Minoration de l'énergie extérieure pour l'équation des ondes et applications

Thomas Duyckaerts[1] (avec H. Jia[2], C. Kenig[3] et F. Merle[4])

[1]Institut Galilée, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité Université et IUF
[2]University of Minnesota
[3]University of Chicago
[4]Université de Cergy-Pontoise et IHES

Journée "Contrôle et EDP", Versailles, 12 Octobre 2017

Outline

Outline

Outline

Outline

1. Introduction
2. Résolution en soliton
3. Bornes inférieure de l'énergie extérieure
   - Equirépartition de l'énergie
   - Equirépartition généralisée dans le cas radial
   - Données initiales bien préparées

Équation

(NLW) $$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = |u|^{\frac{4}{N-2}} u \\ \vec{u}_{\restriction t=0} = (u_0, u_1) \in \mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

où $u : [0, T_+(u)[\times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad N \geq 3.$

Équation

(NLW) $$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = |u|^{\frac{4}{N-2}} u \\ \vec{u}_{\restriction t=0} = (u_0, u_1) \in \mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

où $u : [0, T_+(u)[\times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\quad N \geq 3$. Équation bien posée dans $\mathcal{H} = \dot{H}^1 \times L^2$ [Ginibre-Velo].

Équation

$$\text{(NLW)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = |u|^{\frac{4}{N-2}} u \\ \vec{u}_{\restriction t=0} = (u_0, u_1) \in \mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

où $u : [0, T_+(u)[\times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\quad N \geq 3$. Équation bien posée dans $\mathcal{H} = \dot{H}^1 \times L^2$ [Ginibre-Velo].
Energie conservée:

$$E(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_x u(t)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_t u(t)|^2 - \frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t)|^{\frac{2N}{N-2}}.$$

Équation

$$\text{(NLW)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = |u|^{\frac{4}{N-2}} u \\ \vec{u}_{\restriction t=0} = (u_0, u_1) \in \mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

où $u : [0, T_+(u)[\times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\quad N \geq 3$. Équation bien posée dans $\mathcal{H} = \dot{H}^1 \times L^2$ [Ginibre-Velo].
Energie conservée:

$$E(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_x u(t)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_t u(t)|^2 - \frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t)|^{\frac{2N}{N-2}}.$$

Changement d'échelle: $\qquad u_\lambda(t,x) = \frac{1}{\lambda^{N/2-1}} u\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right).$
Laisse invariants l'énergie et la norme dans $\mathcal{H}$.
Transformation de Lorentz.
But: classifier les solutions globales ($T_+(u) = +\infty$).

Comportement linéaire

Soit $T_+(u)$ le temps d'intervalle d'existence maximal de u.
u diffuse vers une solution linéaire (*scatters* en anglais) quand $T_+(u) = +\infty$ et il existe v_L solution de (LW) telle que

$$\lim_{t \to +\infty} \|\vec{u}(t) - \vec{v}_L(t)\|_{\mathcal{H}} = 0$$

Comportement linéaire

Soit $T_+(u)$ le temps d'intervalle d'existence maximal de u.
u diffuse vers une solution linéaire (*scatters* en anglais) quand $T_+(u) = +\infty$ et il existe v_L solution de (LW) telle que

$$\lim_{t \to +\infty} \|\vec{u}(t) - \vec{v}_L(t)\|_{\mathcal{H}} = 0$$

Toutes les solutions diffusent dans le cas défocalisant: [Grillakis 90, 92], [Shatah Struwe, 93, 94], [Kapitanski 94], [Ginibre Velo 95], [Nakanishi 95], [Bahouri Shatah 98], [Bahouri Gérard 99], [Tao 06]

Comportement linéaire

Soit $T_+(u)$ le temps d'intervalle d'existence maximal de u.
u diffuse vers une solution linéaire (*scatters* en anglais) quand $T_+(u) = +\infty$ et il existe v_L solution de (LW) telle que

$$\lim_{t\to+\infty} \|\vec{u}(t) - \vec{v}_L(t)\|_{\mathcal{H}} = 0$$

Toutes les solutions diffusent dans le cas défocalisant: [Grillakis 90, 92], [Shatah Struwe, 93, 94], [Kapitanski 94], [Ginibre Velo 95], [Nakanishi 95], [Bahouri Shatah 98], [Bahouri Gérard 99], [Tao 06]

Dans le cas focalisant:

- Données initiales petites $\Longrightarrow$ *Scattering*.
- Existence d'opérateur d'ondes.
- Le *scattering* est stable.

Ondes solitaires

Solutions stationnaires:

(E) $$-\Delta Q = |Q|^{\frac{4}{N-2}} Q, \quad Q \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N).$$

Existence de solutions de (E) d'énergie arbitrairement grande: [W.Y. Ding 1986], [Del Pino, Musso, Pacard, Pistoia 2013].

Ondes solitaires

Solutions stationnaires:

(E) $$-\Delta Q = |Q|^{\frac{4}{N-2}} Q, \quad Q \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N).$$

Existence de solutions de (E) d'énergie arbitrairement grande: [W.Y. Ding 1986], [Del Pino, Musso, Pacard, Pistoia 2013].

Ondes solitaires, ou solitons: si $p = |\mathbf{p}| < 1$:

$$Q_{\mathbf{p}}(t,x) = Q\left(\left(-\frac{t}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} - 1\right)\mathbf{p}\cdot x\right)\mathbf{p} + x\right)$$

$$Q_{\mathbf{p}}(t,x) = Q_{\mathbf{p}}(0, x - t\mathbf{p}).$$

Ondes solitaires

Solutions stationnaires:

(E) $$-\Delta Q = |Q|^{\frac{4}{N-2}} Q, \quad Q \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N).$$

Existence de solutions de (E) d'énergie arbitrairement grande: [W.Y. Ding 1986], [Del Pino, Musso, Pacard, Pistoia 2013].

Ondes solitaires, ou solitons: si $p = |\mathbf{p}| < 1$:

$$Q_{\mathbf{p}}(t,x) = Q\left(\left(-\frac{t}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} - 1\right)\mathbf{p}\cdot x\right)\mathbf{p} + x\right)$$

$$Q_{\mathbf{p}}(t,x) = Q_{\mathbf{p}}(0, x - t\mathbf{p}).$$

Solution de (E) d'énergie minimale (état fondamental):

$$W = \frac{1}{\left(1 + \frac{|x|^2}{N(N-2)}\right)^{\frac{N}{2}-1}}.$$

W est l'unique solution radiale de (E) aux changement d'échelle et de signe près.

Outline

Cas radial, $N = 3$

Théorème.[Duyckaerts Kenig Merle 2012]. *On suppose* $N = 3$*. Soit* u *une solution radiale de (NLW) telle que* $T_+(u) = +\infty$*.*

Cas radial, $N = 3$

Théorème.[Duyckaerts Kenig Merle 2012]. *On suppose* $N = 3$. *Soit* u *une solution* *radiale* *de (NLW) telle que* $T_+(u) = +\infty$. *Alors il existe* $J \geq 0$ *et:*

- v_L *tel que* $\partial_t^2 v_L - \Delta v_L = 0$,
- *des signes* $\iota_j \in \{\pm 1\}$, $j = 1 \ldots J$,
- *des paramètres* $\lambda_j(t)$, $0 < \lambda_1(t) \ll \lambda_2(t) \ll \ldots \ll \lambda_J(t) \ll t$,

tels que:

Cas radial, $N = 3$

Théorème.[Duyckaerts Kenig Merle 2012]. *On suppose* $N = 3$. *Soit* u *une solution radiale de (NLW) telle que* $T_+(u) = +\infty$. *Alors il existe* $J \geq 0$ *et:*

- v_L *tel que* $\partial_t^2 v_L - \Delta v_L = 0$,
- *des signes* $\iota_j \in \{\pm 1\}$, $j = 1 \dots J$,
- *des paramètres* $\lambda_j(t)$, $0 < \lambda_1(t) \ll \lambda_2(t) \ll \dots \ll \lambda_J(t) \ll t$,

tels que:

$$u(t) = v_L(t) + \sum_{j=1}^{J} \frac{\iota_j}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}(t)} W\left(\frac{x}{\lambda_j(t)}\right) + r(t),$$

où: $\lim_{t \to +\infty} \left\| \vec{r}(t) \right\|_{\mathcal{H}} = 0.$

Cas général

Théorème. [TD, Jia, Kenig, Merle, 2016] *On suppose $N \in \{3,4,5\}$. Soit u une solution telle que $T_+(u) = +\infty$ et*

$$\limsup_{t \to +\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Cas général

Théorème. [TD, Jia, Kenig, Merle, 2016] *On suppose $N \in \{3,4,5\}$. Soit u une solution telle que $T_+(u) = +\infty$ et*

$$\limsup_{t\to+\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Alors il existe $t_n \to +\infty$, $J \geq 1$, une solution v_L de (LW), des ondes solitaires $Q^j_{\mathbf{p}_j}$, $j = 1 \ldots J$, et des paramètres $x_{j,n} \in \mathbb{R}^N$, $\lambda_{j,n} > 0$, tels que

$$u(t_n) = v_L(t_n) + \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{\lambda_{j,n}^{\frac{N-2}{2}}} Q^j_{\mathbf{p}_j}\left(0, \frac{x - x_{j,n}}{\lambda_{j,n}}\right) + r_n$$

Cas général

Théorème. [TD, Jia, Kenig, Merle, 2016] *On suppose $N \in \{3,4,5\}$. Soit u une solution telle que $T_+(u) = +\infty$ et*

$$\limsup_{t\to+\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Alors il existe $t_n \to +\infty$, $J \geq 1$, une solution v_L de (LW), des ondes solitaires $Q^j_{\mathbf{p}_j}$, $j = 1\ldots J$, et des paramètres $x_{j,n} \in \mathbb{R}^N$, $\lambda_{j,n} > 0$, tels que

$$u(t_n) = v_L(t_n) + \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{\lambda_{j,n}^{\frac{N-2}{2}}} Q^j_{\mathbf{p}_j}\left(0, \frac{x - x_{j,n}}{\lambda_{j,n}}\right) + r_n$$

(+ décomposition analogue pour $\partial_t u$) où

- $\lim_{n\to+\infty} \|\vec{r}_n\|_{\mathcal{H}} = 0$
- $\forall j, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{j,n}}{t_n} = \mathbf{p}_j, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{j,n}}{t_n} = 0$
- $\forall j,k, \quad j \neq k \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{j,n} - x_{k,n}|}{\lambda_{j,n}} + \frac{\lambda_{j,n}}{\lambda_{k,n}} + \frac{\lambda_{k,n}}{\lambda_{j,n}} = +\infty.$

Cas général

Théorème. [TD, Jia, Kenig, Merle, 2016] *On suppose $N \in \{3,4,5\}$. Soit u une solution telle que $T_+(u) = +\infty$ et*

$$\limsup_{t\to+\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Alors il existe $t_n \to +\infty$, $J \geq 1$, une solution v_L de (LW), des ondes solitaires $Q^j_{\mathbf{p}_j}$, $j = 1 \dots J$, et des paramètres $x_{j,n} \in \mathbb{R}^N$, $\lambda_{j,n} > 0$, tels que

$$u(t_n) = v_L(t_n) + \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{\lambda_{j,n}^{\frac{N-2}{2}}} Q^j_{\mathbf{p}_j}\left(0, \frac{x - x_{j,n}}{\lambda_{j,n}}\right) + r_n$$

(+ décomposition analogue pour $\partial_t u$) où

- $\lim_{n\to+\infty} \|\vec{r}_n\|_{\mathcal{H}} = 0$
- $\forall j, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{j,n}}{t_n} = \mathbf{p}_j, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{j,n}}{t_n} = 0$
- $\forall j,k, \quad j \neq k \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{j,n} - x_{k,n}|}{\lambda_{j,n}} + \frac{\lambda_{j,n}}{\lambda_{k,n}} + \frac{\lambda_{k,n}}{\lambda_{j,n}} = +\infty.$

cf aussi [Jia 2015].

Théorème de classification

- En dessous de l'énergie de W: [Kenig, Merle 2008].
- A l'énergie de W: [TD, Merle 2012].
- Pour des énergies $\leq E(W,0)+\varepsilon$, variétés centrale, stable, instable autour de W: [Krieger, Nakanishi, Schlag] (cf aussi [TD, Kenig, Merle 2012]).

Références

Théorème de classification

- En dessous de l'énergie de W: [Kenig, Merle 2008].
- A l'énergie de W: [TD, Merle 2012].
- Pour des énergies $\leq E(W,0)+\varepsilon$, variétés centrale, stable, instable autour de W: [Krieger, Nakanishi, Schlag] (cf aussi [TD, Kenig, Merle 2012]).

Construction de solutions

- Solutions globales: [Krieger, Schlag 2008], [Donninger, Krieger 2013] ($J=1$), [Jendrej 2016] ($J=2$, radial), [Martel Merle 2015] ($J\geq 2$, non-radial).
- Explosion de type II (solutions bornées avec $T_+<\infty$): [Krieger, Schlag, Tataru 2009], [Hillairet Raphaël 2012], [Krieger Schlag 2014], [Donninger Huang Krieger Schlag 2014], [Jendrej 2015].

Outline

Rappels sur l'équation linéaire

Le comportement asymptotique des solutions de l'équation des ondes linéaire:

$$\text{(LW)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u_L - \Delta u_L = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \vec{u}_{L\restriction t=0} = (u_0, u_1) \in \mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

est bien connu.

Rappels sur l'équation linéaire

Le comportement asymptotique des solutions de l'équation des ondes linéaire:

$$\text{(LW)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u_L - \Delta u_L = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \vec{u}_{L\restriction t=0} = (u_0, u_1) \in \mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

est bien connu. Soit $\not\partial$ la dérivée tangente. Alors:

$$\lim_{t\to+\infty} \int \frac{1}{|x|^2}|u_L(t,x)|^2 + |\not\partial u_L(t,x)|^2 + |u_L(t,x)|^{\frac{2N}{N-2}}\,dx = 0$$

Rappels sur l'équation linéaire

Le comportement asymptotique des solutions de l'équation des ondes linéaire:

$$\text{(LW)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u_L - \Delta u_L = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \vec{u}_{L\restriction t=0} = (u_0, u_1) \in \mathcal{H} = \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

est bien connu. Soit $\not\partial$ la dérivée tangente. Alors:

$$\lim_{t\to+\infty} \int \frac{1}{|x|^2}|u_L(t,x)|^2 + |\not\partial u_L(t,x)|^2 + |u_L(t,x)|^{\frac{2N}{N-2}}\, dx = 0$$

et (voir [Friedlander 70s]) il existe $G_\pm \in L^2(\mathbb{R} \times S^{N-1})$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{S^{N-1}} \left| r^{\frac{N-1}{2}} \partial_r u_L(t, r\omega) \mp G_\pm(r-t,\omega)\right|^2$$

$$+ \left| r^{\frac{N-1}{2}} \partial_t u_L(t, r\omega) + G_\pm(r-t,\omega)\right|^2 drd\omega = 0.$$

Équirepartition pour l'équation linéaire

Theorem [TD, Kenig, Merle 2012]. *On suppose N impair. Soit u_L une solution de (LW). Alors:*

$$\sum_{\pm} \lim_{t\to\pm\infty} \int_{|x|\geq|t|} |\nabla_{t,x} u_L(t,x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0(x)|^2 + (u_1(x))^2 \, dx.$$

Équirepartition pour l'équation linéaire

Theorem [TD, Kenig, Merle 2012]. *On suppose N impair. Soit u_L une solution de (LW). Alors:*

$$\sum_{\pm} \lim_{t\to\pm\infty} \int_{|x|\geq|t|} |\nabla_{t,x} u_L(t,x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0(x)|^2 + (u_1(x))^2\, dx.$$

Preuve par un argument de symétrie, utilisant la formule explicite pour la solution.

Équirepartition pour l'équation linéaire

Theorem [TD, Kenig, Merle 2012]. *On suppose N impair. Soit u_L une solution de (LW). Alors:*

$$\sum_{\pm} \lim_{t\to\pm\infty} \int_{|x|\geq|t|} |\nabla_{t,x} u_L(t,x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0(x)|^2 + (u_1(x))^2 \, dx.$$

Preuve par un argument de symétrie, utilisant la formule explicite pour la solution.
Ne marche pas en dimension paire [Côte, Kenig, Schlag 2014].

Équirepartition pour l'équation linéaire

Theorem [TD, Kenig, Merle 2012]. *On suppose N impair. Soit u_L une solution de (LW). Alors:*

$$\sum_{\pm} \lim_{t\to\pm\infty} \int_{|x|\geq|t|} |\nabla_{t,x} u_L(t,x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0(x)|^2 + (u_1(x))^2\, dx.$$

Preuve par un argument de symétrie, utilisant la formule explicite pour la solution.
Ne marche pas en dimension paire [Côte, Kenig, Schlag 2014].

Question: pour quelles solutions (globales) de (NLW) a-t-on:

$$\sum_{\pm} \liminf_{t\to\pm\infty} \int_{|x|\geq|t|} |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2\, dx > 0?$$

Borne inférieure pour l'équation non-linéaire

Théorème [TD, Kenig, Merle 2012]. *On suppose N impair. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si u est une solution de* (NLW) *avec:*

$$\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon_0,$$

alors:

$$\sum_{\pm} \lim_{t \to \pm\infty} \int_{|x| \geq |t|} |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 \, dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0(x)|^2 + (u_1(x))^2 \, dx.$$

Théorème [TD, Kenig, Merle 2012]. *On suppose N impair. Il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que si u est une solution de* (NLW) *avec:*

$$\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon_0,$$

alors:

$$\sum_{\pm} \lim_{t \to \pm\infty} \int_{|x| \geq |t|} |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 \, dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0(x)|^2 + (u_1(x))^2 \, dx.$$

Démonstration: Soit u_L solution de (LW) de condition initiale (u_0, u_1). Alors:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\vec{u}_L(t) - \vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} \lesssim \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}}^{\frac{N+2}{N-2}}.$$

Equirépartition pour les solutions radiales en 3D

Proposition. *Soit u_L une solution radiale de (LW) en dimension 3 d'espace. Soit $R > 0$. On suppose $u_0 \perp \frac{1}{r}$ dans $\dot{H}^1(\{r > R\})$, i.e $u_0(R) = 0$. Alors:*

$$\sum_{\pm} \lim_{t\to\pm\infty} \int_{R+|t|}^{+\infty} (\partial_{t,r} u_L(t,r))^2 r^2 \, dr \geq \int_R^{+\infty} (\partial_{t,r} u_L(0,r))^2 r^2 \, dr.$$

Equirépartition pour les solutions radiales en 3D

Proposition. *Soit u_L une solution radiale de (LW) en dimension 3 d'espace. Soit $R>0$. On suppose $u_0 \perp \frac{1}{r}$ dans $\dot{H}^1(\{r>R\})$, i.e $u_0(R)=0$. Alors:*

$$\sum_{\pm} \lim_{t\to\pm\infty} \int_{R+|t|}^{+\infty} (\partial_{t,r} u_L(t,r))^2 r^2\, dr \geq \int_R^{+\infty} (\partial_{t,r} u_L(0,r))^2 r^2\, dr.$$

Généralisation à d'autres dimensions impaires: [Kenig, Lawrie, Baoping Liu, Schlag 2015], avec $\frac{N-1}{2}$ conditions d'orthogonalités.

Théorème de rigidité

Théorème *On suppose* $N = 3$. *Soit* u *une solution globale et radiale de (NLW). On suppose:*

$$\forall A > 0, \quad \liminf_{t \to \pm\infty} \int_{|x| \geq A+|t|} |\nabla_{t,x} u|^2 \, dx = 0.$$

Alors $u = 0$ *ou il existe* $\lambda > 0$, $\iota \in \{\pm 1\}$ *tel que* $u(t,x) = \frac{\iota}{\lambda^{1/2}} W\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

Théorème de rigidité

Théorème *On suppose $N = 3$. Soit u une solution globale et radiale de (NLW). On suppose:*

$$\forall A > 0, \quad \liminf_{t \to \pm\infty} \int_{|x| \geq A+|t|} |\nabla_{t,x} u|^2 \, dx = 0.$$

Alors $u = 0$ ou il existe $\lambda > 0$, $\iota \in \{\pm 1\}$ tel que $u(t,x) = \frac{\iota}{\lambda^{1/2}} W\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

$W(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{|x|^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}$, et donc

$$\frac{\iota}{\lambda^{1/2}} W\left(\frac{x}{\lambda}\right) \approx \frac{\sqrt{3}\lambda^{1/2}}{|x|}, \quad |x| \to \infty.$$

Première étape de la preuve: $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{r \to \infty} r u_0(r) = \ell.$$

Preuve de la résolution en soliton I

Soit u une solution radiale telle que $T_{+}(u) = +\infty$.

Preuve de la résolution en soliton I

Soit u une solution radiale telle que $T_+(u) = +\infty$.

Extraction du terme de radiation

Il existe une solution v_L de (LW) telle que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \to +\infty} \int_{|x| \geq t+A} |\nabla_{t,x}(u - v_L)|^2 \, dx = 0.$$

Preuve de la résolution en soliton I

Soit u une solution radiale telle que $T_+(u) = +\infty$.

Extraction du terme de radiation

Il existe une solution v_L de (LW) telle que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t\to+\infty} \int_{|x|\geq t+A} |\nabla_{t,x}(u - v_L)|^2 \, dx = 0.$$

Existence d'une bonne suite de temps

Il existe $t_n \to +\infty$ telle que $\vec{u}(t_n)$ est bornée dans $\mathcal{H}$.

Preuve de la résolution en soliton II

Concentration compacité et utilisation du théorème de rigidité

On suppose $N = 3$. Soit u une solution radiale de (NLW), telle que $T_+(u) = +\infty$ et soit $t_n \to +\infty$ telle que $\vec{u}(t_n)$ est bornée dans $\mathcal{H}$.

Preuve de la résolution en soliton II

Concentration compacité et utilisation du théorème de rigidité

On suppose $N = 3$. Soit u une solution radiale de (NLW), telle que $T_+(u) = +\infty$ et soit $t_n \to +\infty$ telle que $\vec{u}(t_n)$ est bornée dans $\mathcal{H}$.

Alors il existe des solutions U^j, $j \geq 1$, des paramètres $t_{j,n}$, $\lambda_{j,n}$ tels que

$$u(t_n + \tau, x) \approx v_L(t_n + \tau, x) + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{j,n}^{\frac{1}{2}}} U^j \left(\frac{\tau - t_{j,n}}{\lambda_{j,n}}, \frac{x}{\lambda_{j,n}} \right).$$

$$j \neq k \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{j,n}}{\lambda_{k,n}} + \frac{\lambda_{k,n}}{\lambda_{j,n}} + \frac{|t_{k,n} - t_{j,n}|}{\lambda_{j,n}} = +\infty.$$

(Décomposition en profils de Bahouri-Gérard, 1999).

Donnée initiale bien préparée

Lemme. *Soit* $\gamma \in (0,1)$. *Il existe* $\varepsilon = \varepsilon(\gamma) > 0$ *avec la propriété suivante. Soit* u_L *une solution de* (LW) *avec une donnée initiale* (u_0, u_1) *telle que* $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$ *et*

$$\|(\nabla u_0, u_1)\|_{L^2(B^c_{1+\varepsilon} \cup B_{1-\varepsilon})} + \|\not\partial u_0\|_{L^2} + \|\partial_r u_0 + u_1\|_{L^2} \leq \varepsilon \|(\nabla u_0, u_1)\|_{L^2}.$$

Donnée initiale bien préparée

Lemme. *Soit* $\gamma \in (0,1)$. *Il existe* $\varepsilon = \varepsilon(\gamma) > 0$ *avec la propriété suivante. Soit* u_L *une solution de* (LW) *avec une donnée initiale* (u_0, u_1) *telle que* $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$ *et*

$$\|(\nabla u_0, u_1)\|_{L^2(B^c_{1+\varepsilon} \cup B_{1-\varepsilon})} + \|\not\partial u_0\|_{L^2} + \|\partial_r u_0 + u_1\|_{L^2} \leq \varepsilon \|(\nabla u_0, u_1)\|_{L^2}.$$

Alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\int_{|x| \geq \gamma + t} |\nabla_{x,t} u_L|^2(x,t)\, dx \geq \gamma \|(\nabla u_0,\, u_1)\|^2_{L^2}.$$

Donnée initiale bien préparée

Lemme. *Soit* $\gamma \in (0,1)$. *Il existe* $\varepsilon = \varepsilon(\gamma) > 0$ *avec la propriété suivante. Soit* u_L *une solution de* (LW) *avec une donnée initiale* (u_0, u_1) *telle que* $(u_0, u_1) \in \dot{H}^1 \times L^2$ *et*

$$\|(\nabla u_0, u_1)\|_{L^2(B^c_{1+\varepsilon} \cup B_{1-\varepsilon})} + \|\not\partial u_0\|_{L^2} + \|\partial_r u_0 + u_1\|_{L^2} \leq \varepsilon \|(\nabla u_0, u_1)\|_{L^2}.$$

Alors, pour tout $t \geq 0$*,*

$$\int_{|x| \geq \gamma + t} |\nabla_{x,t} u_L|^2(x,t)\, dx \geq \gamma \|(\nabla u_0,\, u_1)\|^2_{L^2}.$$

Application à l'équation des ondes non-linéaire: borne inférieure de l'énergie pour des données initiales bien préparées, et résolution en solitons pour une suite de temps.
Applications aux wave maps critiques: explosion près de l'état fondamental [TD, Jia, Kenig, Merle 2017] (cf [Grinis 2016]).