MODULES UNIVERSELS EN CARACTÉRISTIQUE NATURELLE POUR UN GROUPE RÉDUCTIF FINI

RACHEL OLLIVIER AND VINCENT SÉCHERRE

RÉSUMÉ. Let k be a finite field of characteristic p, let G be the group of k-rational points of a connected reductive group defined over an algebraic closure $\overline{\mathbf{F}}_p$ of k, and let U be the k-rational points of the unipotent radical of a Borel subgroup B defined over k. We study the universal module C of $\overline{\mathbf{F}}_p$-valued functions on G that are invariant under translation by U, as a module over its G-endomorphism algebra H. Using a theorem by Cabanes, we prove that C is flat over H if and only if the category of finite dimensional H-modules is equivalent to the category of finite dimensional $\overline{\mathbf{F}}_p$-representations of G generated by their U-invariant subspace. We study more specifically the flatness of C when $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(n, k)$ depending on the cardinality of k. In a subsequent paper, we will focus on $n = 3$ and will show how some of these flatness results imply analogous statements for the universal module of the group GL(3) over a p-adic field.

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION

1. Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe défini sur un corps fini k de caractéristique p et soit $\mathbf{U}$ le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$. Notons respectivement $\mathrm{G}, \mathrm{U}, \mathrm{B}$ les groupes de points k-rationnels correspondants, et notons C l'espace des fonctions de G à valeurs dans une clôture algébrique $\overline{\mathbf{F}}_p$ de k qui sont invariantes par translations à gauche par U. Nous appellerons C un module universel pour G. L'action de G par translations à droite fait de C une représentation de G, dont l'algèbre d'endomorphismes H est l'algèbre de Hecke de G relativement à U. On s'intéresse dans cet article aux représentations de G à coefficients dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ et à leurs liens avec les modules sur l'algèbre de Hecke H.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20C33,20C08.

Key words and phrases. Modular representations; Finite reductive groups; Hecke algebras.

Les auteurs sont en partie financés par l'Agence Nationale de la Recherche (réf. ANR-2011-BS01-005-02). V. S. a également bénéficié du soutien financier de l'EPSRC (grant GR/T21714/01).

2. Plus précisément, C est à la fois une représentation de G et un module à gauche sur H, et on a un foncteur :

$$\mathrm{V} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{V}) \tag{1.1}$$

de la catégorie des représentations de G à coefficients dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ vers celle des modules à droite sur H. L'ordre de U n'étant pas inversible dans $\overline{\mathbf{F}}_p$, ce foncteur n'est pas exact en général. Toutefois il induit une bijection entre classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G et classes d'isomorphisme de modules simples sur H ([8]). Il admet un adjoint à droite, le foncteur de tensorisation par C au-dessus de H, et nous cherchons à quelles conditions C est plat comme module sur H. A partir d'un résultat de [5] exploitant le fait que H est auto-injective, nous obtenons le résultat suivant (voir la proposition 2.13).

Théorème A. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Le foncteur* (1.1) *induit une équivalence entre la catégorie des* $\overline{\mathbf{F}}_p$*-représentations de dimension finie engendrées par leurs vecteurs* U*-invariants et la catégorie des modules à droite sur* H *de dimension finie.*

(2) *le* H*-module* C *est plat.*

3. Supposons maintenant que $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, $n \geqslant 1$ et notons C_1 l'espace des fonctions de G dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ invariantes par translations à gauche par B et H_1 son algèbre d'endomorphismes. Nous cherchons des critères de platitude de C et C_1 comme modules sur H et H_1 en fonction du cardinal q de k. Nos résultats sont rassemblés dans le théorème suivant (proposition 5.16).

Théorème B. (1) *Pour* $n = 2$, *le* H_1*-module* C_1 *est plat.*

(2) *Pour* $n = 2$, *le* H*-module* C *est plat si et seulement si* $q = p$.

(3) *Pour* $n = 3$, *le* H_1*-module* C_1 *est plat si et seulement si* $q = p$.

(4) *Pour* $n = 3$, *le* H*-module* C *est plat si et seulement si* $q = 2$.

(5) *Pour* $n \geqslant 4$ *et* $q \neq p$, *le* H_1*-module* C_1 *n'est pas plat.*

(6) *Pour* $n \geqslant 4$ *et* $q \neq 2$, *le* H*-module* C *n'est pas plat.*

4. Ce travail est motivé par l'étude des représentations mod p des groupes réductifs p-adiques. Plus précisément, F étant un corps localement compact non archimédien de corps résiduel k, il sert de point de départ à l'étude dans [22] des représentations modulo p de $\mathrm{GL}_3(\mathrm{F})$ dans l'esprit de [19, 20] qui traitait du cas de $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F})$. Nous montrons dans [22] comment on peut, *via* la résolution des modules universels p-adiques établie dans [25] par le biais de systèmes de cœfficients sur l'immeuble de Bruhat-Tits, transférer à $\mathrm{GL}_3(\mathrm{F})$ les résultats de platitude (ou de non-platitude) du présent article pour $\mathrm{GL}_3(k)$.

5. Les sections 2 et 4 sont écrites pour un groupe réductif fini G quelconque. Le résultat principal de la section 2 est la proposition 2.13 qui implique le Théorème A de cette introduction. Dans la section 4, on introduit les foncteurs d'induction et de restriction relativement à un sous-groupe parabolique de G et on étudie la compatibilité entre ces foncteurs et le foncteur (1.1). Une conséquence est la proposition 4.13, qui donne une condition nécessaire de platitude pour C en termes de platitude pour les modules universels relatifs aux sous-groupes de Levi standards de G.

6. Le cas de $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(k)$ avec $n = 2, 3$ est traité dans les sections 3 et 5 respectivement, en calculant explicitement les suites de composition des séries principales de G, en s'appuyant sur des résultats de [8, 19] et [10, 11]. Le cas où $n \geqslant 4$ s'en déduit en appliquant les résultats de la section 4 sur l'induction parabolique (corollaire 4.14).

Remerciements

Nous remercions Shaun Stevens, Marc Cabanes et Florian Herzig pour de fructueuses discussions à propos de ce travail.

Le premier auteur remercie le Laboratoire de Mathématiques de Versailles qui lui a fourni un cadre de travail chaleureux et dynamisant durant la gestation de cet article.

Le second auteur remercie l'Institut de Mathématiques de Luminy et l'Université de la Méditerranée Aix-Marseille 2 (désormais Aix-Marseille Université) où la majeure partie de ce travail a été réalisée.

Notations et conventions

Fixons un nombre premier p, un corps fini k de caractéristique p et une clôture algébrique $\overline{\mathbf{F}}_p$ de k. Si $\mathbf{H}$ est un $\overline{\mathbf{F}}_p$-groupe algébrique linéaire défini sur k, on notera $\mathbf{H}(k)$ le groupe de ses points k-rationnels.

Par représentation d'un groupe fini, on entendra représentation $\overline{\mathbf{F}}_p$-linéaire de dimension finie.

2. Catégories de représentations de G et algèbres de Hecke

2.1. **Le groupe réductif fini** G**.** Soit $\mathbf{G}$ un $\overline{\mathbf{F}}_p$-groupe réductif connexe défini sur k. Fixons un tore k-déployé maximal $\mathbf{S}$ de $\mathbf{G}$. Soient $\mathbf{T}$ le centralisateur de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{G}$ et $\mathbf{N}$ son normalisateur dans $\mathbf{G}$. Fixons un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$ et notons $\mathbf{U}$ son radical unipotent. Notons G le groupe $\mathbf{G}(k)$ des points k-rationnels de $\mathbf{G}$, ainsi que $\mathrm{B} = \mathbf{B}(k)$, $\mathrm{T} = \mathbf{T}(k)$ et $\mathrm{U} = \mathbf{U}(k)$.

Soit Φ l'ensemble des racines de $\mathbf{G}$ relatives à $\mathbf{S}$ et soit $\mathrm{W} = \mathbf{N}/\mathbf{T} \simeq \mathbf{N}(k)/\mathbf{T}(k)$. Le choix de $\mathbf{B}$ détermine un ensemble $\Delta \subseteq \Phi$ de racines simples et un ensemble $\mathcal{S}$ de réflexions engendrant W.

D'après [13, Lemma 5.2], le quadruplet $(\mathrm{G}, \mathrm{B}, \mathbf{N}(k), \mathcal{S})$ est une BN-paire fortement déployée de caractéristique p, c'est-à-dire qu'on a les propriétés suivantes (voir [6, Definition 2.20]) :

(1) on a $\mathrm{B}^{w_0} \cap \mathrm{B} = \mathrm{T}$, où w_0 est l'élément de plus grande longueur de W ;

(2) on a $\mathrm{B} = \mathrm{TU}$, U est un p-sous-groupe de Sylow de B et T est commutatif, d'ordre premier à p et normalise U ;

(3) pour toute partie J de $\mathcal{S}$, l'intersection $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}^{w_\mathrm{J}}$ est un sous-groupe distingué de U, où w_J est l'élément de plus grande longueur du sous-groupe de Weyl W_J de W engendré par J.

Ainsi on peut appliquer les résultats de [6]. Nous appliquerons aussi occasionnellement les résultats de [8], valables pour des BN-paires déployées de caractéristique p.

Notons ℓ la longueur associée au système de Coxeter $(\mathrm{W}, \mathcal{S})$, qu'on relève à $\mathbf{N}(k)$ par inflation. D'après [6, Proposition 6.6], le groupe G est l'union disjointe des doubles classes $\mathrm{U}n\mathrm{U}$, $n \in \mathbf{N}(k)$, et on a $\mathrm{U}n\mathrm{U}n'\mathrm{U} = \mathrm{U}nn'\mathrm{U}$ si et seulement si $\ell(n) + \ell(n') = \ell(nn')$ pour tous $n, n' \in \mathbf{N}(k)$.

Exemple 2.1. Pour $n \geqslant 1$, soit $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbf{F}}_p)$. Notons $\mathbf{S}$ le sous-groupe des matrices diagonales. On a $\mathbf{T} = \mathbf{S}$, et W s'identifie au groupe symétrique S_n. Soit $\mathbf{B}$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. On a un décomposition $\mathbf{B} = \mathbf{TU}$, où $\mathbf{U}$ est formé des matrices triangulaires unipotentes supérieures. On a $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(k)$, le groupe $\mathbf{N}(k)$ est le produit semi-direct de T et du groupe des matrices de permutation de G, et $\mathcal{S}$ est formé des éléments correspondant aux transpositions $i \leftrightarrow i+1$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

2.2. **Catégories de représentations.** On note $\mathscr{R} = \mathscr{R}(\mathrm{G})$ la catégorie des représentations de G (sur des $\overline{\mathbf{F}}_p$-espaces vectoriels de dimension finie) et $\mathscr{E}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}$ constitué des représentations engendrées par leurs vecteurs U-invariants.

Le résultat classique suivant est essentiel dans l'étude de la catégorie $\mathscr{R}$. Si V est une représentation de G, on note V^{U} l'espace de ses vecteurs U-invariants.

Lemme 2.2 ([26], proposition 26)**.** *Pour toute représentation* V *dans* $\mathscr{R}$, *on a* $\mathrm{V} = 0$ *si et seulement si* $\mathrm{V}^{\mathrm{U}} = 0$.

Soit C la représentation de G induite à partir du caractère trivial de U. C'est l'espace des fonctions de G dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ invariantes par translations à gauche par U, muni de l'action de G par translations à droite. Elle est engendrée par la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\mathrm{U}}$ de $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{G}$, qui est U-invariante. (Plus généralement, étant donnée une partie X de G, on notera $\mathbf{1}_{\mathrm{X}}$ sa fonction caractéristique.)

Si V est une représentation de G et si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{V})$, le vecteur $f(\mathbf{1}_{\mathrm{U}})$ est invariant par U. En outre, l'application $f \mapsto f(\mathbf{1}_{\mathrm{U}})$ est un isomorphisme de $\overline{\mathbf{F}}_p$-espaces vectoriels de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{V})$ dans V^{U} (réciprocité de Frobenius).

Lemme 2.3. *Une représentation de* G *appartient à* $\mathscr{E}$ *si et seulement s'il existe un entier* $b \geqslant 1$ *tel qu'elle soit isomorphe à un quotient de* C^b.

Démonstration. Soit V une représentation de G, et soit $b \geqslant 1$ un entier. Par réciprocité de Frobenius, on a un isomorphisme de $\overline{\mathbf{F}}_p$-espaces vectoriels :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}^b, \mathrm{V}) \to (\mathrm{V}^{\mathrm{U}})^b$$

associant à tout homomorphisme de C^b dans V une famille de b vecteurs de V invariants par U. Un tel homomorphisme est surjectif si et seulement si la famille qui lui correspond engendre V comme représentation de G. $\square$

Remarque 2.4. La sous-catégorie $\mathscr{E}$ est stable par quotients dans $\mathscr{R}$ (compte tenu du lemme 2.3, tout quotient d'un quotient de C^b, $b \geqslant 1$, est un quotient de C^b) mais pas toujours par sous-objets dans $\mathscr{R}$, c'est-à-dire qu'une sous-représentation dans $\mathscr{R}$ d'un objet de $\mathscr{E}$ n'appartient pas toujours à $\mathscr{E}$ (voir la section 3).

Étant donnée une représentation V de G, on note $\mathrm{V}^\vee$ sa représentation contragrédiente. Le foncteur $\mathrm{V} \mapsto \mathrm{V}^\vee$ est exact de $\mathscr{R}$ dans $\mathscr{R}$.

Lemme 2.5. *La représentation* C *est isomorphe à sa contragrédiente.*

Démonstration. Si l'on identifie C à l'espace des fonctions de $\mathrm{U}\backslash\mathrm{G}$ dans $\overline{\mathbf{F}}_p$, l'espace dual est engendré par les fonctions d'évaluation $\mathrm{ev}(x) : f \mapsto f(x)$, pour $x \in \mathrm{U}\backslash\mathrm{G}$. On vérifie que :

$$g \cdot \mathrm{ev}(x) = \mathrm{ev}(xg^{-1}),$$

pour tout $g \in \mathrm{G}$, de sorte que l'homomorphisme $\overline{\mathbf{F}}_p$-linéaire $\mathbf{1}_x \mapsto \mathrm{ev}(x)$, associant à la fonction caractéristique $\mathbf{1}_x$ de la classe $x \in \mathrm{U}\backslash\mathrm{G}$ sa fonction d'évaluation, est un isomorphisme de représentations de G. $\square$

On vérifie au moyen des lemmes 2.3 et 2.5 qu'une représentation de $\mathscr{R}$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement s'il existe un entier $b \geqslant 1$ tel que sa représentation contragrédiente est isomorphe à une sous-représentation de C^b.

Définition 2.6. On note $\mathscr{B}$ la plus grande sous-catégorie pleine de $\mathscr{E}$ qui soit stable par le foncteur $\mathrm{V} \mapsto \mathrm{V}^\vee$.

D'après ce qui précède, $\mathscr{B}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}$ constituée des représentations qui sont à la fois quotients et sous-représentations de C^b pour un entier $b \geqslant 1$ assez grand, ou encore, si l'on préfère, des représentations images d'un élément de $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}^b)$ pour un entier $b \geqslant 1$.

La dualité $\mathrm{V} \mapsto \mathrm{V}^{\vee}$ préservant l'irréductibilité, et toute représentation irréductible de G étant engendrée par ses vecteurs U-invariants (voir le lemme 2.2), toute représentation irréductible de G est dans $\mathscr{B}$.

2.3. **L'algèbre de Hecke du sous-groupe unipotent U.** Soit H la $\overline{\mathbf{F}}_p$-algèbre des G-endomorphismes de C. Par réciprocité de Frobenius, elle s'identifie à l'espace C^{U} des fonctions de G dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ qui sont invariantes par U par translations à droite et à gauche, muni du produit :

$$f * f' : g \mapsto \sum_{x \in \mathrm{U}\backslash \mathrm{G}} f(gx^{-1})f'(x)$$

pour $f, f' \in \mathrm{H}$ et $g \in \mathrm{G}$, où x décrit un système quelconque de représentants de $\mathrm{U}\backslash\mathrm{G}$ dans G. L'unité de H est la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\mathrm{U}}$. D'après le paragraphe 2.1, les fonctions :

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{1}_{\mathrm{U}n\mathrm{U}}, \quad n \in \mathbf{N}(k),$$

forment une base de H comme $\overline{\mathbf{F}}_p$-espace vectoriel, et on a :

$$\boldsymbol{\tau}_n\boldsymbol{\tau}_{n'} = \boldsymbol{\tau}_{nn'} \quad \Leftrightarrow \quad \ell(n) + \ell(n') = \ell(nn') \tag{2.1}$$

pour tous $n, n' \in \mathbf{N}(k)$.

Selon [24, Theorem 2.4] (voir aussi [6, Proposition 6.11]), l'algèbre H est une algèbre de Frobenius, c'est-à-dire qu'il existe une forme linéaire de H dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ dont le noyau, pour tout $f \in \mathrm{H}$ non nulle, ne contient ni $f\mathrm{H}$ ni $\mathrm{H}f$. Elle est donc auto-injective et a les propriétés suivantes.

Lemme 2.7. *Soit $\mathfrak{m}$ un H-module (à droite ou à gauche) de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathfrak{m}$ *est plat.*

(2) $\mathfrak{m}$ *est projectif.*

(3) $\mathfrak{m}$ *est injectif.*

Démonstration. De façon générale, tout module projectif est plat. L'implication réciproque provient de [17, Theorem 4.38] et du fait que H est un anneau noethérien. Enfin l'équivalence entre 2 et 3 est donnée par [1, Proposition 1.6.2]. □

Corollaire 2.8. *Soit $\mathfrak{m}$ un H-module (à droite ou à gauche) et soit $\mathfrak{n}$ un sous-module projectif de type fini de $\mathfrak{m}$. Alors $\mathfrak{n}$ est un facteur direct de $\mathfrak{m}$.*

Signalons que, si K est un sous-groupe de G, alors C^{K} est un sous-H-module à gauche de C.

Corollaire 2.9. *Soit U' un sous-groupe de U. Alors le H-module à gauche $\mathrm{C}^{\mathrm{U}} \simeq \mathrm{H}$ est un facteur direct de $\mathrm{C}^{\mathrm{U}'}$. En particulier, c'est un facteur direct de C.*

On note $\mathscr{M}$ la catégorie des modules à droite de type fini sur H. On considère le foncteur :

$$\mathsf{F} : \mathrm{V} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{V})$$

de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{M}$, admettant un adjoint à gauche :

$$\mathsf{T} : \mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}} \mathrm{C},$$

où C est considéré à la fois comme un H-module à gauche et une représentation de G.

Lemme 2.10. *Le foncteur* $\mathbf{F} : \mathscr{E} \to \mathscr{M}$ *est fidèle.*

Remarque 2.11. Soit V une représentation de G. Par adjonction, il correspond à l'identité de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V}^{\mathrm{U}}, \mathrm{V}^{\mathrm{U}})$ un homomorphisme $\mathrm{V}^{\mathrm{U}} \otimes_{\mathrm{H}} \mathrm{C} \to \mathrm{V}$ de représentations de G, dont l'image est la sous-représentation de V engendrée par V^{U}.

Le théorème suivant est dû à Cabanes ([5, Theorem 2], voir aussi [6, Theorem 1.25]).

Theorem 2.12 (Cabanes)**.** *Le foncteur* $\mathbf{F}$ *induit une équivalence de catégories entre* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{M}$*.*

Plus précisément, on a la propriété suivante (voir [6, Lemma 1.26]).

Fait 2.1. *Pour tout* H*-module à droite de type fini* $\mathfrak{m}$*, il existe un homomorphisme injectif de* $\mathfrak{m}$ *dans* H^d*, pour un entier* $d \geqslant 1$ *convenable.*

Étant donné un H-module à droite de type fini $\mathfrak{m}$, on choisit un entier $d \geqslant 1$ et un homomorphisme injectif ι de $\mathfrak{m}$ dans H^d. Ceci permet d'identifier $\mathfrak{m}$ à un sous-espace de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{C}^d)$, et de former l'image de l'application naturelle :

$$\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}} \mathrm{C} \to \mathrm{H}^d \otimes_{\mathrm{H}} \mathrm{C} \simeq \mathrm{C}^d,$$

qu'on note $\mathrm{V} = \mathrm{V}(\mathfrak{m}, \iota)$. On a le résultat suivant (voir [6, Lemma 1.27]).

Fait 2.2. *La représentation* V *est dans la catégorie* $\mathscr{B}$*, sa classe d'isomorphisme ne dépend pas de* d *et* ι *et le* H*-module à droite* $\mathbf{F}(\mathrm{V})$ *est isomorphe à* $\mathfrak{m}$*.*

2.4. **Critères de platitude.** Le foncteur $\mathbf{F}$ est fidèle et essentiellement surjectif de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{M}$ (voir le lemme 2.10 pour la première assertion, la seconde découlant par exemple du théorème 2.12). Nous établissons des conditions pour qu'il soit plein.

Rappelons (voir [28, A.3]) que la représentation C est quasi-projective si, pour toute représentation V de G et tout morphisme surjectif $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{V})$, le morphisme $\mathbf{F}(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}, \mathrm{V}^{\mathrm{U}})$ obtenu par restriction est surjectif.

Proposition 2.13. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Le foncteur* $\mathbf{F} : \mathscr{E} \to \mathscr{M}$ *est plein.*
(2) *Le foncteur* $\mathbf{T} : \mathscr{M} \to \mathscr{E}$ *est exact.*
(3) *Les catégories* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{B}$ *coïncident.*
(4) *Le* H*-module à gauche* C *est plat.*
(5) *Le* H*-module à gauche* C *est projectif.*
(6) *Le foncteur* $\mathbf{F}$ *est une équivalence de catégories de* $\mathscr{E}$ *dans* $\mathscr{M}$ *et* $\mathbf{T}$ *en est un quasi-inverse.*
(7) *La représentation* C *est quasi-projective de type fini.*
(8) *La sous-catégorie* $\mathscr{E}$ *est stable par sous-objets dans* $\mathscr{R}$*.*

Démonstration. ($3 \Rightarrow 1, 2, 8$) On suppose que les catégories $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ coïncident. Alors $\mathbf{F}$ induit une équivalence de catégories de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{M}$. Ainsi son adjoint $\mathbf{T}$ est exact et $\mathbf{F}$ est plein. En outre $\mathscr{E}$ est stable par sous-objets dans $\mathscr{R}$ puisque c'est le cas de $\mathscr{B}$.

($1 \Rightarrow 3$) On suppose que $\mathbf{F}$ est plein. Si V est dans $\mathscr{E}$, alors il existe un morphisme injectif de H-modules de $\mathbf{F}(\mathrm{V})$ dans H^d pour un entier $d \geqslant 1$ (voir le fait 2.1). Il est de la forme $\mathbf{F}(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{C}^d)$, et il reste à voir que φ est injectif. Par hypothèse, la restriction $\mathbf{F}(\varphi)$ de φ à V^{U} est injective, de sorte que l'espace des vecteurs U-invariants du noyau de φ dans $\mathscr{R}$ est trivial. On en déduit que ce noyau est trivial (voir le lemme 2.2), c'est-à-dire que φ est injective, donc que V est dans $\mathscr{B}$.

(2 ⇒ 3) On suppose que $\mathbf{T}$ est exact. D'après le fait 2.1, pour tout H-module à droite de type fini $\mathfrak{m}$, on a un homomorphisme injectif de $\mathfrak{m}$ dans H^d pour un entier $d \geqslant 1$. En appliquant $\mathbf{T}$, on obtient un homomorphisme injectif de représentations de G de $\mathbf{T}(\mathfrak{m})$ dans C^d, ce qui prouve que $\mathbf{T}$ est à valeurs dans $\mathscr{B}$. Il s'agit donc de l'adjoint de la restriction de $\mathbf{F}$ à $\mathscr{B}$, qui est une équivalence de catégories d'après le théorème 2.12. Étant donné V dans $\mathscr{E}$, on a une suite exacte dans $\mathscr{R}$:

$$0 \to \mathrm{Q} \to \mathbf{T}\,\mathbf{F}(\mathrm{V}) = \mathrm{V}^{\mathrm{U}} \otimes_{\mathrm{H}} \mathrm{C} \to \mathrm{V} \to 0 \tag{2.2}$$

où Q désigne le noyau de la projection canonique de $\mathbf{T}\,\mathbf{F}(\mathrm{V})$ sur V. Puisque $\mathbf{T}$ est à valeurs dans $\mathscr{B}$, le foncteur $\mathbf{F}\,\mathbf{T}$ est isomorphe au foncteur identité de $\mathscr{M}$, de sorte que, en appliquant $\mathbf{F}$ à (2.2), on obtient la suite exacte de H-modules :

$$0 \to \mathbf{F}(\mathrm{Q}) \to \mathbf{F}(\mathrm{V}) \to \mathbf{F}(\mathrm{V})$$

où l'homomorphisme de droite est l'identité. On en déduit que $\mathbf{F}(\mathrm{Q})$, donc Q, est trivial. Ainsi $\mathbf{T}\,\mathbf{F}(\mathrm{V})$ est canoniquement isomorphe à V, donc V est dans $\mathscr{B}$.

(2 ⇔ 4) Si C est plat comme H-module, alors le foncteur $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}} \mathrm{C}$ de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{R}$ est exact, donc $\mathbf{T}$ est exact. Inversement, si $\mathfrak{n}$ est un H-module à droite et $\mathfrak{m}$ un sous-module de $\mathfrak{n}$, on a un homomorphisme :

$$\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}} \mathrm{C} \to \mathfrak{n} \otimes_{\mathrm{H}} \mathrm{C} \tag{2.3}$$

dans $\mathscr{R}$. Si $\mathbf{T}$ est exact, alors le noyau de (2.3) dans $\mathscr{E}$ est trivial, ce qui équivaut à dire que son noyau dans $\mathscr{R}$ est trivial. Le foncteur $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}} \mathrm{C}$ de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{R}$ est donc exact, c'est-à-dire que C est plat comme H-module à gauche.

(4 ⇔ 5) C'est une conséquence du lemme 2.7.

(1 ⇔ 7) D'après le lemme 2.2, la représentation C est sans C-torsion dans la terminologie de [28], c'est-à-dire que, pour toute sous-représentation non nulle V de C, le H-module $\mathbf{F}(\mathrm{V})$ est non nul. On déduit alors du théorème 9 de l'appendice de [28] que 1 et 7 sont équivalentes.

(8 ⇒ 1) Si $\mathscr{E}$ est stable par sous-objets dans $\mathscr{R}$, la proposition 2 et le théorème 4 de l'appendice de [28] impliquent la condition 1. □

Dès que le H-module C n'est pas plat, il y a donc des représentations dans $\mathscr{E}$ qui ne sont pas dans $\mathscr{B}$. On en donne un exemple à la proposition 3.3.

2.5. **Décomposition de C et de H.** Notons $\hat{\mathrm{T}}$ le groupe des $\overline{\mathbf{F}}_p$-caractères du groupe abélien T. Par transitivité de l'induction, la représentation C de G se décompose sous la forme :

$$\mathrm{C} = \bigoplus_{\chi \in \hat{\mathrm{T}}} \mathrm{C}_\chi \tag{2.4}$$

où C_χ désigne la représentation de G induite à partir du caractère de B obtenu en composant χ avec la surjection canonique de B sur T. (Il s'agit de la représentation de G par translations à droite sur l'espace des fonctions f de G dans R qui vérifient $f(tug) = \chi(t)f(g)$ pour tous $t \in \mathrm{T}$, $u \in \mathrm{U}$, $g \in \mathrm{G}$.)

Pour $\chi \in \hat{\mathrm{T}}$, posons :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\chi = |\mathrm{T}|^{-1} \cdot \sum_{t \in \mathrm{T}} \chi(t) \boldsymbol{\tau}_t \in \mathrm{H} \tag{2.5}$$

qui est la projection de C sur C_χ relativement à (2.4). Pour tout $t \in \mathrm{T}$, on a $\boldsymbol{\varepsilon}_\chi \boldsymbol{\tau}_t = \chi(t)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_\chi$.

Pour $w \in \mathrm{W}$ et $\chi \in \hat{\mathrm{T}}$, le caractère $\chi^w : t \mapsto \chi(ntn^{-1})$ ne dépend pas du choix du représentant n de w dans $\mathbf{N}(k)$. Ceci définit une action de W sur $\hat{\mathrm{T}}$. Pour $\chi \in \hat{\mathrm{T}}$ et $s \in \mathcal{S}$, on a $\boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\varepsilon}_\chi = \boldsymbol{\varepsilon}_{\chi^s} \boldsymbol{\tau}_s$ et, d'après [8, Theorem 4.4], on a :

$$(\boldsymbol{\tau}_s)^2 \boldsymbol{\varepsilon}_\chi = \begin{cases} -\boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\varepsilon}_\chi & \text{si } \chi^s = \chi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Les $\boldsymbol{\tau}_s$ et les $\boldsymbol{\varepsilon}_\chi$ pour $s \in \mathcal{S}$ et $\chi \in \hat{\mathrm{T}}$ forment un système générateur de l'algèbre H.

Soit Γ l'ensemble des orbites de $\hat{\mathrm{T}}$ sous W. Pour toute orbite $\gamma \in \Gamma$, notons $\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma$ la somme des $\boldsymbol{\varepsilon}_\chi$ pour $\chi \in \gamma$. Pour $\chi, \chi' \in \hat{\mathrm{T}}$, l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}_\chi, \mathrm{C}_{\chi'})$ est non nul si et seulement si χ, χ' sont dans la même orbite sous W. Ainsi les $\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$ forment une famille d'idempotents centraux orthogonaux de H qui décomposent l'unité $\mathbf{1}_{\mathrm{U}} \in \mathrm{H}$.

Posons $\mathrm{H}_\gamma = \mathrm{H}\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma$ et notons C_γ la somme directe des C_χ pour $\chi \in \gamma$, qui est un H_γ-module à gauche. L'algèbre de Hecke H se décompose en la somme directe de $\overline{\mathbf{F}}_p$-algèbres H_γ pour $\gamma \in \Gamma$.

Proposition 2.14. *Le* H*-module* C *est plat si et seulement si le* H_γ*-module* C_γ *est plat pour toute orbite* $\gamma \in \Gamma$.

Démonstration. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, le module C_γ est plat sur H_γ si et seulement s'il est plat sur H. Le module C étant la somme directe des C_γ, $\gamma \in \Gamma$, il est plat sur H si et seulement si chaque C_γ est plat sur H, ce qui implique le résultat. ☐

On a le résultat suivant.

Proposition 2.15 (Carter-Lusztig [8])**.** *Soit* V *une représentation irréductible de* G.

(1) *Il existe un unique caractère* χ *de* T *tel que* V *soit isomorphe à un quotient de* C_χ.

(2) *L'espace des vecteurs* U*-invariants de* V *est de dimension* 1 *et la représentation de* T *sur* V^{U} *est égale à* χ.

2.6. **Représentations ayant des vecteurs invariants par le sous-groupe de Borel.** Notons 1 le caractère trivial de T. Son orbite sous W est réduite à $\{1\}$, et H_1 est isomorphe à l'algèbre des fonctions de G dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ invariantes par translations à droite et à gauche par B, muni du produit :

$$f * f' : g \mapsto \sum_{\mathrm{B}\backslash\mathrm{G}} f(gx^{-1}) f'(x)$$

pour $f, f' \in \mathrm{H}_1$, $g \in \mathrm{G}$, où x décrit un système (quelconque) de représentants de $\mathrm{B}\backslash\mathrm{G}$ dans G. L'unité de H_1 est $\mathbf{1}_{\mathrm{B}}$. C'est une algèbre de Frobenius : on a donc un résultat analogue au lemme 2.7 pour les H_1-modules.

On note $\mathscr{M}_1$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{M}$ formée des H-modules à droite de type fini $\mathfrak{m}$ tels que $\mathfrak{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathfrak{m}$. Elle s'identifie naturellement à la catégorie $\mathscr{M}(\mathrm{H}_1)$ des H_1-modules à droite de type fini. D'après la formule (2.5), si V est une représentation de G, alors V^{U} est dans $\mathscr{M}_1$ si et seulement si $\mathrm{V}^{\mathrm{U}} = \mathrm{V}^{\mathrm{B}}$.

Proposition 2.16. *Soit* V *dans* $\mathscr{B}$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *on a* $\mathrm{V}^{\mathrm{U}} = \mathrm{V}^{\mathrm{B}}$ *;*

(2) *il existe* $b \geqslant 1$ *tel que* V *soit isomorphe à l'image d'un endomorphisme de* C_1^b.

Démonstration. Si V satisfait à la condition 2, elle est isomorphe à une sous-représentation de C_1^b pour un entier $b \geqslant 1$. La propriété $V^U = V^B$ suit alors de ce que $C_1^U = C_1^B$.

Si V satisfait à la condition 1, alors le module $\mathfrak{m} = V^U$ est dans $\mathscr{M}_1$. D'après le fait 2.2, si ι est un homomorphisme injectif de H-modules de $\mathfrak{m}$ dans H^d pour un entier $d \geqslant 1$ convenable, l'image de l'application naturelle de $\mathfrak{m} \otimes_H C$ dans C^d est isomorphe à V. Puisque $\mathfrak{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathfrak{m}$, la représentation $\mathfrak{m} \otimes_H C$ s'identifie à $\mathfrak{m} \otimes_{H_1} C_1$, et son image dans C^d est incluse dans C_1^d, ce qui prouve que V satisfait à la condition 2. □

Notons $\mathscr{E}_1$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}$ formée des représentations engendrées par leurs vecteurs B-invariants et $\mathscr{B}_1$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{B}$ formée des représentations V telles que $V^U = V^B$.

Proposition 2.17. *On suppose que* C_1 *est un* H_1*-module plat. Alors :*

(1) *les catégories* $\mathscr{B}_1$ *et* $\mathscr{E}_1$ *coïncident ;*

(2) *le foncteur* F *induit une équivalence entre* $\mathscr{E}_1$ *et* $\mathscr{M}_1$.

Démonstration. D'après le théorème 2.12 et la proposition 2.16, F induit une équivalence de catégories entre $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{M}_1$, et la seconde assertion découle de la première.

Soit V une représentation engendrée par l'espace $\mathfrak{m}$ de ses vecteurs B-invariants. Soit ι un morphisme injectif de H-modules de $\mathfrak{m}$ dans H^d pour $d \geqslant 1$ (voir le fait 2.1). Rappelons (fait 2.2) que V est isomorphe à l'image de l'application naturelle de $\mathfrak{m} \otimes_H C$ dans C^d. Puisque $\mathfrak{m}$ est dans $\mathscr{M}_1$, celle-ci s'identifie à l'image de l'application de $\mathfrak{m} \otimes_{H_1} C_1$ dans C_1^d. Puisque C_1 est plat sur H_1, cette dernière application est injective, c'est-à-dire que la représentation V est isomorphe à $\mathfrak{m} \otimes_{H_1} C_1$, ainsi qu'à une sous-représentation de C_1^d. Elle est donc dans $\mathscr{B}_1$. □

3. Le cas de $GL_2(k)$

Dans cette section, on suppose que $\mathbf{G} = GL_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$, donc $G = GL_2(k)$. Pour $\chi \in \hat{T}$, les facteurs irréductibles de C_χ sont tous de multiplicité 1. Ils sont décrits par Diamond dans [9, Proposition 1.1] (voir aussi Jeyakumar [15]). Notons s l'élément non trivial de W et q le cardinal de k. Une orbite $\gamma = \{\chi, \chi^s\} \in \Gamma$ est dite *régulière* si $\chi \neq \chi^s$. La structure de H_γ est déterminée dans [8, §4] par exemple.

Si l'orbite γ est régulière, alors l'algèbre H_γ est engendrée par $Y = \boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma$ et $X = \boldsymbol{\varepsilon}_\chi$, avec les relations $Y^2 = 0$ et $YX + XY = Y$.

Sinon, la torsion par χ permet de se ramener au cas où $\gamma = \{1\}$, et l'algèbre H_1 est engendrée par $S = \boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\varepsilon}_1$ avec la relation $S^2 + S = 0$.

Proposition 3.1. *Le* H_1*-module à gauche* C_1 *est plat.*

Démonstration. En tant que H_1-module à gauche, H_1 est la somme directe des modules projectifs indécomposables $H_1 S = H_1 \boldsymbol{\tau}_s$ et $H_1(S + \boldsymbol{\varepsilon}_1)$. Une base de C_1 comme $\overline{\mathbf{F}}_p$-espace vectoriel est $\{e_a, a \in k \cup \{\infty\}\}$, où e_∞ est la fonction caractéristique de B et e_a, pour $a \in k$, celle de :

$$Bs \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'image de e_a par $\boldsymbol{\tau}_s$ est la somme des e_b pour les $b \in k \cup \{\infty\}$ tels que $b \neq a$ (voir par exemple [19, 2.2.1]). On en déduit que l'application de $H_1 \oplus (H_1 S)^{q-1}$ dans C_1 définie par :

$$(h, (h_a)_{a \in k^\times}) \mapsto h e_\infty + \sum_{a \in k^\times} h_a e_a$$

est un isomorphisme de H_1-modules à gauche. On a prouvé que C_1 est un H_1-module projectif, donc plat. $\square$

Proposition 3.2. *Le* H*-module à gauche* C *est plat si et seulement si* $q = p$.

Démonstration. D'après la proposition 2.14, l'étude de la platitude du H-module à gauche C se ramène à celle des H_γ-modules à gauche C_γ. Si l'orbite $\gamma = \{\chi, \chi^s\}$ n'est pas régulière, on se ramène en tordant par χ au cas où $\gamma = \{1\}$, et la proposition 3.1 implique que C_γ est plat. On suppose maintenant que γ est régulière. En tant que H_γ-module à droite, H_γ est la somme directe des modules $\boldsymbol{\varepsilon}_\chi \mathrm{H}_\gamma$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{\chi^s} \mathrm{H}_\gamma$ et on a la suite exacte de H_γ-modules à droite :

$$0 \to \boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\varepsilon}_{\chi^s} \mathrm{H}_\gamma \to \boldsymbol{\varepsilon}_\chi \mathrm{H}_\gamma \to \boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\varepsilon}_\chi \mathrm{H}_\gamma \to 0. \tag{3.1}$$

D'après [8, Théorème 7.1], les représentations $\boldsymbol{\tau}_s \mathrm{C}_\chi$ et $\boldsymbol{\tau}_s \mathrm{C}_{\chi^s}$ sont irréductibles. Le calcul de leurs dimensions se trouve par exemple dans [23], dont le lemme 4.9 assure de plus que la somme de ces dimensions est égale à celle de C_χ si et seulement si $q = p$. Par conséquent, la suite :

$$0 \to \boldsymbol{\tau}_s \mathrm{C}_{\chi^s} \to \mathrm{C}_\chi \to \boldsymbol{\tau}_s \mathrm{C}_\chi \to 0 \tag{3.2}$$

de représentations de G est exacte si et seulement si $q = p$. Si q est différent de p, cela signifie que l'exactitude de (3.1) n'est pas préservée par le produit tensoriel par le H_γ-module à gauche C_γ, qui n'est donc pas plat.

Supposons maintenant que q soit égal à p. Pour montrer que C_γ est plat, il suffit de montrer que, pour tout idéal à droite $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{H}_\gamma$, l'homomorphisme naturel de $\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{H}_\gamma} \mathrm{C}_\gamma$ dans C_γ est injectif (voir [2], chapitre 1, §2, n°3, proposition 1). D'après (3.1), il suffit de le montrer pour les idéaux $\boldsymbol{\varepsilon}_\chi \mathrm{H}_\gamma$ et $\boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\varepsilon}_\chi \mathrm{H}_\gamma$ et leurs analogues obtenus en substituant χ^s à χ. Puisque $\boldsymbol{\varepsilon}_\chi$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{\chi^s}$ sont des idempotents orthogonaux, la seule vérification non triviale concerne $\boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\varepsilon}_\chi \mathrm{H}_\gamma$ et elle est assurée par l'exactitude de (3.2). $\square$

Dans le cas où $q \neq p$, on construit une représentation qui est dans $\mathscr{E}$ sans être dans $\mathscr{B}$ (voir la proposition 2.13).

Proposition 3.3. *Soit* χ *un caractère de* T *d'orbite régulière, et soit* K *le noyau dans* $\mathscr{R}$ *de* $\boldsymbol{\tau}_s : \mathrm{C}_{\chi^s} \to \mathrm{C}_\chi$. *On suppose que* $q \neq p$. *Alors* $\mathrm{K}^\vee$ *est dans* $\mathscr{E}$ *sans être dans* $\mathscr{B}$.

Démonstration. On a une suite exacte dans $\mathscr{R}$:

$$0 \to \mathrm{K} \to \mathrm{C}_{\chi^s} \to \boldsymbol{\tau}_s \mathrm{C}_{\chi^s} \to 0 \tag{3.3}$$

et puisque $q \neq p$, le noyau K contient strictement $\boldsymbol{\tau}_s \mathrm{C}_\chi$ d'après la preuve de la proposition 3.2. En passant aux U-invariants, on a les inclusions :

$$(\boldsymbol{\tau}_s \mathrm{C}_\chi)^{\mathrm{U}} \subseteq \mathrm{K}^{\mathrm{U}} \subseteq \mathrm{C}_{\chi^s}^{\mathrm{U}}.$$

Puisque $\boldsymbol{\tau}_s \mathrm{C}_\chi$ est irréductible, le terme de gauche est de dimension 1 (voir la proposition 2.15), et l'on vérifie que celui de droite est de dimension 2. Si l'on avait $\mathrm{K}^{\mathrm{U}} = \mathrm{C}_{\chi^s}^{\mathrm{U}}$, la sous-représentation de K engendrée par K^{U} serait égale à C_{χ^s}. On aurait $\mathrm{K} = \mathrm{C}_{\chi^s}$, ce qui contredirait le fait que la restriction de $\boldsymbol{\tau}_s$ à C_{χ^s} n'est pas nulle. Aussi K et $\boldsymbol{\tau}_s \mathrm{C}_\chi$ ont-elles le même espace de vecteurs U-invariants sans être égales, c'est-à-dire que K est une sous-représentation de C mais n'est pas engendrée par ses vecteurs U-invariants. Sa contragrédiente est donc dans $\mathscr{E}$ et pas dans $\mathscr{B}$. $\square$

4. Foncteurs paraboliques

Fixons dans cette section un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{B}$ et défini sur k. Notons $\mathbf{U_P}$ son radical unipotent et $\mathbf{M}$ son sous-groupe de Levi contenant $\mathbf{T}$.

Alors $\mathbf{M} \cap \mathbf{B}$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{M}$ contenant $\mathbf{T}$. L'ensemble des racines simples de $\mathbf{M}$ relativement à $\mathbf{M} \cap \mathbf{B}$ est une partie Δ_{M} de Δ. Notons Φ_{M} l'ensemble des racines correspondant, vu comme une partie de Φ.

Posons $\mathrm{P} = \mathbf{P}(k)$, $\mathrm{M} = \mathbf{M}(k)$ et $\mathrm{N} = \mathbf{U_P}(k)$. On a ainsi $\mathrm{P} = \mathrm{MN}$.

4.1. **Définition des foncteurs paraboliques.** Notons I_{P} le foncteur de $\mathscr{R}(\mathrm{M})$ dans $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ défini pour toute représentation V de M par :

$$\mathsf{I}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V}) = \{f : \mathrm{G} \to \mathrm{V} \mid f(mng) = m \cdot f(g),\ m \in \mathrm{M},\ n \in \mathrm{N},\ g \in \mathrm{G}\}$$

que l'on munit de l'action de G par translations à droite.

Pour $g \in \mathrm{G}$ et $v \in \mathrm{V}$, on note $[g, v]$ l'élément de $\mathsf{I}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V})$ de support $\mathrm{P}g$ et prenant en g la valeur v. On a $[g, v] = g^{-1} \cdot [1, v]$.

Le foncteur I_{P} est exact de $\mathscr{R}(\mathrm{M})$ dans $\mathscr{R}(\mathrm{G})$. Il suffit en effet de vérifier que, si $f : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ est un homomorphisme surjectif de représentations de M, alors, pour tous les $g \in \mathrm{G}$ et $v_2 \in \mathrm{V}_2$, la fonction $[g, v_2] \in \mathsf{I}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V}_2)$ se relève en $[g, v_1] \in \mathsf{I}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V}_1)$, où $v_1 \in \mathrm{V}_1$ est un relèvement de v_2.

Notons R_{P} le foncteur de $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ dans $\mathscr{R}(\mathrm{M})$ défini pour toute représentation V de G par :

$$\mathsf{R}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V}) = \mathrm{V}^{\mathrm{N}} = \{v \in \mathrm{V} \mid n \cdot v = v,\ n \in \mathrm{N}\}$$

que l'on munit de l'action de M par restriction.

Notons J_{P} le foncteur de $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ dans $\mathscr{R}(\mathrm{M})$ défini pour toute représentation V de G par :

$$\mathsf{J}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V}) = \mathrm{V}_{\mathrm{N}} = \mathrm{V}/\mathrm{V}(\mathrm{N})$$

(où V(N) désigne le sous-espace de V engendré par les vecteurs de la forme $n \cdot v - v$, pour $v \in \mathrm{V}$ et $n \in \mathrm{N}$), que l'on munit de l'action naturelle de M.

Le foncteur I_{P} est adjoint à gauche de R_{P}, et le foncteur J_{P} est adjoint à gauche de I_{P}.

4.2. **Un système de représentants minimal.** Notons C_{M} la représentation de M induite à partir du caractère trivial de $\mathrm{U} \cap \mathrm{M}$. Soit

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}} : \mathrm{C}_{\mathrm{M}} \to \mathrm{C} \tag{4.1}$$

le morphisme M-équivariant envoyant $\mathbf{1}_{\mathrm{U}\cap\mathrm{M}}$, la fonction caractéristique de $\mathrm{U} \cap \mathrm{M}$ dans M, sur $\mathbf{1}_{\mathrm{U}}$. Son image est l'espace des éléments de C dont le support est inclus dans $\mathrm{UM} = \mathrm{P}$, sur lequel N agit trivialement. Notons H_{M} l'algèbre des endomorphismes de C_{M}, qu'on identifie au sous-espace de ses vecteurs $\mathrm{U} \cap \mathrm{M}$-invariants. Notons W_{M} le sous-groupe parabolique de W correspondant à $\mathbf{P} \supseteq \mathbf{B}$.

Soit D_{M} l'ensemble des $w \in \mathrm{W}$ tels que $w(\Delta_{\mathrm{M}}) \subseteq \Phi^+$. D'après [6, Proposition 2.4] (voir aussi [7, Proposition 2.3.3]), chaque $d \in \mathrm{D}_{\mathrm{M}}$ est l'unique élément de $d\mathrm{W}_{\mathrm{M}}$ de longueur minimale et D_{M} est un système de représentants de $\mathrm{W}/\mathrm{W}_{\mathrm{M}}$ dans W. On a aussi $\mathrm{U}d\mathrm{U}w\mathrm{U} = \mathrm{U}dw\mathrm{U}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\tau}_d\boldsymbol{\tau}_w = \boldsymbol{\tau}_{dw}$, pour tous $d \in \mathrm{D}_{\mathrm{M}}$ et $w \in \mathrm{W}_{\mathrm{M}}$. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 4.1. *L'algèbre* H *est un* H_{M}*-module à droite (respectivement à gauche) libre de base* $\{\boldsymbol{\tau}_d\}_{d\in\mathrm{D}_{\mathrm{M}}}$ *(respectivement de base* $\{\boldsymbol{\tau}_{d^{-1}}\}_{d\in\mathrm{D}_{\mathrm{M}}}$*).*

Notons $\overline{\mathbf{U}}$ le sous-groupe unipotent maximal de $\mathbf{G}$ tel que $\overline{\mathbf{U}} \cap \mathbf{U} = \mathbf{T}$ et posons $\overline{\mathrm{U}} = \overline{\mathbf{U}}(k)$.

Lemme 4.2. *Pour tout* $d \in \mathrm{D}_{\mathrm{M}}$*, on a les propriétés suivantes :*

(1) $d(\mathrm{U} \cap \mathrm{M})d^{-1} \subseteq \mathrm{U}$ *et* $d(\overline{\mathrm{U}} \cap \mathrm{M})d^{-1} \subseteq \overline{\mathrm{U}}$.
(2) $d^{-1}\mathrm{U}d \cap \mathrm{P} \subseteq \mathrm{U}$.
(3) $d^{-1}\mathrm{U}d\mathrm{N} \cap \mathrm{M} = \mathrm{U} \cap \mathrm{M}$.

Démonstration. Pour tout $\alpha \in \Phi$, soit $\mathbf{U}_\alpha$ le sous-groupe radiciel associé à α. Le sous-groupe de G engendré par les $\mathbf{U}_\alpha(k)$ pour $\alpha \in \Phi^+$ est égal à U et, pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $w \in \mathrm{W}$, on a $w\mathbf{U}_\alpha w^{-1} = \mathbf{U}_{w(\alpha)}$. La propriété 1 est alors une conséquence de la caractérisation de D_M en termes de racines.

Ensuite, d'après [7, 2.5.12], tout élément $u \in \mathrm{U}$ s'écrit de façon unique sous la forme $u = xy$, avec $x \in \mathrm{U} \cap d\mathrm{U}d^{-1}$ et $y \in \mathrm{U} \cap d\overline{\mathrm{U}}d^{-1}$. Si $d^{-1}ud$ appartient à P, alors $d^{-1}yd \in \overline{\mathrm{U}} \cap \mathrm{P}$, donc $y \in \overline{\mathrm{U}}$. On en déduit que $y = 1$ et que $d^{-1}ud = d^{-1}xd \in \mathrm{U}$, ce qui prouve 2.

Soient $n \in \mathrm{N}$ et $u \in \mathrm{U}$ tels qu'on ait $d^{-1}udn \in \mathrm{M}$. D'après 2, l'élément $d^{-1}ud$ appartient à l'intersection $d^{-1}\mathrm{U}d \cap \mathrm{P} \subseteq \mathrm{U}$. On en déduit que $d^{-1}udn$ appartient à $\mathrm{U} \cap \mathrm{M}$, ce qui prouve que $d^{-1}\mathrm{U}d\mathrm{N} \cap \mathrm{M} \subseteq \mathrm{U} \cap \mathrm{M}$. L'inclusion réciproque est une conséquence de 1. □

Notons que D_M est aussi un système de représentants des doubles classes de $\mathrm{U}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{P}$.

Lemme 4.3. *L'application* $\boldsymbol{j}_\mathrm{M} : \mathrm{H}_\mathrm{M} \to \mathrm{H}$ *définie par :*

$$\boldsymbol{j}_\mathrm{M}(\mathbf{1}_{(\mathrm{U}\cap\mathrm{M})m(\mathrm{U}\cap\mathrm{M})}) = \mathbf{1}_{\mathrm{U}m\mathrm{U}}, \quad m \in \mathrm{M},$$

est un homomorphisme injectif de $\overline{\mathbf{F}}_p$*-algèbres, égal à la restriction de* $\boldsymbol{i}_\mathrm{M}$ *à* H_M*.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbf{N}(k) \cap \mathrm{M}$, la fonction caractéristique de la double classe :

$$(\mathrm{U} \cap \mathrm{M})n(\mathrm{U} \cap \mathrm{M}) = \coprod_x (\mathrm{U} \cap \mathrm{M})nx$$

où x décrit un système de représentants de classes modulo $(\mathrm{U} \cap \mathrm{M}) \cap n^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{M})n$ dans $\mathrm{U} \cap \mathrm{M}$, est envoyée par $\boldsymbol{i}_\mathrm{M}$ sur la somme des $\mathbf{1}_{\mathrm{U}nx}$. Comme $\mathrm{U}n\mathrm{U} = \mathrm{U}n\mathrm{N}(\mathrm{U} \cap \mathrm{M})$, comme N est normalisé par n et comme $nx \in \mathrm{U}n$ équivaut à $nxn^{-1} \in \mathrm{U} \cap \mathrm{M}$, la double classe $\mathrm{U}n\mathrm{U}$ est l'union disjointe des $\mathrm{U}nx$. Ainsi la restriction de $\boldsymbol{i}_\mathrm{M}$ à H_M est égale à $\boldsymbol{j}_\mathrm{M}$. Enfin, comme on a l'égalité $\mathrm{U}n\mathrm{U}n'\mathrm{U} = \mathrm{U}n(\mathrm{U}\cap\mathrm{M})n'\mathrm{U}$ pour tout $n, n' \in \mathbf{N}(k) \cap \mathrm{M}$, on vérifie que $\boldsymbol{j}_\mathrm{M}$ est un homomorphisme de $\overline{\mathbf{F}}_p$-algèbres. □

On identifiera dorénavant H_M à son image dans H.

4.3. **Calcul de** C^N**.** On considère l'homomorphisme de représentations de M :

$$\xi_\mathrm{P} : \mathrm{H} \otimes_{\mathrm{H}_\mathrm{M}} \mathrm{C}_\mathrm{M} \to \mathrm{C}^\mathrm{N}, \quad h \otimes f \mapsto h * \boldsymbol{i}_\mathrm{M}(f), \tag{4.2}$$

où $*$ désigne l'action à gauche de H sur C.

Proposition 4.4. *L'application* ξ_P *est un isomorphisme à la fois de représentations de* M *et de* H*-modules à gauche.*

Démonstration. Tout élément de C^N est combinaison linéaire de fonctions de la forme $\mathbf{1}_{\mathrm{U}g\mathrm{N}}$, où $g \in \mathrm{G}$ peut être choisi de la forme $g = dm$, avec $d \in \mathrm{D}_\mathrm{M}$ et $m \in \mathrm{M}$.

Fixons $d \in \mathrm{D}_\mathrm{M}$ et considérons l'application de M dans $\mathrm{U}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{N}$ définie par :

$$m \mapsto \mathrm{U}dm\mathrm{N} = \mathrm{U}d\mathrm{N}m.$$

Elle a pour image l'ensemble des doubles classes de $\mathrm{U}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{N}$ qui sont contenues dans $\mathrm{U}d\mathrm{P}$. D'après le lemme 4.2(1), pour tout $u \in \mathrm{U} \cap \mathrm{M}$, les éléments m et um ont la même image. Inversement, si $m, m' \in \mathrm{M}$ ont la même image par cette application, alors, comme M normalise N, on trouve

$\mathrm{U}dmm'^{-1}\mathrm{N} = \mathrm{U}d\mathrm{N}$, et donc mm'^{-1} appartient à $d^{-1}\mathrm{U}d\mathrm{N} \cap \mathrm{M}$. D'après le lemme 4.2(3), on en déduit que $(\mathrm{U} \cap \mathrm{M})m = (\mathrm{U} \cap \mathrm{M})m'$. En d'autres termes, l'application :

$$\mathbf{1}_{\mathrm{U}\cap\mathrm{M}m} \mapsto \mathbf{1}_{\mathrm{U}dm\mathrm{N}}$$

est injective et M-équivariante de C_{M} dans C, et son image est le sous-espace des fonctions de C invariantes par N et supportées dans $\mathrm{U}d\mathrm{P}$. On voit maintenant que la réciproque de ξ_{P} est donnée par :

$$\mathbf{1}_{\mathrm{U}dm\mathrm{N}} \mapsto \boldsymbol{\tau}_d \otimes \mathbf{1}_{(\mathrm{U}\cap\mathrm{M})m}. \tag{4.3}$$

Enfin, on vérifie facilement que ξ_{P} est un morphisme de représentations de M et de H-modules à gauche. ☐

Remarque 4.5. On a vu au passage (4.3) que $\boldsymbol{\tau}_d(\mathbf{1}_{\mathrm{U}m}) = \mathbf{1}_{\mathrm{U}dm\mathrm{N}}$ pour $d \in \mathrm{D}_{\mathrm{M}}$, $m \in \mathrm{M}$.

4.4. **Diagrammes commutatifs.** Puisque U se décompose sous la forme $(\mathrm{U} \cap \mathrm{M}) \cdot \mathrm{N}$, on a :

$$\mathrm{V}^{\mathrm{U}} = \mathbf{R}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V})^{\mathrm{U}\cap\mathrm{M}} \tag{4.4}$$

pour toute représentation V de G, qui est une égalité de H_{M}-modules à droite.

Proposition 4.6. *Soit $\mathfrak{m}$ un H_{M}-module à droite de type fini. Il existe un unique homomorphisme de représentations de* G *:*

$$\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}_{\mathrm{M}}} \mathrm{C} \to \mathbf{I}_{\mathrm{P}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}_{\mathrm{M}}} \mathrm{C}_{\mathrm{M}}) \tag{4.5}$$

envoyant $x \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{U}g}$ sur $[g, x \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{U}\cap\mathrm{M}}]$ pour tous $x \in \mathfrak{m}$ et $g \in \mathrm{G}$, et c'est un isomorphisme.

Démonstration. Étant donné $x \in \mathfrak{m}$, notons f_x l'unique morphisme de C dans $\mathbf{I}_{\mathrm{P}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}_{\mathrm{M}}} \mathrm{C}_{\mathrm{M}})$ envoyant $\mathbf{1}_{\mathrm{U}}$ sur $[1, x \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{U}\cap\mathrm{M}}]$ qui est bien défini puisque cette dernière est invariante par U. On vérifie que l'application $x \mapsto f_x$ est H_{M}-linéaire. Par adjonction, il lui correspond le morphisme (4.5), noté Ψ. A partir de (4.4), on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}_{\mathrm{M}}}(\mathfrak{m}, \mathrm{V}^{\mathrm{U}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{H}_{\mathrm{M}}}(\mathfrak{m}, \mathbf{R}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V})^{\mathrm{U}\cap\mathrm{M}}) \tag{4.6}$$

pour toute représentation V de G. Par une succession d'ajonctions, on en déduit que le membre de gauche de (4.6) est $\overline{\mathbf{F}}_p$-isomorphe à :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}_{\mathrm{M}}} \mathrm{H}, \mathrm{V}^{\mathrm{U}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}_{\mathrm{M}}} \mathrm{C}, \mathrm{V})$$

et le membre de droite à :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}_{\mathrm{M}}} \mathrm{C}_{\mathrm{M}}, \mathbf{R}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathbf{I}_{\mathrm{P}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}_{\mathrm{M}}} \mathrm{C}_{\mathrm{M}}), \mathrm{V})$$

pour toute représentation V de G, ce qui prouve que les deux membres de (4.5) sont isomorphes en tant que représentations de G. Il suffit donc de prouver que Ψ est surjectif. Or $\mathbf{I}_{\mathrm{P}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}_{\mathrm{M}}} \mathrm{C}_{\mathrm{M}})$ est engendrée comme représentation de G par les fonctions $[1, x \otimes \mathbf{1}_{\mathrm{U}\cap\mathrm{M}}]$, avec $x \in \mathfrak{m}$, qui sont dans l'image de Ψ par construction. ☐

Remarque 4.7. En particulier, lorsque $\mathfrak{m}$ est libre de rang 1, on obtient un isomorphisme de représentations entre C et $\mathbf{I}_{\mathrm{P}}(\mathrm{C}_{\mathrm{M}})$, qui n'est autre que l'isomorphisme naturel provenant de la transitivité de l'induction.

Proposition 4.8. *Pour toute représentation* V *de* M*, on a un isomorphisme de* H*-modules à droite entre $\mathbf{I}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V})^{\mathrm{U}}$ et $\mathrm{V}^{\mathrm{U}\cap\mathrm{M}} \otimes_{\mathrm{H}_{\mathrm{M}}} \mathrm{H}$.*

Démonstration. Étant donnés $d \in \mathrm{D_M}$ et $x \in \mathrm{V^{U\cap M}}$, notons $\psi_{d,x}$ la fonction U-invariante de $\mathbf{I}_\mathrm{P}(\mathrm{V})$ de support $\mathrm{P}d^{-1}\mathrm{U}$ et prenant la valeur x en d^{-1}. L'ensemble des $\psi_{d,x}$ pour $d \in \mathrm{D_M}$ et x parcourant une base de $\mathrm{V^{U\cap M}}$ est une base de $\mathbf{I}_\mathrm{P}(\mathrm{V})^\mathrm{U}$ (voir par exemple [27, I.5.6] en utilisant le lemme 4.2(2)). Soient $x \in \mathrm{V^{U\cap M}}$, $w \in \mathrm{W_M}$ et $d \in \mathrm{D_M}$. Alors on a :

$$\psi_{1,x}\boldsymbol{\tau}_{d^{-1}} = \psi_{d,x}, \tag{4.7}$$

$$\psi_{1,x}\boldsymbol{\tau}_{w} = \psi_{1,x\boldsymbol{\tau}_w}. \tag{4.8}$$

Pour la première égalité, on remarque d'abord que $\psi_{1,x}\boldsymbol{\tau}_{d^{-1}}$ est U-invariante de support $\mathrm{P}d^{-1}\mathrm{U}$. Pour prouver que sa valeur en d^{-1} est x, il suffit de remarquer que pour $u \in \mathrm{U}$, on a $\mathrm{P}d^{-1}u = \mathrm{P}d$ si et seulement si $\mathrm{U}d^{-1}u = \mathrm{U}d^{-1}$, ce qui est donné par le lemme 4.2(2). La seconde s'obtient aisément grâce à la décomposition de la double classe $\mathrm{U}n\mathrm{U}$ décrite dans la preuve du lemme 4.3.

L'égalité (4.8) assure que l'on a un morphisme de $\mathrm{H_M}$-modules à droite $\mathrm{V^{U\cap M}} \to \mathbf{I}_\mathrm{P}(\mathrm{V})^\mathrm{U}$ bien défini par $x \mapsto \psi_{1,x}$. Il induit un morphisme H-équivariant :

$$\mathrm{V^{U\cap M}} \otimes_{\mathrm{H_M}} \mathrm{H} \to \mathbf{I}_\mathrm{P}(\mathrm{V})^\mathrm{U}. \tag{4.9}$$

L'égalité (4.7) assure que (4.9) est surjective. D'après la proposition 4.1, les espaces en question ont même dimension. Donc (4.9) est bijective. □

On déduit de la proposition 4.8 le résultat suivant.

Proposition 4.9. *Pour tout* H*-module à droite de type fini* $\mathfrak{m}$*, on a un isomorphisme de représentations de* M *entre* $\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H_M}} \mathrm{C_M}$ *et* $\mathbf{J}_\mathrm{P}(\mathfrak{m} \otimes_\mathrm{H} \mathrm{C})$.

Démonstration. Par une succession d'adjonctions, on a :

$$\mathrm{Hom_H}(\mathfrak{m}, \mathbf{I}_\mathrm{P}(\mathrm{V})^\mathrm{U}) \simeq \mathrm{Hom_G}(\mathfrak{m} \otimes_\mathrm{H} \mathrm{C}, \mathbf{I}_\mathrm{P}(\mathrm{V})) \simeq \mathrm{Hom_M}(\mathbf{J}_\mathrm{P}(\mathfrak{m} \otimes_\mathrm{H} \mathrm{C}), \mathrm{V})$$

pour toute représentation V de M, et :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom_H}(\mathfrak{m}, \mathrm{Hom_{H_M}}(\mathrm{H}, \mathrm{V^{U\cap M}})) &\simeq \mathrm{Hom_H}(\mathfrak{m}, \mathrm{Hom_M}(\mathrm{H} \otimes_{\mathrm{H_M}} \mathrm{C_M}, \mathrm{V})) \\ &\simeq \mathrm{Hom_M}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H_M}} \mathrm{C_M}, \mathrm{V}). \end{aligned}$$

On en déduit que les représentations $\mathbf{J}_\mathrm{P}(\mathfrak{m} \otimes_\mathrm{H} \mathrm{C})$ et $\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H_M}} \mathrm{C_M}$ sont isomorphes. □

4.5. **La représentation de Steinberg.** Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathbf{P} = \mathbf{B}$. Soit w_0 l'élément de plus grande longueur de W, et notons m sa longueur. Posons :

$$\mathfrak{st} = \boldsymbol{\tau}_{w_0}\boldsymbol{\varepsilon}_1\mathrm{H} = \boldsymbol{\tau}_{w_0}\mathrm{H}_1.$$

Pour chaque $s \in \mathcal{S}$, il y a une écriture réduite de w_0 finissant par s. On a donc $\boldsymbol{\tau}_{w_0}\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\tau}_s = -\boldsymbol{\tau}_{w_0}\boldsymbol{\varepsilon}_1$ d'après (2.6). On en déduit que $\mathfrak{st}$ est un H-module de dimension 1, correspondant au caractère signe de H_1 défini par $\boldsymbol{\tau}_s \mapsto -1$ pour tout $s \in \mathcal{S}$.

Notons Σ la représentation irréductible de G lui correspondant, c'est-à-dire dont le H-module des vecteurs U-invariants est isomorphe à $\mathfrak{st}$.

Lemme 4.10. *La représentation* Σ *est isomorphe à* $\boldsymbol{\tau}_{w_0}\boldsymbol{\varepsilon}_1\mathrm{C} = \boldsymbol{\tau}_{w_0}\mathrm{C}_1$.

Démonstration. Le H-module $\mathfrak{st}$ se plonge canoniquement dans H. D'après le fait 2.2, la représentation Σ est l'image du morphisme de C dans C défini par $f \mapsto \boldsymbol{\tau}_{w_0}\boldsymbol{\varepsilon}_1 f$. □

Notons St la représentation de Steinberg de G, définie comme le quotient de $\mathbf{I}_\mathrm{B}(1) = \mathrm{C}_1$ par la somme des $\mathbf{I}_{\mathrm{P}_s}(1)$ pour $s \in \mathcal{S}$, avec $\mathrm{P}_s = \mathrm{B} \cup \mathrm{B}s\mathrm{B}$.

Proposition 4.11. *La représentation de Steinberg* St *est irréductible et isomorphe à* Σ.

Démonstration. Avec les notations du paragraphe 2.5, pour tout $s \in \mathcal{S}$, posons :

$$\boldsymbol{\tau}_s^* = \boldsymbol{\tau}_s + \sum_{\chi^s=\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_\chi$$

la somme portant sur les caractères $\chi \in \hat{\mathrm{T}}$ tels que $\chi^s = \chi$. D'après (2.6), on a $\boldsymbol{\tau}_s\boldsymbol{\tau}_s^* = \boldsymbol{\tau}_s^*\boldsymbol{\tau}_s = 0$. On a donc $\boldsymbol{\tau}_{w_0}\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\tau}_s^* = 0$ pour tout $s \in \mathcal{S}$. Or $\boldsymbol{\tau}_s^*\boldsymbol{\varepsilon}_1$ est la fonction caractéristique de P_s, de sorte que St est isomorphe au quotient de C_1 par la somme des $\boldsymbol{\tau}_s^*\mathrm{C}_1$ pour $s \in \mathcal{S}$. Ainsi l'application $f \mapsto \boldsymbol{\tau}_{w_0}f$ de C_1 dans $\boldsymbol{\tau}_{w_0}\mathrm{C}_1$ induit un morphisme surjectif :

$$\mathrm{St} \to \boldsymbol{\tau}_{w_0}\mathrm{C}_1. \tag{4.10}$$

Il reste à voir que ce morphisme est injectif.

Lemme 4.12. *Choisissons une écriture réduite $s_{i_m}\dots s_{i_1}$ de w_0. Pour tout $j \in \{1,\dots,m\}$, on a :*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 \in (-1)^j\boldsymbol{\tau}_{s_{i_j}\dots s_{i_1}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\tau}_{s_{i_j}}^*\mathrm{H}_1 + \dots + \boldsymbol{\tau}_{s_{i_1}}^*\mathrm{H}_1.$$

Démonstration. Pour $j = 1$, on a en effet $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\boldsymbol{\tau}_{s_{i_1}}^* - \boldsymbol{\tau}_{s_{i_1}}) = \boldsymbol{\varepsilon}_1$. Supposons le lemme vrai au rang j, avec $1 \leqslant j \leqslant m-1$, et écrivons :

$$\begin{aligned}(-1)^j\boldsymbol{\tau}_{s_{i_j}\dots s_{i_1}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 &= (-1)^j(\boldsymbol{\tau}_{s_{i_{j+1}}}^* - \boldsymbol{\tau}_{s_{i_{j+1}}})\boldsymbol{\tau}_{s_{i_j}\dots s_{i_1}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ &\in (-1)^{j+1}\boldsymbol{\tau}_{s_{i_{j+1}}\dots s_{i_1}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\tau}_{s_{i_{j+1}}}^*\mathrm{H}_1.\end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit par récurrence. □

Le lemme au rang $j = m$ assure que pour $f \in \mathrm{C}_1$, l'égalité $\boldsymbol{\tau}_{w_0}f = 0$ implique que f appartient à $\boldsymbol{\tau}_{s_{i_m}}^*\mathrm{C}_1 + \dots + \boldsymbol{\tau}_{s_{i_1}}^*\mathrm{C}_1$. Autrement dit, l'application (4.10) est injective. □

Ceci montre que la définition de la représentation de Steinberg utilisée ici coïncide avec [6, Definition 6.13].

4.6. Condition nécessaire de platitude pour le H-module C.

Proposition 4.13. *Si* C *est un* H*-module plat, alors* C_M *est un* H_M*-module plat.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal à droite de H_M. Notons K le noyau de l'application naturelle :

$$\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}_\mathrm{M}} \mathrm{C}_\mathrm{M} \to \mathrm{C}_\mathrm{M}. \tag{4.11}$$

Le foncteur $\mathbf{I}_\mathrm{P}$ est exact, si bien que le noyau de :

$$\mathbf{I}_\mathrm{P}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}_\mathrm{M}} \mathrm{C}_\mathrm{M}) \to \mathbf{I}_\mathrm{P}(\mathrm{C}_\mathrm{M})$$

est isomorphe à $\mathbf{I}_\mathrm{P}(\mathrm{K})$. Les isomorphismes fournis par la proposition 4.6 assurent alors que le noyau de l'application naturelle :

$$\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}_\mathrm{M}} \mathrm{C} \to \mathrm{C} \tag{4.12}$$

est lui aussi isomorphe à $\mathbf{I}_\mathrm{P}(\mathrm{K})$. La proposition 4.1 dit que le H_M-module à gauche H est libre, de sorte que $\mathfrak{m} \otimes_{\mathrm{H}_\mathrm{M}} \mathrm{H}$ est isomorphe à l'idéal à droite de H engendré par $\mathfrak{m}$. Par conséquent, si C est un H-module plat, (4.12) est injective, $\mathrm{I}_\mathrm{P}(\mathrm{K})$ est la représentation nulle, et le noyau K de (4.11) est trivial. Nous avons prouvé que si C est un H-module plat, alors l'application (4.11) est injective pour tout idéal à droite $\mathfrak{m}$ de H_M, c'est-à-dire que C_M est un H_M-module plat. □

Corollaire 4.14. *Notons* $\mathrm{C}^{(n)}$ *et* $\mathrm{H}^{(n)}$ *les quantités* C *et* H *associées à* $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ *pour* $n \geqslant 1$. *S'il existe un entier* $n_0 \geqslant 1$ *tel que le* $\mathrm{H}^{(n_0)}$*-module* $\mathrm{C}^{(n_0)}$ *ne soit pas plat, alors, pour tout* $n \geqslant n_0$, *le* $\mathrm{H}^{(n)}$*-module* $\mathrm{C}^{(n)}$ *n'est pas plat.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 4.13 avec $\mathrm{M} = \mathrm{GL}_{n_0}(k) \times \mathrm{GL}_{n-n_0}(k)$, et de remarquer que $\mathrm{C}_\mathrm{M} = \mathrm{C}^{(n_0)} \otimes \mathrm{C}^{(n-n_0)}$ n'est pas plat sur $\mathrm{H}_\mathrm{M} = \mathrm{H}^{(n_0)} \otimes \mathrm{H}^{(n-n_0)}$ puisque $\mathrm{C}^{(n_0)}$ n'est pas plat sur $\mathrm{H}^{(n_0)}$. □

On déduit de ce corollaire et de la proposition 3.2 le résultat suivant.

Corollaire 4.15. *On suppose que* $q \neq p$. *Pour tout entier* $n \geqslant 2$, *le* $\mathrm{H}^{(n)}$*-module* $\mathrm{C}^{(n)}$ *n'est pas plat.*

Rappelons que l'extension des scalaires de H_M à H préserve la platitude [2, I.2.7] et la projectivité [3, II.5.1]. À ceci s'ajoute le résultat suivant, conséquence de la proposition 4.1.

Lemme 4.16. *Tout* H_M*-module à gauche* $\mathfrak{m}$ *est un facteur direct de la restriction de* $\mathrm{H} \otimes_{\mathrm{H}_\mathrm{M}} \mathfrak{m}$ *à* H_M.

Démonstration. D'après la proposition 4.1, l'espace vectoriel $\mathrm{H} \otimes_{\mathrm{H}_\mathrm{M}} \mathfrak{m}$ s'identifie à la somme directe des $\boldsymbol{\tau}_d \mathfrak{m}$ pour $d \in \mathrm{D}_\mathrm{M}$. Soit $\mathfrak{n}$ la somme directe des $\boldsymbol{\tau}_d \mathfrak{m}$ pour $d \in \mathrm{D}_\mathrm{M} - \{1\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{H} \otimes_{\mathrm{H}_\mathrm{M}} \mathfrak{m}$. Pour prouver le lemme, il suffit de s'assurer que ce sous-espace est stable sous l'action de H_M. Rappelons que l'algèbre H_M est engendrée par les $\boldsymbol{\tau}_s$ et les $\boldsymbol{\tau}_t$ pour $s \in \mathcal{S} \cap \mathrm{W}_\mathrm{M}$ et $t \in \mathrm{T}$.

Puisque tout élément $t \in \mathrm{T}$ est de longueur nulle dans $\mathbf{N}(k)$, les relations (2.1) assurent que, pour tout $d \in \mathrm{D}_\mathrm{M}$, on a l'égalité :

$$\boldsymbol{\tau}_t \boldsymbol{\tau}_d = \boldsymbol{\tau}_d \boldsymbol{\tau}_{d^{-1}td},$$

et l'on remarque que $d^{-1}td \in \mathrm{T}$. Ainsi, un sous-espace de la forme $\boldsymbol{\tau}_d \mathfrak{m}$ avec $d \in \mathrm{D}_\mathrm{M}$ est stable sous l'action de $\boldsymbol{\tau}_t$ pour $t \in \mathrm{T}$. On en déduit que $\mathfrak{n}$ est stable sous l'action de $\boldsymbol{\tau}_t$ pour tout $t \in \mathrm{T}$.

La preuve du lemme suivant donnée par [21, Proposition 2.2] dans le cas particulier $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(k)$ se généralise immédiatement.

Lemme 4.17. *Soient* $s \in \mathcal{S}$ *et* $d \in \mathrm{D}_\mathrm{M}$.

(1) *Si* $\ell(sd) < \ell(d)$, *alors* $sd \in \mathrm{D}_\mathrm{M}$.

(2) *Si* $\ell(sd) > \ell(d)$, *alors ou bien* $sd \in \mathrm{D}_\mathrm{M}$ *ou bien* $sd \in d\mathrm{W}_\mathrm{M}$.

Soit $s \in \mathcal{S} \cap \mathrm{W}_\mathrm{M}$ et soit $d \in \mathrm{D}$ tel que $d \neq 1$. Si $\ell(sd) < \ell(d)$, alors $\boldsymbol{\tau}_d = \boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\tau}_{sd}$ et $sd \in \mathrm{D}_\mathrm{M}$ d'après le lemme 4.17. D'après (2.6), on a :

$$\boldsymbol{\tau}_s^2 = -\boldsymbol{\tau}_s \cdot \sum_{\chi^s = \chi} \boldsymbol{\varepsilon}_\chi.$$

Ainsi l'élément :

$$a = -\sum_{\chi^s = \chi} \boldsymbol{\varepsilon}_\chi$$

vérifie $\boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\tau}_d = \boldsymbol{\tau}_s a \boldsymbol{\tau}_{sd}$. On en déduit que $\boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\tau}_d \mathfrak{m} = \boldsymbol{\tau}_s a \boldsymbol{\tau}_{sd} \mathfrak{m}$, qui est inclus dans $\boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\tau}_{sd} \mathfrak{m} = \boldsymbol{\tau}_d \mathfrak{m}$ d'après l'argument précédent.

Si $\ell(sd) > \ell(d)$, alors $\boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\tau}_d = \boldsymbol{\tau}_{sd}$. Si $sd \in \mathrm{D}_\mathrm{M}$, alors $\boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\tau}_d \mathfrak{m} = \boldsymbol{\tau}_{sd} \mathfrak{m}$ est inclus dans $\mathfrak{n}$. Sinon, $sd \in d\mathrm{W}_\mathrm{M}$ d'après le lemme 4.17. Il y a donc $w \in \mathrm{W}_\mathrm{M}$ tel que $\boldsymbol{\tau}_{sd} = \boldsymbol{\tau}_d \boldsymbol{\tau}_w$, de sorte que l'espace $\boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\tau}_d \mathfrak{m} = \boldsymbol{\tau}_d \boldsymbol{\tau}_w \mathfrak{m}$ est inclus dans $\boldsymbol{\tau}_d \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$. Ainsi, $\mathfrak{n}$ est bien un H_M-module. □

Corollaire 4.18. *Un* $\mathrm{H_M}$*-module à gauche de type fini* $\mathfrak{m}$ *est projectif si et seulement si le* H*-module* $\mathrm{H} \otimes_{\mathrm{H_M}} \mathfrak{m}$ *est projectif.*

Démonstration. On suppose que le H-module $\mathrm{H} \otimes_{\mathrm{H_M}} \mathfrak{m}$ est projectif. C'est un facteur direct d'un H-module libre. Par le lemme 4.16, le $\mathrm{H_M}$-module à gauche $\mathfrak{m}$ est donc un facteur direct d'une somme de copies de H. Comme H est un $\mathrm{H_M}$-module à gauche libre, on en déduit que $\mathfrak{m}$ est un $\mathrm{H_M}$-module projectif. □

Grâce au lemme 2.7, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 4.19. *Soit* $\mathfrak{m}$ *un* $\mathrm{H_M}$*-module à gauche de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathfrak{m}$ *est plat.*

(2) $\mathfrak{m}$ *est projectif.*

(3) $\mathfrak{m}$ *est injectif.*

(4) $\mathrm{H} \otimes_{\mathrm{H_M}} \mathfrak{m}$ *est plat.*

(5) $\mathrm{H} \otimes_{\mathrm{H_M}} \mathfrak{m}$ *est projectif.*

(6) $\mathrm{H} \otimes_{\mathrm{H_M}} \mathfrak{m}$ *est injectif.*

Grâce à la proposition 4.4, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 4.20. *Le* H*-module* $\mathrm{C^N}$ *est plat si et seulement si le* $\mathrm{H_M}$*-module* $\mathrm{C_M}$ *est plat. Dans ce cas ils sont tous deux projectifs et le* H*-module* $\mathrm{C^N}$ *est un facteur direct de* C*.*

Démonstration. Rappelons que le morphisme $\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}$ défini en (4.1) est injectif et que, d'après la proposition 4.4, le morphisme (4.2) est un isomorphisme de H-modules entre $\mathrm{H} \otimes_{\mathrm{H_M}} \mathrm{C_M}$ et $\mathrm{C^N}$. Le résultat est alors une conséquence des corollaires 4.18 et 2.8. □

5. Le cas de $\mathrm{GL}_n(k)$, $n \geqslant 3$

5.1. **Représentations de** $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_{p^r})$**.** On suppose dans ce paragraphe que $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ comme dans l'exemple 2.1. Rappelons quelques résultats de [14] et [10, 11]. Notons X le groupe des caractères algébriques de $\mathbf{T}$, que l'on identifie à $\mathbf{Z}^n$, et X_+ l'ensemble des n-uplets $(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{X}$ tels que $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$. Pour $\lambda \in \mathrm{X}_+$, on note $\mathscr{W}(\lambda)$ l'espace des fonctions rationnelles :

$$\{f : \mathbf{G} \to \overline{\mathbf{F}}_p \mid f(gtu) = \lambda(t)^{-1} f(g),\ g \in \mathbf{G},\ t \in \mathbf{T},\ u \in \overline{\mathbf{U}}\}$$

qu'on munit de l'action de $\mathbf{G}$ par translations à gauche. C'est une représentation algébrique de $\mathbf{G}$. Soit $\mathscr{L}(\lambda)$ son socle (c'est-à-dire son plus grand sous-module semi-simple). Pour $r \geqslant 0$, on pose :

$$\mathrm{X}_r = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{X}_+ \mid 0 \leqslant a_i - a_{i+1} \leqslant p^r - 1,\ i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Pour $r \geqslant 1$, soit $\mathbf{F}_{p^r}$ le sous-corps de $\overline{\mathbf{F}}_p$ de cardinal p^r. Pour $\lambda \in \mathrm{X}_r$ et $i \in \{0, \dots, r-1\}$, on note $\mathscr{L}_r(\lambda)$ la restriction de $\mathscr{L}(\lambda)$ à $\mathbf{G}(\mathbf{F}_{p^r})$ et $\mathscr{L}_r(\lambda)^{(i)}$ la composée de $\mathscr{L}_r(\lambda)$ avec l'automorphisme de $\mathbf{G}(\mathbf{F}_{p^r})$ induit par $x \mapsto x^{p^i}$. On a les résultats suivants.

Proposition 5.1. *On fixe un entier* $r \geqslant 1$*.*

(1) *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{X}_r$*, la représentation* $\mathscr{L}_r(\lambda)$ *de* $\mathbf{G}(\mathbf{F}_{p^r})$ *est irréductible.*

(2) *L'application* $\lambda \mapsto \mathscr{L}_r(\lambda)$ *induit une bijection entre* $\mathrm{X}_r/(p^r-1)\mathrm{X}_0$ *et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de* $\mathbf{G}(\mathbf{F}_{p^r})$*.*

(3) *L'espace des vecteurs* $\mathbf{U}(\mathbf{F}_{p^r})$*-invariants de* $\mathscr{L}_r(\lambda)$ *est de dimension* 1*, et la représentation de* $\mathbf{T}(\mathbf{F}_{p^r})$ *sur cet espace est égale à* λ*.*

(4) *Si* $\lambda = (a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{X}_r$*, alors* $\lambda^* = (-a_n, \dots, -a_1) \in \mathrm{X}_r$ *et* $\mathscr{L}_r(\lambda^*)$ *est isomorphe à la représentation contragrédiente de* $\mathscr{L}_r(\lambda)$*.*

(5) *Soit* $\lambda \in \mathrm{X}_r$*, qu'on écrit sous la forme :*

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 p + \dots + \lambda_{r-1} p^{r-1}, \quad \lambda_i \in \mathrm{X}_1, \quad i \in \{0, \dots, r-1\}. \tag{5.1}$$

Alors on a un isomorphisme de représentations de $\mathbf{G}(\mathbf{F}_{p^r})$ *:*

$$\mathscr{L}_r(\lambda) \simeq \mathscr{L}_r(\lambda_0) \otimes \mathscr{L}_r(\lambda_1)^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathscr{L}_r(\lambda_{r-1})^{(r-1)}. \tag{5.2}$$

Démonstration. Pour les deux premières assertions, voir [11, Appendix 1.3] et pour 3, voir [12, Lemma 2.5]. Pour les deux dernières, voir [14, II.3]. ☐

En comparant les propositions 5.1 et 2.15, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 5.2. *Soit* $\lambda \in \mathrm{X}_r$ *et soit* χ *un caractère de* $\mathbf{T}(\mathbf{F}_{p^r})$*. La représentation* $\mathscr{L}_r(\lambda)$ *est un quotient irréductible de* C_χ *si et seulement si la restriction de* λ *à* $\mathbf{T}(\mathbf{F}_{p^r})$ *est égale à* χ*.*

Exemple 5.3. On suppose que n est égal à 2. Soit $\lambda = (a, b) \in \mathrm{X}_r$, et écrivons $a - b$ sous la forme $e_0 + e_1 p + \dots + e_{r-1} p^{r-1}$ avec $e_i \in \{0, \dots, p-1\}$. Alors $\mathscr{L}_r(\lambda)$ est la représentation irréductible :

$$\mathrm{Sym}^{e_0}(\overline{\mathbf{F}}_p^2) \otimes \dots \otimes \mathrm{Sym}^{e_{r-1}}(\overline{\mathbf{F}}_p^2)^{(r-1)} \otimes \det{}^b$$

qui est de dimension $(e_0 + 1) \dots (e_{r-1} + 1)$.

5.2. **Représentations de** $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_{p^r})$**.** On suppose maintenant que $n = 3$. On rappelle quelques résultats sur la semi-simplification de C_χ pour $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$.

Proposition 5.4. *Soit* $(a, b, c) \in \mathrm{X}_1$*. Si :*

$$0 \leqslant a - b, b - c < p - 1 \quad \textit{et} \quad p - 1 \leqslant a - c, \tag{5.3}$$

alors la représentation $\mathscr{W}(a, b, c)$ *est de longueur* 2*. Sinon,* $\mathscr{W}(a, b, c)$ *est irréductible.*

Démonstration. Le résultat est dû à Jantzen : voir [10, Proposition 4.9]. ☐

On commence par étudier C_χ lorsque $\chi = 1$. Pour tout $\lambda \in \mathrm{X}_1$, on note $\mathscr{W}_1(\lambda)$ la restriction de $\mathscr{W}(\lambda)$ à $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$, qui est de longueur $\leqslant 2$ d'après la proposition 5.4.

Proposition 5.5. *Dans le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de* $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$*, la semi-simplification de* C_1 *est égale à :*

$$\mathscr{W}_1(0,0,0) + 2 \cdot \mathscr{W}_1(p-1,0,0) + 2 \cdot \mathscr{W}_1(p-1,p-1,0) + \mathscr{W}_1(2p-2,p-1,0). \tag{5.4}$$

Chacune des représentations $\mathscr{W}_1(\lambda)$ *apparaissant ci-dessus est irréductible, et on a :*

$$\dim \mathscr{W}_1(0,0,0) = 1, \tag{5.5}$$
$$\dim \mathscr{W}_1(p-1,0,0) = p(p+1)/2, \tag{5.6}$$
$$\dim \mathscr{W}_1(p-1,p-1,0) = p(p+1)/2, \tag{5.7}$$
$$\dim \mathscr{W}_1(2p-2,p-1,0) = p^3. \tag{5.8}$$

Démonstration. Le théorème [10, 5.1] donne la décomposition de la semi-simplification de C_1 en une somme de représentations $\mathscr{W}_1(\lambda)$ et la proposition 5.4 montre que ces représentations sont irréductibles. Plus précisément, ce théorème décrit la décomposition de la semi-simplification de la réduction modulo p de chacun des facteurs irréductibles de l'induite du $\mathbf{Z}_p$-caractère trivial de $\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)$ à $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$:

- la réduction modulo p du $\mathbf{Z}_p$-caractère trivial de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ est isomorphe à la représentation irréductible $\mathscr{W}_1(0,0,0)$, qui est de dimension 1 ;
- la réduction modulo p de la $\mathbf{Z}_p$-représentation de Steinberg est isomorphe à la représentation irréductible $\mathscr{W}_1(2p-2,p-1,0)$, qui est de dimension p^3 ;
- la $\mathbf{Z}_p$-représentation irréductible de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ apparaissant avec multiplicité 2 dans l'induite à $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ du $\mathbf{Z}_p$-caractère trivial de $\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)$ est de dimension p^2+p. Sa réduction modulo p est isomorphe à la somme des deux représentations irréductibles $\mathscr{W}_1(p-1,0,0)$ et $\mathscr{W}_1(p-1,p-1,0)$. Il suffit donc de montrer que ces deux-là ont la même dimension, ce qui découle du fait qu'elles sont duales d'après la proposition 5.1(4).

On en déduit le résultat annoncé. □

On étudie maintenant C_χ avec χ régulier, c'est-à-dire dont l'orbite sous l'action de W_0 est de cardinal 6.

Proposition 5.6. *Soit χ un caractère régulier de $\mathrm{T}(\mathbf{F}_p)$. Alors C_χ est de longueur strictement supérieure à 6 dans la catégorie $\mathscr{R}(\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p))$.*

Démonstration. On choisit $(a,b,c) \in \mathrm{X}_1$ tel que χ soit le caractère :

$$\begin{pmatrix} x & & \\ & y & \\ & & z \end{pmatrix} \mapsto x^a y^b z^c.$$

Puisque χ est régulier, on a $p > 2$ et l'on peut supposer que $1 \leqslant a-b, b-c < p-1$. D'après la formule [10, (5.2)], la semi-simplification de C_χ est :

$$\begin{aligned} &\mathscr{W}_1(a,b,c) + \mathscr{W}_1(p-1+b,p-1+c,a) + \mathscr{W}_1(p-1+c,a,b) \\ &\qquad + \mathscr{W}_1(2p-2+c,p-1+b,a) + \mathscr{W}_1(p-1+a,p-1+c,b) + \mathscr{W}_1(p-1+b,a,c). \end{aligned}$$

On vérifie que l'un des deux triplets (a,b,c) et $(p-1+a,p-1+c,b)$ satisfait à la condition (5.3) de la proposition 5.4, de sorte que l'une ou l'autre des représentations :

$$\mathscr{W}_1(a,b,c), \quad \mathscr{W}_1(p-1+a,p-1+c,b)$$

est de longueur 2, ce qui prouve l'assertion. □

Remarque 5.7. On peut montrer de la même façon que, si l'orbite de χ sous l'action de W est de cardinal 3, alors C_χ est de longueur > 6. Compte tenu de la proposition 5.5, on en déduit que C_χ est de longueur 6 si et seulement χ est invariant par W.

On en déduit le résultat suivant. Soit $r \geqslant 1$ un entier.

Proposition 5.8. *Soit $(a,b,c) \in \mathrm{X}_r$. La représentation irréductible $\mathscr{L}_r(a,b,c)$ est isomorphe à un quotient de C_1 si et seulement si (a,b,c) est congru à l'un des poids :*

$$(0,0,0), (p^r-1,0,0), (p^r-1,p^r-1,0), (2p^r-2,p^r-1,0), \tag{5.9}$$

modulo $(p^r-1)\mathrm{X}_0$. *En outre, on a :*

$$\dim \mathscr{L}_r(0,0,0) = 1, \tag{5.10}$$
$$\dim \mathscr{L}_r(p^r-1,0,0) = (p(p+1)/2)^r, \tag{5.11}$$
$$\dim \mathscr{L}_r(p^r-1,p^r-1,0) = (p(p+1)/2)^r, \tag{5.12}$$
$$\dim \mathscr{L}_r(2p^r-2,p^r-1,0) = p^{3r}. \tag{5.13}$$

Démonstration. La première partie de la proposition est une conséquence du corollaire 5.2. Ensuite, puisque $p^r-1=(p-1)(1+p+\cdots+p^{r-1})$, chaque poids λ dans (5.9) se décompose sous la forme (5.1) avec des $\lambda_i \in \mathrm{X}_1$ indépendants de i et respectivement égaux, suivant λ, à :

$$(0,0,0),(p-1,0,0),(p-1,p-1,0),(2p-2,p-1,0). \tag{5.14}$$

Compte tenu de la formule (5.2) et de la proposition 5.5, on trouve les formules annoncées. □

5.3. **L'algèbre de Hecke** H_1**.** D'après [8, 4], la $\overline{\mathbf{F}}_p$-algèbre H_1 est engendrée par $\mathrm{S}_1=\boldsymbol{\tau}_{s_1}\boldsymbol{\varepsilon}_1$ et $\mathrm{S}_2=\boldsymbol{\tau}_{s_2}\boldsymbol{\varepsilon}_1$ avec les relations :

$$\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2\mathrm{S}_1=\mathrm{S}_2\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2, \quad \mathrm{S}_1^2+\mathrm{S}_1=\mathrm{S}_2^2+\mathrm{S}_2=0.$$

Remarquons que S_1 et S_2 sont les fonctions caractéristiques respectives de $\mathrm{B}s_1\mathrm{B}$ et $\mathrm{B}s_2\mathrm{B}$. Dans la suite, on pose $\mathrm{S}_1^*=\mathrm{S}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_1$ et $\mathrm{S}_2^*=\mathrm{S}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_1$. On pose :

$$\mathrm{X}=-\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2\mathrm{S}_1, \quad \mathrm{Y}=-\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2^*\mathrm{S}_1, \quad \mathrm{Z}=-\mathrm{S}_1^*\mathrm{S}_2\mathrm{S}_1^*, \quad \Omega=\mathrm{S}_1^*\mathrm{S}_2^*\mathrm{S}_1^*.$$

On vérifie que ce sont des idempotents deux à deux orthogonaux de H_1 qui décomposent l'unité. Notons que X et Ω sont centraux et qu'on a les relations :

$$\mathrm{Y}\mathrm{S}_2=\mathrm{S}_2^*\mathrm{Z}, \quad \mathrm{S}_2\mathrm{Y}=\mathrm{Z}\mathrm{S}_2^*,$$

qui permettent en particulier de s'assurer que la somme $\mathrm{Y}+\mathrm{Z}$ est un idempotent central. Ainsi, les idéaux à droite $\mathrm{XH}_1,\mathrm{YH}_1,\mathrm{ZH}_1$ et $\Omega\mathrm{H}_1$ sont des H_1-modules projectifs indécomposables.

On sait (voir [6, Theorem 1.25]) que l'application $\mathfrak{m}\mapsto \mathrm{soc}(\mathfrak{m})$ qui à un H_1-module à droite associe son socle induit une bijection entre les classes d'isomorphisme de H_1-modules projectifs indécomposables et les classes d'isomorphisme de H_1-modules simples. On va expliciter cette bijection.

Définition 5.9. Pour $\alpha_1,\alpha_2\in\{0,-1\}\subseteq\overline{\mathbf{F}}_p$, on désigne par χ_{α_1,α_2} le caractère de H_1 défini par $\chi_{\alpha_1,\alpha_2}(\mathrm{S}_1)=\alpha_1$ et $\chi_{\alpha_1,\alpha_2}(\mathrm{S}_2)=\alpha_2$.

L'application $(\alpha_1,\alpha_2)\mapsto\chi_{\alpha_1,\alpha_2}$ définit une bijection de $\{0,-1\}\times\{0,-1\}$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de H_1-modules simples.

Proposition 5.10. *On a :*

$$\mathrm{soc}(\mathrm{XH}_1)=\chi_{-1,-1}, \quad \mathrm{soc}(\mathrm{YH}_1)=\chi_{0,-1}, \quad \mathrm{soc}(\mathrm{ZH}_1)=\chi_{-1,0}, \quad \mathrm{soc}(\Omega\mathrm{H}_1)=\chi_{0,0}.$$

Démonstration. On vérifie d'abord que les idéaux bilatères XH_1 et $\Omega\mathrm{H}_1$ sont de dimension 1 et correspondent respectivement aux caractères $\chi_{-1,-1}$ et $\chi_{0,0}$. Ensuite, en utilisant la relation $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2^*=-\mathrm{Y}\mathrm{S}_2^*$, on vérifie que $\mathrm{YH}_1=\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2^*\mathrm{H}_1$ est un $\overline{\mathbf{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 2 de base $\{\mathrm{YS}_2,\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2^*\}$. On a la suite exacte non scindée de H_1-modules :

$$0\to\mathrm{YS}_2\mathrm{H}_1=\mathrm{S}_2^*\mathrm{ZH}_1\to\mathrm{YH}_1\xrightarrow{\mathrm{S}_2}\mathrm{S}_2\mathrm{YH}_1\to 0, \tag{5.15}$$

c'est-à-dire que le H_1-module à droite YH_1 est l'enveloppe projective de $\chi_{0,-1}$, et c'est une extension non scindée de $\chi_{-1,0}$ par $\chi_{0,-1}$. Le H_1-module à droite YH_1 est l'enveloppe projective de $\chi_{0,-1}$. De même, on a la suite exacte de H_1-modules :

$$0 \to \mathrm{ZS}_2^*\mathrm{H}_1 = \mathrm{S}_2\mathrm{YH}_1 \to \mathrm{ZH}_1 \xrightarrow{\mathrm{S}_2^*} \mathrm{S}_2^*\mathrm{ZH}_1 \to 0. \tag{5.16}$$

C'est une extension non scindée de $\chi_{0,-1}$ par $\chi_{-1,0}$. Le H_1-module ZH_1 à droite est l'enveloppe projective de $\chi_{-1,0}$. □

Ainsi les idéaux à droite de H_1 sont, à isomorphisme près, les H'-modules projectifs indécomposables XH_1, YH_1, ZH_1 et $\Omega\mathrm{H}_1$, auxquels s'ajoutent les idéaux non projectifs $\mathrm{S}_2\mathrm{YH}_1$ et $\mathrm{YS}_2\mathrm{H}_1$.

Remarque 5.11. Notons que $\mathrm{S}_2\mathrm{YC}' = \mathrm{S}_1^*\mathrm{S}_2\mathrm{S}_1\mathrm{C}'$ et $\mathrm{YS}_2\mathrm{C}' = \mathrm{S}_2^*\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2\mathrm{C}'$. Ainsi la classification de Carter et Lusztig ([8, Theorem 7.4]) assure que les représentations irréductibles de G possédant un vecteur B-invariant sont, à isomorphisme près :

$$\mathrm{XC}', \mathrm{S}_2\mathrm{YC}', \mathrm{YS}_2\mathrm{C}', \Omega\mathrm{C}'$$

et leurs espaces U-invariants (donc B-invariants) respectifs portent les caractères $\chi_{-1,-1}$, $\chi_{-1,0}$, $\chi_{0,-1}$, $\chi_{0,0}$ de H_1.

5.4. **Platitude de C_1.** Rappelons que H_1 est une algèbre de Frobenius. On a le résultat suivant.

Proposition 5.12. *Le H_1-module C_1 est plat si et seulement si $q = p$.*

Démonstration. On note q le cardinal de k. Rappelons que C_1 est de dimension :

$$(\mathrm{G} : \mathrm{B}) = (1 + q)(1 + q + q^2).$$

En tant que H_1-module, c'est la somme directe de XC_1, $(\mathrm{Y} + \mathrm{Z})\mathrm{C}_1$ et $\Omega\mathrm{C}_1$. D'après le paragraphe 4.5, XC_1 est la représentation de Steinberg. Elle est irréductible et de dimension q^3. On déduit du paragraphe précédent que le H_1-module XC_1 est isomorphe à une somme directe de q^3 copies de $\mathrm{H}_1\mathrm{X}$. C'est un H_1-module projectif.

L'élément Ω s'identifie dans C_1 à la fonction caractéristique de G. On en déduit que $\Omega\mathrm{C}_1$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur lequel G agit trivialement (voir le paragraphe 4.5). En tant que H_1-module, $\Omega\mathrm{C}_1$ est isomorphe à $\mathrm{H}_1\Omega$ et c'est un H_1-module projectif.

La sous-représentation $\mathrm{S}_1^*\mathrm{C}_1 \subseteq \mathrm{C}_1$ est engendrée par la fonction caractéristique du sous-groupe parabolique $\mathrm{P}_1 = \mathrm{B} \cup \mathrm{B}s_1\mathrm{B}$ de G. Elle est donc isomorphe à l'induite $\mathbf{I}_{\mathrm{P}_1}(1)$ qui est de dimension $(\mathrm{G} : \mathrm{P}_1) = 1 + q + q^2$. Or $\mathrm{S}_1^*\mathrm{C}_1$ est la somme directe de ZC_1 et $\Omega\mathrm{C}_1$, donc ZC_1 est de dimension $q + q^2$. Ainsi, la dimension de YC_1 est aussi $q + q^2$.

Le noyau de la restriction de S_2 à YC_1 contient $\mathrm{YS}_2\mathrm{C}_1 = \mathrm{S}_2^*\mathrm{ZC}_1$, et le noyau de la restriction de S_2^* à ZC_1 contient $\mathrm{S}_2\mathrm{YC}_1 = \mathrm{ZS}_2^*\mathrm{C}_1$. On a les complexes :

$$0 \to \mathrm{YS}_2\mathrm{C}_1 \to \mathrm{YC}_1 \xrightarrow{\mathrm{S}_2} \mathrm{S}_2\mathrm{YC}_1 \to 0 \tag{5.17}$$

et :

$$0 \to \mathrm{ZS}_2^*\mathrm{C}_1 \to \mathrm{ZC}_1 \xrightarrow{\mathrm{S}_2^*} \mathrm{S}_2^*\mathrm{ZC}_1 \to 0 \tag{5.18}$$

de représentations de G, dont nous discutons l'exactitude. D'après la remarque 5.11, les représentations $\mathrm{YS}_2\mathrm{C}_1$ et $\mathrm{S}_2\mathrm{YC}_1$ sont irréductibles. Comme elles ne sont isomorphes ni au caractère trivial, ni à la représentation de Steinberg, elles sont donc (d'après la proposition 5.8) de dimension :

$$(p(p+1)/2)^r,$$

où l'on a posé $q = p^r$. Par conséquent, chacun des complexes est exact si et seulement si $q = p$.

Le H_1-module à gauche $(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})\mathrm{C}_1$ est plat si et seulement si, pour tout idéal à droite $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{H}_1$, l'application :

$$\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{H}_1} (\mathrm{Y}+\mathrm{Z})\mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_1$$

est injective. Il suffit de tester cette propriété sur les idéaux indécomposables de H_1, et, puisque X, Y, Z et Ω sont des idempotents orthogonaux, seuls les cas des idéaux $\mathrm{S}_2\mathrm{YH}_1$ et $\mathrm{S}_2^*\mathrm{ZH}_1$ nécessitent une vérification. Traitons le cas de $\mathrm{S}_2\mathrm{YH}_1$ en utilisant les complexes (5.15) et (5.17). Le cas de $\mathrm{S}_2^*\mathrm{ZH}_1$ s'obtiendrait de façon analogue en utilisant les complexes (5.16) et (5.18).

D'après [2, I.2.11], un élément $\mathrm{S}_2\mathrm{Y}\otimes c \in \mathrm{S}_2\mathrm{Y}\otimes_{\mathrm{H}_1}(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})\mathrm{C}_1$ est nul si et seulement s'il existe une famille finie $(h_i)_i$ de H_1 et une famille finie $(c_i)_i$ de $(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})\mathrm{C}_1$ telles que $c = \sum_i h_i c_i$ et $\mathrm{S}_2\mathrm{Y}h_i = 0$ pour tout i, c'est-à-dire, d'après l'exactitude de (5.15), si et seulement si $c \in \mathrm{YS}_2\mathrm{C}_1 + \mathrm{ZC}_1$. Si $q = p$, le complexe (5.17) est exact, donc cette condition est équivalente à $\mathrm{S}_2\mathrm{Y}c = 0$ et l'homomorphisme $\mathrm{S}_2\mathrm{Y}\otimes_{\mathrm{H}_1}(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})\mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_1$ est injectif. Si $q \neq p$, tensoriser (5.15) par le H_1-module $(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})\mathrm{C}_1$ donne le complexe (5.17) qui n'est pas exact. Donc $(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})\mathrm{C}_1$ n'est pas plat.

La proposition 5.12 est démontrée. □

5.5. **Platitude de** C. On a le résultat suivant.

Proposition 5.13. *Le* H*-module* C *est plat si et seulement si* $q = p = 2$.

Démonstration. Le fait que C n'est pas plat sur H lorsque q est différent de p est donné par le corollaire 4.15. On suppose maintenant que $q = p$.

Supposons que $p = 2$. Dans ce cas, le groupe $\hat{\mathrm{T}}$ est réduit au caractère trivial, et C est égal à C_1. D'après la proposition 2.14 et la proposition 5.12, le H-module C est plat.

Supposons que $p > 2$, et soit $\chi \in \hat{\mathrm{T}}$ un caractère de T. Le H-module correspondant à C_χ est $\boldsymbol{\varepsilon}_\chi\mathrm{H}$, qui est de dimension 6 et de base $\{\boldsymbol{\varepsilon}_\chi\boldsymbol{\tau}_w \mid w \in \mathrm{W}_0\}$ en tant que $\overline{\mathbf{F}}_p$-espace vectoriel. Puisque tous les H-modules simples sont de dimension 1 (voir par exemple [6, Theorem 6.10 (iii)]), ce module est de longueur 6 dans $\mathscr{M}$. Si C était un H-module plat, le foncteur F des U-invariants fournirait, d'après la proposition 2.13, une équivalence entre $\mathscr{E}$ et $\mathscr{M}$. Pour montrer que C n'est pas un module plat, il suffit donc de trouver un caractère χ tel que la représentation C_χ de G soit de longueur strictement supérieure à 6 dans $\mathscr{E}$. Remarquons que, puisque toute représentation non nulle de G admet un vecteur U-invariant non trivial, les éléments irréductibles des catégories $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$ coïncident. Il suffit donc de trouver χ tel que C_χ est de longueur strictement supérieure à 6 dans $\mathscr{R}$, ce qui a été fait à la proposition 5.6. □

Associé au corollaire 4.14, ce résultat fournit le corollaire suivant.

Corollaire 5.14. *On suppose que* $q \neq 2$. *Alors, pour tout* $n \geqslant 3$, *le* $\mathrm{H}^{(n)}$*-module* $\mathrm{C}^{(n)}$ *n'est pas plat.*

On peut traiter le cas de C_1 de façon analogue. On note $\mathrm{C}_1^{(n)}$ et $\mathrm{H}_1^{(n)}$ les quantités C_1 et H_1 associées à $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(k)$ pour $n \geqslant 1$. On déduit de la proposition 5.12 le résultat suivant.

Corollaire 5.15. *On suppose que* $q \neq p$. *Alors, pour tout* $n \geqslant 3$, *le* $\mathrm{H}_1^{(n)}$*-module* $\mathrm{C}_1^{(n)}$ *n'est pas plat.*

Concluons en rassemblant les résultats des propositions 2.13, 2.17, 3.1, 3.2, 5.12, 5.13 et des deux corollaires précédents.

Proposition 5.16. *On a les résultats suivants.*

(1) *Pour* $n = 2$, *le* H_1*-module* C_1 *est plat.*

(2) *Pour* $n = 2$, *le* H-*module* C *est plat si et seulement si* $q = p$.

(3) *Pour* $n = 3$, *le* H_1-*module* C_1 *est plat si et seulement si* $q = p$.

(4) *Pour* $n = 3$, *le* H-*module* C *est plat si et seulement si* $q = 2$.

(5) *Pour* $n \geqslant 4$ *et* $q \neq p$, *le* H_1-*module* C_1 *n'est pas plat.*

(6) *Pour* $n \geqslant 4$ *et* $q \neq 2$, *le* H-*module* C *n'est pas plat.*

On a enfin le théorème suivant.

Theorem 5.17. *Soit* $n \geqslant 2$.

(1) *Si* $n = 2$ *et* $q = p$, *ou si* $n = 3$ *et* $q = 2$, *le foncteur* F *des* U-*invariants est une équivalence de* $\mathscr{E}$ *dans* $\mathscr{M}$.

(2) *Si* $n \geqslant 3$ *et* $q \neq 2$, *ce foncteur n'est pas une équivalence de* $\mathscr{E}$ *dans* $\mathscr{M}$.

(3) *Si* $n = 2$, *ou si* $n = 3$ *et* $q = p$, *le foncteur* F *est une équivalence de* $\mathscr{E}_1$ *dans* $\mathscr{M}_1$.

(4) *Si* $n \geqslant 3$ *et* $q \neq p$, *ce foncteur n'est pas une équivalence de* $\mathscr{E}_1$ *dans* $\mathscr{M}_1$.

Références

[1] D. J. Benson – *Representations and Cohomology I, Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, (1991).

[2] N. Bourbaki – *Algèbre commutative, Chapitres 1 et 2.* Hermann, Paris, (1961).

[3] N. Bourbaki – *Algèbre, Chapitres 1 à 3.* Hermann, Paris, (1970).

[4] N. Bourbaki – *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4 à 6.* Masson, Paris, (1981).

[5] M. Cabanes – « A criterion of complete reducibility and some applications », in *Représentations linéaires des groupes finis* (M. Cabanes ed.), Astérisque **181-182**, p. 93–112, (1990).

[6] M. Cabanes & M. Enguehard – *Representation theory of finite reductive groups*, Cambridge University Press, (2004).

[7] R. W. Carter – *Finite Groups of Lie Type.* Wiley Interscience, (1985).

[8] R. W. Carter & G. Lusztig – « Modular representations of finite groups of Lie type », *Proc. London Math. Soc.* **32**, p. 347–384, (1976).

[9] F. Diamond – « A correspondence between representations of local Galois groups and Lie-type groups. »*L-functions and Galois representations / edited by David Burns, Kevin Buzzard and Jan Nekovár.* Cambridge University Press, (2007).

[10] F. Herzig – « The weight in a Serre type conjecture for tame n-dimensional Galois representations », Ph. D. thesis, (2006).

[11] F. Herzig – « The weight in a Serre type conjecture for tame n-dimensional Galois representations », *Duke Math. J.* **149** p. 37–116, (2009).

[12] F. Herzig – « A Satake isomorphism in characteristic p », *Compositio Math.* **147** no. 1, p. 263-283, (2011).

[13] G. Henniart & M.-F. Vignéras – « A Satake isomorphism for representations modulo p of reductive groups over local fields », prépublication, `http://www.math.jussieu.fr/~vigneras` (2011).

[14] J. C. Jantzen – *Representations of algebraic groups*, Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 107. American Mathematical Society, Providence, RI, (2003).

[15] A. V. Jeyakumar – « Principal indecomposable representations for the group $\mathrm{SL}(2, q)$ », *J. Algebra* **30**, p. 444–458, (1974).

[16] T. Y. Lam – *A First course in noncommutative rings*, Springer (1991).

[17] ______, « Lectures on modules and rings, *Graduate Texts in Mathematics* **189**, Springer-Verlag, (1999).

[18] G. Lusztig – »Affine Hecke algebras and their graded version,« *Journal of A.M.S.* **Vol. 2, No.3**, (1989).

[19] R. Ollivier – « Platitude du pro-p-module universel de $\mathrm{GL}_2(F)$ en caractéristique p », *Compositio Math.* **143** p. 703–720, (2007).

[20] ______, –« Le foncteur des invariants sous l'action du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ », *J. für die reine und angewandte Mathematik* **635** p. 149–185, (2009).

[21] ______, – « Parabolic induction and Hecke modules in characteristic p for p-adic GL_n », *Algebra and Number Theory* **4-6** p. 701–742 (2010).

[22] R. Ollivier & V. Sécherre – « Modules universels de GL(3) sur un corps p-adique en caractéristique p », prépublication.

[23] V. Paškūnas – « Coefficient systems and supersingular representations of $\mathrm{GL}_2(F)$ », *Mém. Soc. Math. Fr. (NS)* **99** (2004).

[24] H. Sawada – « Endomorphism rings of split (B, N)-pairs », *Tokyo J. Math.* **1**(1), p. 139–148 (1978).

[25] P. Schneider & U. Stuhler – « Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building », *Publ. Math. IHES* **85** p. 97–191 (1997).

[26] J.-P. Serre – « Linear representations of finite groups », Graduate Texts in Math. 42, Springer (1977).

[27] M.-F. Vignéras – « Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$. » Progress in Mathematics, 137. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1996).

[28] ______– « Induced R-representations of p-adic reductive groups », *Selecta Math. (N.S.)* **4** no. 4, p. 549–623 (1998). With an appendix by Alberto Arabia.

Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027, USA
E-mail address: ollivier@math.columbia.edu

Laboratoire de Mathématiques de Versailles, Université de Versailles Saint-Quentin, 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles Cedex, France
E-mail address: vincent.secherre@math.uvsq.fr