(h^k x) = I^k \lambda(x) \ , \quad x \in J, \ k \in \mathbb{Z} \ ,$$

ce qui définit une représentation irréductible Λ prolongeant λ à $\bar{J}$. Si Λ' est un prolongement de λ à $\bar{J}$, il existe un unique scalaire $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\Lambda'(h) = cI$. Si l'on choisit un caractère non ramifié χ de $F^\times$ tel que $\chi(\mathrm{N}_{A/F}(h)) = c$, on a :

$$\Lambda' = \Lambda \otimes (\chi \circ \mathrm{N}_{A/F}) \ ,$$

ce qui termine la démonstration. □

Théorème 5.2. — *Soit (J, λ) un type simple maximal, et soit Λ une représentation prolongeant λ à $\bar{J}$. L'induite compacte mod. le centre $\Pi = \mathrm{cind}_{\bar{J}}^G(\Lambda)$ est irréductible et supercuspidale, et le couple (J, λ) est un type pour la classe inertielle $[G, \Pi]_G$.*

Démonstration. — Si un élément $g \in G$ entrelace Λ, il entrelace également sa restriction à J, c'est-à-dire qu'on a $g \in \bar{J}$. L'induite compacte Π est donc irréductible et, puisque $\bar{J}$ est compact modulo le centre, elle est supercuspidale. Soit π une représentation lisse irréductible de G, de caractère central noté ω_π, telle que la restriction de π à J contient λ. On prolonge λ en une représentation λ_F de $F^\times J$ en posant :

$$\lambda_F(\varpi_F^k x) = \omega_\pi(\varpi_F^k)\lambda(x) \ , \quad x \in J, \ k \in \mathbb{Z} \ ,$$

de sorte que la restriction de π à $F^\times J$ contient λ_F. Mais l'induite $\mathrm{Ind}_{F^\times J}^{\bar{J}}(\lambda_F)$ est la somme finie des représentations prolongeant λ_F à $\bar{J}$, de sorte qu'il existe un caractère non ramifié χ de $F^\times$ tel que la restriction de π à $\bar{J}$ contienne $\Lambda \otimes (\chi \circ \mathrm{N}_{A/F})^{-1}$. On en déduit que $\pi = \Pi \otimes (\chi \circ \mathrm{N}_{A/F})$. □

5.2. Paires couvrantes. — Soit C une F-algèbre centrale simple. Soit $[\mathfrak{C}, n_0, 0, \beta]$ une strate simple de C, soit $\theta_0 \in \mathscr{C}(\beta, \mathfrak{C})$, soit κ_0 une β-extension de $\eta(\theta_0)$, soit σ_0 une représentation irréductible supercuspidale de $J_0 = J(\beta, \mathfrak{C})$ triviale sur $J_0^1 = J^1(\beta, \mathfrak{C})$ et soit $\lambda_0 = \kappa_0 \otimes \sigma_0$. On suppose que l'intersection de $\mathfrak{C}$ avec le centralisateur de β dans C est un ordre maximal, c'est-à-dire que le couple (J_0, λ_0) est un type simple maximal pour $C^\times$. Il s'agit donc, selon le théorème 5.2, d'un type pour une classe inertielle $\mathfrak{s}_0 = [C^\times, \Pi_0]_{C^\times}$, où Π_0 est n'importe quelle représentation irréductible supercuspidale de $C^\times$ dont la restriction à J_0 contient λ_0.

5.2.1. Étant donné un entier $r \geqslant 1$, on note A la F-algèbre $\mathrm{M}_r(C)$ et G le groupe multiplicatif de A. On note M le sous-groupe de Levi de G défini par :

$$M = \mathrm{GL}_1(C) \times \cdots \times \mathrm{GL}_1(C) \ .$$

Le couple $(J_M, \lambda_M) = (J_0^r, \lambda_0^{\otimes r})$ est un type pour la classe inertielle $\mathfrak{s}_M = [M, \Pi_M]_M$, où Π_M est la représentation irréductible supercuspidale $\Pi_0^{\otimes r}$ de M.

5.2.2. La F-algèbre E est naturellement plongée dans A en combinant $E \to C$ avec le plongement diagonal de C dans A. On note $\mathfrak{Q}$ le radical de $\mathfrak{C}$, et on note $\mathfrak{A}$ l'ordre propre de A défini par (19). Il lui correspond la strate simple $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$, et on note θ le transfert de θ_0 à $\mathscr{C}(\beta, \mathfrak{A})$.

5.2.3. Soit P le sous-groupe parabolique des matrices triangulaires supérieures par blocs relativement à M, soit N son radical unipotent et soit N^- le sous-groupe unipotent opposé à N relativement à M. Selon [13], §2.3 et §2.4, le groupe $J_P = (J \cap P)H^1$ admet une décomposition d'Iwahori relativement à (M, P), c'est-à-dire que :

$$J_P = (H^1 \cap N^-) \cdot (J \cap M) \cdot (J^1 \cap N) \quad \text{et} \quad J_P \cap M = J_M \ ,$$

et l'application λ_P définie par :

$$\lambda_P(hmj) = \lambda_M(m) \ , \quad h \in H^1 \cap N^-, \ m \in J \cap M, \ j \in J^1 \cap N \tag{30}$$

est une représentation irréductible de J_P prolongeant λ_M.

Proposition 5.3. — *La paire (J_P, λ_P) est décomposée par (M, Q) pour tout sous-groupe parabolique Q de G de facteur de Levi M.*

On renvoie à [6], *def.* 6.1 pour la définition d'une paire décomposée.

Démonstration. — Soit Q un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M. On note N_Q son radical unipotent et N_Q^- le sous-groupe unipotent qui lui est opposé relativement à M. Il suffit de reproduire les arguments donnés dans la preuve du théorème [13], 2.19, pour montrer d'une part que le groupe J_P

admet une décomposition d'Iwahori relativementà (M,Q), d'autre part que la représentation λ_P est triviale sur les sous-groupes $J_P\cap N_Q^-$ et $J_P\cap N_Q$. □

Proposition 5.4. — *Soit* $\lambda=\mathrm{Ind}_{J_P}^J(\lambda_P)$. *Le couple* (J,λ) *est un type simple.*

Démonstration. — On pose $\kappa_M=\kappa_0^{\otimes r}$, que l'on étend en une représentation κ_P de J_P de façon analogue à (30) en posant :

$$\kappa_P(hmj)=\kappa_M(m)\ ,\quad h\in H^1\cap N^-,\ m\in J\cap M,\ j\in J^1\cap N\ .$$

Selon les théorèmes [13], 2.18 et 2.19 combinés, l'induite $\kappa=\mathrm{Ind}_{J_P}^J(\kappa_P)$ est une β-extension de $\eta(\theta)$ à J. Si l'on pose $\tau=\sigma_0^{\otimes r}$, on a manifestement $\lambda_P=\kappa_P\otimes\tau$ donc $\lambda=\kappa\otimes\tau$, ce dont on déduit que (J,λ) est un type simple. □

Proposition 5.5. — *La paire* (J_P,λ_P) *est une paire couvrante de* (J_M,λ_M).

On renvoie à [6], *def.* 8.1 pour la définition d'une paire couvrante.

Démonstration. — Soit Q un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M, et soit z_Q un élément du centre de M qui soit fortement (Q,J_P)-positif (*cf.* [6], *def.* (6.16)). On a un isomorphisme canonique préservant les supports entre les $\mathbb{C}$-algèbres $\mathscr{H}(G,\lambda_P)$ et $\mathscr{H}(G,\lambda)$, de sorte que, d'après la proposition 5.4 et le lemme 4.16, tout élément de $\mathscr{H}(G,\lambda_P)$ supporté par $J_Pz_QJ_P$ est inversible. Compte tenu de la proposition 5.3, la paire (J_P,λ_P) est une paire couvrante de (J_M,λ_M). □

5.3. Types. — Soit A une F-algèbre centrale simple, soit $G=A^\times$ et soit (J,λ) un type simple de niveau >0 pour G. On note r la période de $\mathfrak{B}$ et on pose $m'=rs$. On pose $C=\mathrm{M}_s(A(E))$ et $\mathfrak{C}=\mathrm{M}_s(\mathfrak{A}(E))$, et on fixe une base de V' sur D' décomposant $\mathfrak{B}$ de façon à identifier les F-algèbres A et $\mathrm{M}_r(C)$. On se retrouve donc dans le contexte du paragraphe 5.2 dont on reprend les notations. On note θ_0 le transfert de θ à $\mathscr{C}(\beta,\mathfrak{C})$ et κ_0 une β-extension de $\eta(\theta_0)$. Si $\tau=\sigma^{\otimes r}$ est le facteur « de niveau zéro » de λ, on pose $\lambda_0=\kappa_0\otimes\sigma$, de sorte que le couple (J_0,λ_0) est un type simple maximal pour $C^\times$. On fixe une représentation irréductible supercuspidale Π_0 de $C^\times$ dont la restriction à J_0 contient λ_0, et on définit M et Π_M comme au paragraphe 5.2.1.

Théorème 5.6. — *Le couple* (J,λ) *est un type pour* $[M,\Pi_M]_G$.

Démonstration. — On note $\mathfrak{A}'$ l'ordre propre défini par (19), et on reprend la preuve de la proposition 4.5 au stade où l'on construit une famille finie (26) de β-extensions. Pour chaque entier i, la représentation $\lambda_i=\kappa_i\otimes\tau$ est un type simple sur le groupe $J(\beta,\mathfrak{A}_i)$ et les représentations λ_i et λ_{i+1}

induisent à $\mathrm{U}(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1})$ des représentations équivalentes, de sorte que, pour toute représentation irréductible π de G, on a :

$$\mathrm{Hom}_{J_i}(\lambda_i, \pi) \neq (0) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{J_{i+1}}(\lambda_{i+1}, \pi) \neq (0) .$$

De proche en proche, on en déduit que, si l'on note (J', λ') le type simple $(J(\beta, \mathfrak{A}_k), \lambda_k)$, les espaces $\mathrm{Hom}_J(\lambda, \pi)$ et $\mathrm{Hom}_{J'}(\lambda', \pi)$ sont simultanément non nuls. Par conséquent, le couple (J, λ) est un type si, et seulement si (J', λ') en est un, auquel cas ce sont des types pour la même classe inertielle. Il suffit donc de prouver le théorème 5.6 lorsque $\mathfrak{A}$ est propre, *ce que nous supposerons désormais.*

Soit donc (J, λ) un type simple de niveau > 0 tel que l'ordre $\mathfrak{A}$ soit propre relativement à une base de V' sur D' décomposant $\mathfrak{B}$. L'application :

$$\kappa_0 \mapsto \mathrm{Ind}_{J_P}^{J}(\kappa_P)$$

de $\mathrm{B}_{\mathfrak{C}}$ dans $\mathrm{B}_{\mathfrak{A}}$ décrite au paragraphe 5.2.3 est manifestement $k_E^{\times\wedge}$-équivariante, donc injective puisque les éléments de $\mathrm{B}_{\mathfrak{A}}$ sont deux-à-deux non équivalents (*cf.* paragraphe 2.4.3). Elle est donc bijective puisque $\mathrm{B}_{\mathfrak{C}}$ et $\mathrm{B}_{\mathfrak{A}}$ sont tous deux principaux homogènes sous $k_E^{\times\wedge}$ (*ibid.*), de sorte qu'on peut choisir $\kappa_0 \in \mathrm{B}_{\mathfrak{C}}$ de façon telle que l'induite $\mathrm{Ind}_{J_P}^{J}(\kappa_P)$ soit équivalente à κ. On a ainsi :

$$\lambda \simeq \mathrm{Ind}_{J_P}^{J}(\lambda_P) . \tag{31}$$

D'après la proposition 5.5, la paire (J_P, λ_P) est une paire couvrante de (J_M, λ_M), ce dont on déduit que, d'après [6], *th.* 8.3, c'est un type pour la classe inertielle $\mathfrak{s} = [M, \Pi_M]_G$. Enfin, la relation (31) entraîne que (J, λ) est un $\mathfrak{s}$-type. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. N. Bernstein – « Le "centre" de Bernstein », in *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, Written by P. Deligne, p. 1–32.

[2] P. Broussous & B. Lemaire – « Building of $\mathrm{GL}(m, D)$ and centralizers », *Transform. Groups* **7** (2002), no. 1, p. 15–50.

[3] P. Broussous – « Hereditary orders and embeddings of local fields in simple algebras », *J. Algebra* **204** (1998), no. 1, p. 324–336.

[4] P. Broussous & M. Grabitz – « Pure elements and intertwining classes of simple strata in local central simple algebras », *Comm. Algebra* **28** (2000), no. 11, p. 5405–5442.

[5] C. J. Bushnell & P. C. Kutzko – *The admissible dual of* $\mathrm{GL}(N)$ *via compact open subgroups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[6] ———, « Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types », *Proc. London Math. Soc. (3)* **77** (1998), no. 3, p. 582–634.

[7] ———, « Semisimple types in GL_n », *Compositio Math.* **119** (1999), no. 1, p. 53–97.

[8] M. Grabitz – « Continuation of hereditary orders in local central simple algebras », *J. Number Theory* **77** (1999), no. 1, p. 1–26.

[9] M. Grabitz, A. J. Silberger & E.-W. Zink – « Level zero types and Hecke algebras for local central simple algebras », *J. Number Theory* **91** (2001), no. 1, p. 92–125.

[10] R. Howe – *Harish-Chandra homomorphisms for p-adic groups*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 59, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1985, With the collaboration of Allen Moy.

[11] I. Reiner – *Maximal orders*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1975, London Mathematical Society Monographs, No. 5.

[12] V. Sécherre – « Représentations lisses de $GL(m, D)$, I : caractères simples », *Bull. Soc. math. France* **132** (2004), no. 3, p. 327–396.

[13] ———, « Représentations lisses de $GL(m, D)$, II : β-extensions », à paraître à *Compositio Math.* (2005).

[14] S. Stevens – « Semisimple characters for p-adic classical groups », `http ://www.mth.uea.ac.uk/ h008/research.html` (2004).

[15] E.-W. Zink – « More on embeddings of local fields in simple algebras », *J. Number Theory* **77** (1999), no. 1, p. 51–61.