Komplexe Lie Algebren

N. Perrin

Düsseldorf
Wintersemester 2013-2014

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Lie Algebren

1. Algebren

Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen.

In diesem Kapitel werden wird Algebren einführen. Hier sollte man auf dem folgenden Punkt aufpassen: die Definition einer Algebra ist anders als die, die im Skript Linear Algebra gegeben ist.

1.1. Erste Definitionen

Definition 1.1.1 Eine **Algebra** A über $\mathbb{C}$ is ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer bilinearen Abbildung $A \times A \to A$ (bezeichnet $(x, y) \mapsto xy$).

Mit Symbolen gilt:

- $x(y+z) = xy + xz$ und $(x+y)z = xz + yz$ für alle $(x, y, z) \in A^3$,
- $(ax)(by) = (ab)(xy)$ für alle $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ und $(x, y) \in A^2$.

Bemerkung 1.1.2 Eine Algebra is also *a priori* nicht kommutativ, nicht assoziativ und hat keine Einheit.

Definition 1.1.3 Sei A eine Algebra.

1. Die Algebra A heißt **kommutativ** falls gilt $xy = yx$ für alle $x, y \in A^2$.

2. Die Algebra A heißt **assoziativ** falls gilt $x(yz) = (xy)z$ für alle $x, y, z \in A^3$.

3. Die Algebra A heißt **unitär** falls es ein Element $1_A \in A$ gibt so, dass $1_A \cdot x = x \cdot 1_A = x$ für alle $x \in A$. In diesem Fall heißt 1_A die **Einheit** von A.

Lemma 1.1.4 Sei A eine Algebra. Dann gibt es höchstens eine Einheit in A. □

Beweis. Seien 1_A und $1'_A$ zwei Einheiten in A. Es gilt $1_A = 1_A \cdot 1'_A = 1'_A$. ■

Definition 1.1.5 Sei A eine Algebra und seien $x, y \in A^2$. Der **Kommutator** $[x, y]$ ist definert als

$$[x, y] = xy - yx.$$

Lemma 1.1.6 Eine Algebra A ist genau dann kommutativ, wenn $[x, y] = 0$ für alle $x, y \in A^2$. □

Beweis. Folgt aus der Definition. ∎

Beispiel 1.1.7 1. Sei $A = \mathbb{C}$. Dann ist A mit der üblichen Multiplikation komplexer Zahlen eine assoziative, kommutative Algebra mit 1 als Einheit.

2. Sei $n \geq 2$ und $A = M_n(\mathbb{C})$. Dann ist A mit der üblichen Matrixmultiplikation $(M, N) \mapsto MN$ eine assoziative, nicht kommutative Algebra mit Einheit $1_A = I_n$ die Einheitsmatrix.

3. Sei $A = M_2(\mathbb{C})$. Dann ist A mit Multiplikation $(M, N) \mapsto [M, N]$ eine nicht assoziative, nicht kommutative Algebra ohne Einheit. Diese Algebra ist die Lie Algebra $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$.

1.2. Gegenalgebra, Unteralgebren und Ideale

Lemma 1.2.1 Sei A eine Algebra mit Multiplikation $(x, y) \mapsto xy$.

1. Dann ist die Abbildung $A \times A \to A$ definiert durch $(x, y) \mapsto yx$ bilinear.

2. Insbesondere ist der Vektorraum A mit der Abbildung $(x, y) \mapsto yx$ auch eine Algebra. □

Beweis. Folgt aus der Definition der Bilinearität. ∎

Definition 1.2.2 Sei A eine Algebra mit Multiplikation $(x, y) \mapsto xy$.

Der Vektorraum A mit Multiplikation $(x, y) \mapsto yx$ heißt **Gegenalgebra** und ist A^{op} bezeichnet.

Definition 1.2.3 Sei A eine Algebra.

Ein Unterraum B von A heißt **Unteralgebra** falls $xy \in B$ für alle $x, y \in B^2$.

Lemma 1.2.4 Eine Unteralgebra ist eine Algebra für die Einschränkung des Produktes. □

Beweis. Folgt aus der Definition. ∎

Definition 1.2.5 Sei A eine Algebra.

Ein Unterraum I von A heißt **Ideal** falls $xy \in I$ und $yx \in I$ für alle $x \in I$ und alle $y \in A$.

Lemma 1.2.6 Ein Ideal I von A ist eine Unteralgebra von A. □

Beweis. Folgt aus der Definition. ∎

Proposition 1.2.7 Sei A eine Algebra und sei I eine Ideal.

1. Dann ist die Abbildung $A/I \times A/I \to A/I$, $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \overline{xy}$ wohl definiert.

2. Der Vektorraum A/I mit der Multplikation $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$ ist eine Algebra.

Beweis. Siehe Lemma 5.3.4 und Lemma 5.3.5 im Skript LA II (In diesem Skript hatten wir angenommen, dass A assoziativ und unitär sei. Der Beweis kann man aber ohne änderung in unserem Fall anwenden.) ∎

Definition 1.2.8 Sei A eine Algebra und I eine Ideal. Die Algebra A/I heißt **Quotienalgebra** von A modulo I.

1.3. Algebrahomomorphismen

Definition 1.3.1 Seien A und B zwei Algebren.

1. Eine lineare Abbildung $f : A \to B$ heißt **Algebrahomomorphismus** falls gilt $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $(x, y) \in A^2$.

2. Ein Algebrahomomorphismus heißt **Algebraisomorphismus** falls f bijektiv ist.

Lemma 1.3.2 Sei $f : A \to B$ ein Algebrahomomorphismus. Dann ist $\mathrm{Ker}(f)$ ein Ideal von A. □

Beweis. Seien $x \in \mathrm{Ker}(f)$ und $y \in A$. Es gilt $f(xy) = f(x)f(y) = 0$ und $f(yx) = f(y)f(x) = 0$. Es folgt $xy, yx \in \mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Ker}(f9$ ist ein Ideal. ∎

Lemma 1.3.3 Sei $f : A \to B$ ein Algebraisomorphismus. Dann ist f^{-1} auch ein Algebrahomomorphismus. □

Beweis. Seien $x', y' \in B^2$ und seien $x = f^{-1}(x')$ und $y = f^{-1}(y')$. Es gilt $f(x) = x'$ und $f(y) = y'$. Es gilt also $x'y' = f(x)f(y) = f(xy)$. Es folgt $f^{-1}(x'y') = xy = f^{-1}(x')f^{-1}(y')$. ∎

Beispiel 1.3.4 Sei A eine Algebra und sei I ein Ideal. Dann ist die Abbildung $A \to A/I$ ein Algebrahomomorphismus.

1.4. Produkte von Algebren

Lemma 1.4.1 Seien A und B zwei Algebren. Dann ist $A \times B$ mit dem Produkt $(x, y) \cdot (x', y') = (xx', yy')$ eine Algebra. □

Beweis. Übung. ■

Definition 1.4.2 Seien A und B zwei Algebren. Dann heißt $A \times B$ mit dem Produkt $(x, y) \cdot (x', y') = (xx', yy')$ die **Produktalgebra** von A und B.

Lemma 1.4.3 Die Algebren $A \simeq A \times \{0\}$ und $B \simeq \{0\} \times B$ sind Ideale von $A \times B$ und sind in direkte Summe. □

Beweis. Übung. ■

Lemma 1.4.4 Sei C eine Algebra und A und B zwei Ideale von C die in direkte Summe sind. Dann ist C isomorph zu $A \times B$. □

Beweis. Übung. ■

1.5. Derivationen

Definition 1.5.1 Sei A eine Algebra. Ein endomorphism $D \in \mathrm{End}(A)$ heißt **Derivation** von A falls $D(xy) = xD(y) + D(x)y$ für alle $x, y \in A^2$.

Beispiel 1.5.2 1. Sei $A = \mathbb{C}[X]$ die Polynomalgebra. Sei $D \in \mathrm{End}(A)$ definiert durch

$$D(P) = \frac{dP}{dX}.$$

Dann ist D eine Derivation von A: die Ableitung ist linear also gilt $D \in \mathrm{End}(A)$ und es gilt

$$D(PQ) = \frac{d(PQ)}{dX} = P\frac{dQ}{dX} + \frac{dP}{dX}Q = PD(Q) + D(P)Q.$$

2. Sei $A = M_n(A)$ mit der üblichen Multiplikation. Sei $M \in A$ eine Matrix und sei $D_M \in \mathrm{End}(A)$ definiert durch

$$D_M(N) = [M, N].$$

Dann ist D_M eine Derivation: Es gilt

$$D_M(\lambda N + \mu N') = M(\lambda N + \mu N') - (\lambda N + \mu N')M = \lambda D_M(N) + \mu D_M(N').$$

Die Abbildung D_M ist also linear. Es gilt auch

$$\begin{aligned} D_M(NN') &= M(NN') - (NN')M = MNN' - NMN' + NMN' - NN'M \\ &= D_M(N)N' + ND_M(N'). \end{aligned}$$

Proposition 1.5.3 Der Kern einer Derivation ist eine Unteralgebra.

Beweis. Sei D eine Derivation und seien $x, y \in \mathrm{Ker}(D)$. Dann gilt $D(xy) = D(x)y + xD(y) = 0$ und $xy \in \mathrm{Ker}(D)$. ■

Proposition 1.5.4 Seien D_1 und D_2 zwei Derivationen. Dann ist der Kommutator $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ auch eine Derivation.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](xy) = \;& D_1D_2(xy) - D_2D_1(xy) \\
= \;& D_1(xD_2(y) + D_2(x)y) - D_2(xD_1(y) + D_1(x)y) \\
= \;& xD_1D_2(y) + D_1(x)D_2(y) + D_1D_2(x)y + D_2(x)D_1(y)) \\
& -(xD_2D_1(y) + D_2(x)D_1(y) + D_2D_1(x)y + D_1(x)D_2(y)) \\
= \;& [D_1, D_2](x)y + x[D_1, D_2](y).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $[D_1, D_2]$ eine Derivation ist. ■

2. Lie Algebren

2.1. Definition

Definition 2.1.1 1. Eine Algebra A heißt **Lie Algebra** falls gilt

- $xx = 0$ für alle $x \in A$,
- $x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0$ für alle $(x, y, z) \in A^3$.

2. Für Lie Algebren ist das Produkt oft mit Klammern bezeichnet: $(x, y) \mapsto [x, y]$. Das heißt **Lie Klammer**. Dann sieht die obige Gleichungen so aus:

- $[x, x] = 0$ für alle $x \in A$,
- $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ für alle $(x, y, z) \in A^3$.

Die letzte Gleichung heißt **Jacobi-Identität**.

Bemerkung 2.1.2 Die erste Gleichung zeigt, dass das Produkt antisymmetrisch ist: für alle $(x, y) \in A^2$ gilt $[y, x] = -[x, y]$.

Beispiel 2.1.3

1. Sei $\mathfrak{gl}_2 = M_2(\mathbb{C})$ mit Produkt $(M, N) \mapsto MN - NM$. Dann ist $\mathfrak{gl}_2$ eine Lie Algebra.

2. Sei $\mathfrak{sl}_2 = \{M \in \mathfrak{gl}_2 \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$. Dann ist $\mathfrak{sl}_2$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_2$.

3. Sei
$$\mathfrak{b}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_2 \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$
Dann ist $\mathfrak{b}_2$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_2$.

4. Sei
$$\mathfrak{u}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_2 \mid b \in \mathbb{C} \right\}$$
Dann ist $\mathfrak{u}_2$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{b}_2$. Diese Unteralgebra ist abelsch.

5. Sei
$$\mathfrak{t}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_2 \mid a, c \in \mathbb{C} \right\}$$
Dann ist $\mathfrak{t}_2$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{b}_2$. Diese Unteralgebra ist abelsch.

Beispiel 2.1.4 Sei A eine assoziative Algebra. Dann ist A mit dem Produkt $[x,y] = xy - yx$ eine Lie Algebra: Es gilt $[x,x] = xx - xx = 0$ und

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = \ & x(yz - zy) - (yz - zy)x \\
& + y(zx - xz) - (zx - xz)y \\
& + z(xy - yx) - (xy - yx)z \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

Diese Lie Algebra ist manchmal L_A bezeichnet.

Beispiel 2.1.5 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann ist $\mathrm{End}(V)$, der Vektorraum aller Endomorphismen von V mit dem Produkt $(f,g) \mapsto f \circ g$ eine associative Algebra. Deswegen ist $\mathrm{End}(V)$ mit dem Produkt $(f,g) \mapsto f \circ g - g \circ f$ eine Lie Algebra. Diese Lie Algebra wird $\mathfrak{gl}(V)$ bezeichnet.

Beispiel 2.1.6 Der Unterraum $\mathfrak{sl}(V)$ von Endomorphismen f mit $\mathrm{Tr}(f) = 0$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$.

Beispiel 2.1.7

1. Sei $\mathfrak{gl}_n = M_n(\mathbb{C})$ mit Produkt $(M,N) \mapsto MN - NM$. Dann ist $\mathfrak{gl}_n$ eine Lie Algebra.

2. Sei $\mathfrak{sl}_n = \{M \in \mathfrak{gl}_n \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$. Dann ist $\mathfrak{sl}_n$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n$.

Definition 2.1.8 Sei A eine Algebra mit Produkt $(x,y) \mapsto [x,y]$. Sei $x \in A$. Man schreibt ad_x für die lineare Abbildung $A \to A$ definiert durch $\mathrm{ad}_x(y) = [x,y]$.

Lemma 2.1.9 Sei A eine Algebra und $x \in A$. Dann sind die folgende Eigenschaften äquivalent

1. ad_x ist eine Derivation;
2. $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ für alle $(y,z) \in A^2$. □

Beweis. Die Abbildung ad_x ist genau dann eine Derivation, wenn für alle $y, z \in A^2$ gilt

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]] &= \mathrm{ad}_x([y,z]) \\
&= [y, \mathrm{ad}_x(z)] + [\mathrm{ad}_x(y), z] \\
&= [y,[x,z]] + [[x,y],z].
\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
0 &= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] - [[x,y],z] \\
0 &= [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]].
\end{aligned}$$

Das Lemma folgt. ■

Korollar 2.1.10 Eine Algebra A ist genau dann eine Lie Algebra, wenn ad_x eine Derivation für alle $x \in A$ ist.

Definition 2.1.11 1. Wir schreiben $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ für den Vektorraum aller Derivationen von $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \{D \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \mid D \text{ ist eine Derivation}\}.$$

2. Die Derivationen von $\mathfrak{g}$ der Form ad_x heissen **innere Derivationen**. Die Teilmenge aller inneren Derivationen wird

$$\mathrm{Inner}(\mathfrak{g}) = \{\mathrm{ad}_x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \mid x \in \mathfrak{g}\}$$

bezeichnet.

Proposition 2.1.12 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra.

1. Dann ist $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$.

2. Dann ist $\mathrm{Inner}(\mathfrak{g})$ eine Lie Unteralgebra von $\mathrm{Der}(g)$.

Beweis. 1. Seien $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir zeigen, dass $D_1 + D_2$ und λD_1 Derivationen sind. Es gilt $(D_1 + D_2)(xy) = D_1(xy) + D_2(xy) = D_1(x)y + xD_1(y) + D_2(x)y + xD_2(y) = (D_1 + D_2)(x)y + x(D_1 + D_2)(y)$. Es gilt auch $(\lambda D_1)(xy) = \lambda(D_1(x)y + xD_1(y)) = (\lambda D_1)(x)y + x(\lambda D_1)(y)$. Es folgt, dass $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ einen Unterraum von $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ ist.

Außerdem gilt nach Proposition 1.5.4, dass $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ auch eine Derivation ist. Es folgt, dass $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ ist.

2. Seien $x, y \in \mathfrak{g}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir zeigen, dass $\mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_y = \mathrm{ad}_{x+y}$ und $\lambda \mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{\lambda x}$. Es gilt $(ad_x + \mathrm{ad}_y)(z) = \mathrm{ad}_x(z) + \mathrm{ad}_y(z) = [x, z] + [y, z] = [x + y, z] = \mathrm{ad}_{x+y}(z)$. Es gilt auch $(\lambda ad_x)(z) = \lambda \mathrm{ad}_x(z) = \lambda[x, z] = [\lambda x, z] = \mathrm{ad}_{\lambda x}(z)$. Insbesondere gilt, dass $\mathrm{Inner}(\mathfrak{g})$ einen Unterraum von $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ ist.

Wir zeigen außerdem, dass $[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_{[x,y]}$. Es gilt $[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y](z) = \mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y(z) - \mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_x(z) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [x, [y, z]] + [y, [z, x]] = -[z, [x, y]] = [[x, y], z] = \mathrm{ad}_{[x,y]}(z)$. Es folgt, dass $\mathrm{Inner}(\mathfrak{g})$ eine Lie Unteralgebra von $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ ist.

Definition 2.1.13

1. Ein Algebrahomomorphismus zwischen zwei Lie Algebren heißt Lie Algebra Homomorphismus.

2. Ein Algebraisomorphismus zwischen zwei Lie Algebren heißt Lie Algebra Isomorphismus.

Lemma 2.1.14

1. Eine Unteralgebra einer Lie Algebra ist eine Lie Algebra.

2. Die Quotientalgebra einer Lie Algebra ist eine Lie Algebra.

3. Die Produktalgebra von Lie Algebren ist eine Lie Algebra. □

Beweis. Übung. ∎

Lemma 2.1.15

1. Die Gegenalgebra A^{op} einer Lie Algebra A ist eine Lie Algebra.

2. Die Abbildung $A^{\mathrm{op}} \to A$ definiert durch $x \mapsto -x$ ist ein Isomorphismus is an isomorphism. □

Beweis. Übung. ∎

2.2. Adjungierte Darstellung

Definition 2.2.1 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und sei $x \in \mathfrak{g}$. Die lineare Abbildung $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ heißt **adjungierte Abbildung von** x. Wir werden diese Abbildung manchmal auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ bezeichnen.

Proposition 2.2.2 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Die Abbildung $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definiert durch $x \mapsto \mathrm{ad}\, x$ ist eine Lie Algebrahomomorphismus. Das Bild ist in $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ enthalten.

Außerdem gilt $[D, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}\,(Dx)$ für alle $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Beweis. Nach Jacobi Tdentität gilt $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$. Es folgt für alle $(x,y,z) \in \mathfrak{g}^3$:

$$\mathrm{ad}\, x(\mathrm{ad}\, y(z)) - \mathrm{ad}\, y(\mathrm{ad}\, x(z)) - \mathrm{ad}\,[x,y](z) = 0,$$

Daraus folgt, dass $x \mapsto \mathrm{ad}\, x$ einen Lie Algebrahomomorphismus ist. Wir haben schon gezeigt, dass $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Sei $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Es gilt für alle $x, y \in \mathfrak{g}$:

$$[D, \mathrm{ad}\, x](y) = D(\mathrm{ad}\, x(y)) - \mathrm{ad}\, x(Dy) = D[x,y] - [x, Dy] = [Dx, y] = \mathrm{ad}\,(Dx)(y)$$

wobei wir für die dritte Gleichung die Eigenschaft $D[x,y] = [x, Dy] + [Dx, y]$ benutzt haben. ∎

Definition 2.2.3 Die Abbildung $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ heißt **adjungierte Darstellung**. The Derivationen im Bild von ad sind die innere Derivationen.

Proposition 2.2.4 Sei $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x,y] = 0 \text{ für alle } y \in \mathfrak{g}\}$. Es gilt $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Es gilt $\mathrm{ad}\,(x) = \mathrm{ad}_x$. Sei $y \in \mathfrak{g}$ es gilt $\mathrm{ad}_x(y) = [x,y] = 0$. Also gilt $\mathrm{ad}_x = 0$ und $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$. Umgekehrt, sei $x \ni \mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$. Es gilt $\mathrm{ad}_x = 0$. Also für alle $y \in \mathfrak{g}$ gilt $[x,y] = \mathrm{ad}_x(y) = 0$. Es folgt $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. ∎

2.3. Ideale

Definition 2.3.1 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Ein Ideal von $\mathfrak{g}$ (als Algebra) heisst **Ideal von der Lie Algebra** $\mathfrak{g}$. Mit Symbole: für alle $x \in I$ und $y \in \mathfrak{g}$ gilt $[x, y] \in I$ und $[y, x] \in I$.

Bemerkung 2.3.2 Da $[\ ,\ ]$ antisymmetrisch ist, brauchen wir nur die Enthaltung $[y, x] \in I$. Die Enthaltung $[x, y] = -[y, x] \in I$ folgt (da I eine Unterraum ist).

Lemma 2.3.3 Der Kern eines Lie Algebrahomomorphismus ist ein Ideal. □

Beweis. Folgt aus Lemma 1.3.2. ■

Lemma 2.3.4 Sei I ein Unterraum von einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$. I ist genau dann ein Ideal, wenn $\mathrm{ad}_x(I) \subset I$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ (*i.e.* wenn I invariant für alle innere Derivationen ist). □

Beweis. Folgt aus der Definition. ■

Definition 2.3.5 Ein Unterraum I einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **characteristisch** falls $D(I) \subset I$ für alle $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Beispiel 2.3.6 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Wir setzen

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \text{ für alle } y \in \mathfrak{g}\}.$$

Wir haben schon gesehen, dass $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\,)$. Es folgt, dass $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ eine Ideal von $\mathfrak{g}$ ist.

Wir zeigen , dass $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ eine characteristisches Ideal ist. Sei D eine Derivation und sei $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Es gilt $[D(x), y] = D([x, y]) - [x, D(y)] = 0 - 0 = 0$. Also $D(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Proposition 2.3.7 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal (bzw. ein charakteristisches Ideal). Sei $\mathfrak{b}$ ein charakteristisches Ideal von $\mathfrak{a}$. Dann ist $\mathfrak{b}$ ein Ideal (bzw. ein charakteristisches Ideal) von $\mathfrak{g}$.

Beweis. Sei D eine innere (bzw. algemeine) Derivation von $\mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{a}$ ein Ideal (bzw. charakteristisches Ideal) ist gilt $D(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$. Dann ist $D|_{\mathfrak{a}} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$. Da $\mathfrak{b}$ ein charakteristisches Ideal von $\mathfrak{a}$ ist folgt $D|_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{b}$, also $D(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{b}$. ■

Definition 2.3.8 Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Teimengen von $\mathfrak{g}$. Wir schreiben $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ für die lineare Hülle aller $[x, y]$ mit $x \in \mathfrak{a}$ und $y \in \mathfrak{b}$:

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \langle [x, y] \mid x \in \mathfrak{a} \text{ und } y \in \mathfrak{b} \rangle.$$

Bemerkung 2.3.9 Es gilt $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]$.

Proposition 2.3.10 Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale (bzw. charakteristische Ideale) einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ ein Ideal (bzw. ein charakteristisches Ideal).

Beweis. Sei D eine innere Derivation (bzw. eine allgemeine Derivation) von $\mathfrak{g}$. Sei $x \in \mathfrak{a}$ und $y \in \mathfrak{b}$. Es gilt $D[x, y] = [x, Dy] + [Dx, y] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$. Daraus folgt, dass $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ ein Ideal (bzw. ein charakteristisches Ideal) ist. ∎

Beispiel 2.3.11 Die Algebra $\mathfrak{g}$ selbst ist ein charakteristisches Ideal von $\mathfrak{g}$. Insbesondere ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ein charakteristisches Ideal von $\mathfrak{g}$.

2.4. Abelsche Lie Algebren

Definition 2.4.1 Zwei Elemente x und y einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ **kommutieren** falls $[x, y] = 0$.

Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **abelsch** oder *kommutativ*, falls alle Paar von Elementen kommutieren *i.e.* das Produkt ist die Null-Abbildung.

Beispiel 2.4.2 Sei A eine assoziative Algebra und sei L_A die Lie Algebra A mit Produkt $[x, y] = xy - yx$. Die Algebra A ist genau dann kommutativ, wenn L_A abelsch ist.

Beispiel 2.4.3 Sei $\mathfrak{diag}_n$ die Teilmenge aller diagonalen Matrizen in $M_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_n$. Dann ist $\mathfrak{diag}_n$ eine abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n$.

2.5. Derivierte, steigende zentrale und absteigende zentrale Folgen

Definition 2.5.1 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Das **derivierte Ideal** von $\mathfrak{g}$ ist das charakeristische Ideal $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Lemma 2.5.2 Ein Unterraum $I \subset \mathfrak{g}$ mit $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \subset I$ ist ein Ideal von $\mathfrak{g}$. □

Beweis. Seien $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in I$. Es gilt $[x, y] \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \subset I$. ∎

Definition 2.5.3 Die derivierte Folge ist die Folge $(\mathcal{D}^i\mathfrak{g})_{i\geq 0}$ von charakteristische Ideal mit $\mathcal{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ und $\mathcal{D}^{i+1}\mathfrak{g} = \mathcal{D}(\mathcal{D}^i g) = [\mathcal{D}^i\mathfrak{g}, \mathcal{D}^i\mathfrak{g}]$ für $i \geq 0$.

Definition 2.5.4 Die zentrale absteigende Folge ist die Folge $(\mathcal{C}^i\mathfrak{g})_{i\geq 0}$ von charakteristische Ideale mit $\mathcal{C}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ und $\mathcal{C}^{i+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^i\mathfrak{g}]$ für $i \geq 0$.

Bemerkung 2.5.5 Es gilt $\mathcal{D}^i\mathfrak{g} \subset \mathcal{C}^i\mathfrak{g}$ für alle $i \geq 0$.

Proposition 2.5.6 Sei $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Lie Algebrahomomorphismus.

1. Seien A und B Teilmengen von $\mathfrak{g}$. Es gilt $f([A,B]) = [f(A), f(B)]$.

2. Es gilt $f(\mathcal{D}^i\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^i f(\mathfrak{g})$ und $f(\mathcal{C}^i\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^i f(\mathfrak{g})$.

3. Insbesondere für f surjektiv gilt $f(\mathcal{D}^i\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^i\mathfrak{g}'$ und $f(\mathcal{C}^i\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^i\mathfrak{g}'$.

Beweis. 1. Für $a \in A$ und $b \in B$ gilt $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Da f linear ist gilt $f([A,B]) = [f(A), f(B)]$.

2. Folgt aus 1.

3. Folgt aus 2. ■

Definition 2.5.7 Sei P eine Teilmenge von $\mathfrak{g}$. Der **Zentralisator von** P ist die Teilmenge

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(P) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x,y] = 0 \text{ für alle } y \in P\}.$$

Man schreibt auch $\mathfrak{z}(P)$.

Für $P = \{x\}$ schreibt man $\mathfrak{z}(P) = \mathfrak{z}(x)$.

Lemma 2.5.8 Sei P eine Teilmenge von $\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{z}(P)$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. □

Beweis. Es gilt

$$\mathfrak{z}(P) = \bigcap_{y \in P} \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_y).$$

Da ad_y eine Derivation ist ist $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_y)$ eine Lie Unteralgebra. Das Lemma folgt. ■

Proposition 2.5.9 Sei I ein Ideal (bzw: charakteristisches Ideal) von $\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{z}(I)$ ein Ideal (bzw: charakteristisches Ideal) von $\mathfrak{g}$.

Beweis. Sei D eine innere Derivation (bzw. eine algemeine Derivation). Sei $x \in \mathfrak{z}(I)$ und sei $y \in I$. Es gilt $[Dx, y] = D[x,y] - [x, Dy]$. Da y und Dy in I enthalten sind gilt $[x,y] = 0 = [x, Dy]$. Es folgt $[Dx, y] = 0$. ■

Bemerkung 2.5.10 Das Zentrum ist das charakteristisches Ideal $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Lemma 2.5.11 Sei I ein charakteristisches Ideal von $\mathfrak{g}$ und sei J ein Ideal von $\mathfrak{g}$ mit $J \supset I$.

1. Dann ist J/I ein Ideal von $\mathfrak{g}/I$.

2. Wenn J/I ein charakteristisches Ideal von $\mathfrak{g}/I$ ist, ist J ein charakteristisches Ideal von $\mathfrak{g}$. □

Beweis. 1. Klar.

2. Sei D eine Derivation von $\mathfrak{g}$. Es gilt $D(I) \subset I$. Wir haben eine lineare Abbildung $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ definiert durch $f(x) = \overline{D(x)}$. Für $x \in I$, gilt $D(x) \in I$ und $f(x) = 0$. Daraus folgt, dass es eine lineare Abbildung $\overline{D} : \mathfrak{g}/I \to \mathfrak{g}/I$ gibt mit $\overline{D}(\overline{x}) = f(x) = \overline{D(x)}$. Es ist leicht zu zeigen, dass $\overline{D}$ eine Derivation ist. Für $x \in J$ gilt $\overline{D(x)} = \overline{D}(\overline{x}) \in J/I$, weil J/I ein charakteristisches Ideal ist. Daraus folgt $D(x) \in J$. ∎

Definition 2.5.12 Die **zentrale steigende Folge** ist die Folge $(\mathcal{C}_i\mathfrak{g})_{i\geq 0}$ von charakteristische Ideale mit $\mathcal{C}_0 = 0$ und $\mathcal{C}_{i+1}\mathfrak{g} = p^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_i(\mathfrak{g})))$ für $i \geq 0$, wobei $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathcal{C}_i\mathfrak{g}$ die kanonische Projektion ist.

3. Darstellungen

3.1. Definition

Definition 3.1.1 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und sei V ein Vektorraum. Eine **Darstellung** von $\mathfrak{g}$ in V ist ein Lie Algebrahomomorphismus $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Für $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$ schreiben wir $x_V = \varrho(x) \in \mathrm{End}(V) = \mathfrak{gl}(V)$ und $\varrho(x)(v) = x_V \cdot v$.

Beispiel 3.1.2 1. Die triviale Darstellung ist die Null-Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_1 = \mathfrak{gl}(\mathbb{C})$. Es ist also eine Darstellung in $\mathbb{C}$.

2. Die adjungierte Darstellung $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ ist eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}$ selbst.

Bemerkung 3.1.3 Eine Darstellung is eine lineare Abbildung $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ so, dass für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ und alle $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}&\varrho([x,y])(v) = \varrho(x)\varrho(y)(v) - \varrho(y)\varrho(x)(v) \text{ oder}\\ &[x,y]_V \cdot v = x_v \cdot y_V \cdot v - y_V \cdot x_V \cdot v.\end{aligned}$$

Definition 3.1.4 Eine **Teildarstellung** einer Darstellung V von $\mathfrak{g}$ ist ein Unterraum W von V so, dass für alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt $x_V(W) \subset W$.

Lemma 3.1.5 Sei W eine Teildarstellung von V.

1. Sei $x \in \mathfrak{g}$. Es gibt eine lineare Abbildung $x_{V/W} : V/W \to V/W$ definiert durch $x_{V/W} \cdot \bar{v} = \overline{x_V \cdot v}$.

2. Die Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/W)$ ist eine Darstellung. □

Beweis. 1. Wir haben eine lineare Abbildung $f : V \to V/W$ definiert durch $f(v) = \overline{x_V \cdot v}$. Für $w \in W$ gilt $x_V \cdot w \in W$ also $f(w) = 0$. Daraus folgt, dass es eine lineare Abbildung $x_{V/W}$ gibt.

2. Seien $x, y \in \mathfrak{g}$ und sei $v \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned}[x,y]_{V/W} \cdot \bar{v} &= \overline{[x,y] \cdot v}\\ &= \overline{x_V \cdot y_V \cdot v - y_V \cdot x_V \cdot v}\\ &= \overline{x_V \cdot y_V \cdot v} - \overline{y_V \cdot x_V \cdot v}\\ &= x_{V/W} \cdot \overline{y_V \cdot v} - y_{V/W}\overline{x_V \cdot v}\\ &= x_{V/W} \cdot y_{V/W} \cdot \bar{v} - y_{V/W} \cdot x_{V/W} \cdot \bar{v}\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Abbildung eine Darstellung ist. ∎

Definition 3.1.6 Sei W eine Teildarstellung von V. Die induzierte Darstellung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/W)$ heißt **quotiente Darstellung**.

Definition 3.1.7 1. Seien V und W Darstellungen von $\mathfrak{g}$. Ein **Darstellungshomomorphismus** von V nach W ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ so, dass für alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt $f \circ x_V = x_W \circ f$. Die Menge aller Darstellungshomomorphismen wir $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ bezeichnet.

2. Ein bijektiver Darstellungshomomorphismus heißt **Darstellungsisomorphismus**.

Definition 3.1.8 Eine Darstellung V einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **einfach** wenn die einzige Teildarstellungen von V gleich 0 oder V sind.

Definition 3.1.9 Sei V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ und sei P eine Teilmenge von V. Der **Stabilisator von** P ist die Teilmenge

$$\mathfrak{g}_P = \{x \in \mathfrak{g} \mid x_V \cdot v = 0 \text{ für alle } v \in P\ \}.$$

Für $P = \{v\}$ schreiben wir $\mathfrak{g}_v = \mathfrak{g}_P$.

Lemma 3.1.10 Sei V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ und sei P eine Teilmenge von V. Dann ist $\mathfrak{g}_P$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. □

Beweis. Seien $x, y \in \mathfrak{g}_P$ und sei $v \in P$. Es gilt $[x, y]_V \cdot v = x_V \cdot y_V \cdot v - y_V \cdot x_V \cdot v = 0$. ∎

Lemma 3.1.11 Sei $f : V \to W$ ein Darstellungshomomorphismus. Dann ist $\mathrm{Ker}(f)$ eine $>$Teildarstellung von V. □

Beweis. Sei $w \in \mathrm{Ker}(f)$ und sei $x \in \mathfrak{g}$. Es gilt $f(x_V \cdot v) = x_W \cdot f(v) = x_W \cdot 0 = 0$. Daraus folgt $x_V \cdot v \in \mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Ker}(f)$ ist eine Teildarstellung. ∎

3.2. Operationen über Darstellungen

3.2.1. Direkte Summe

Lemma 3.2.1 Seien $\varrho_1 : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{gl}(V_1)$ und $\varrho_2 : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(V_2)$ zwei Darstellungen.

1. Dann ist die Abbildung $\varrho_1 \times \varrho_2 : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(V_1) \times \mathfrak{gl}(V_2) \subset \mathfrak{gl}(V_1 \oplus \mathfrak{g}_2)$ eine Darstellung.

2. Für $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}$ ist die Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ definiert durch $x \mapsto (x, x)$ ein Lie Algebrahomomorphismus. Insebesondere ist die Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(V_1) \times \mathfrak{gl}(V_2) \subset \mathfrak{gl}(V_1 \oplus \mathfrak{g}_2)$ eine Darstellung. □

Beweis. Übung. ∎

Definition 3.2.2 Seien $\varrho_1 : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{gl}(V_1)$ und $\varrho_2 : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(V_2)$ zwei Darstellungen. Die **direkte Summe Darstellung** von V_1 und V_2 ist die Darstellung

$$\varrho_1 \oplus \varrho_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1 \oplus V_2)$$

definiert im Lemma 3.2.1.

Expliziert ist diese Darstellung auf $V_1 \oplus V_2$ definiert durch $x_{V_1 \oplus V_2} = x_{V_1} + x_{V_2}$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ *i.e.* für alle $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V_1$ und $w \in V_2$ gilt

$$x_{V_1 \oplus V_2}(v + w) = x_{V_1}(v) + x_{V_2}(w).$$

Definition 3.2.3 Sei V eine Darstellung.

1. Die Darstellung V heißt **reduzibel** falls V eine direkte Summe Darstellung $V = W \oplus U$ ist mit $W \neq 0$ und $U \neq 0$.

2. Eine nicht reduzibel Darstellung heißt **irreduzibel**.

3. Die Darstellung V heißt **halbeinfach** falls V eine direkte Summe von einfache Darstellungen ist.

3.3. Morphismen

Für V und W zwei Vektorräume schreiben wir $\mathrm{Hom}(V, W)$ für den Vektorraum aller lineare Abbildungen $V \to W$.

Lemma 3.3.1 Seien $\varrho_1 : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{gl}(V_1)$ und $\varrho_2 : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(V_2)$ zwei Darstellungen.

1. Seien $x \in \mathfrak{g}_1$, $y \in \mathfrak{g}_2$ und $f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$. Dann ist $(x, y)_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)} : \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \to \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ definiert durch

$$(x, y)_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)} \cdot f = y_{v_2} \circ f - f \circ x_{V_1}$$

eine lineare Abbildung.

2. Die Abbildung $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(\mathrm{Hom}(V_1, V_2))$ definiert durch $(x, y) \mapsto (x, y)_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}$ ist eine Darstellung.

3. Für $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}$ ist die Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathrm{Hom}(V_1, V_2))$ definiert durch $x \mapsto (x, x)_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}$ eine Darstellung. □

Beweis. 1. Übung.

2. Es gilt $[(x, y), (x', y')] = ([x, x'], [y, y'])$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
[(x, y), (x', y')]_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)} \cdot f = & \ ([x, x'], [y, y'])_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)} \cdot f \\
= & \ [y, y']_{V_2} \circ f - f \circ [x, x']_{V_1} \\
= & \ y_{V_2} \circ y'_{V_2} \circ f - y'_{V_2} \circ y_{V_2} \circ f \\
& -f \circ x_{V_1} \circ x'_{V_1} + f \circ x'_{V_1} \circ x_{V_1}.
\end{aligned}$$

Sei $g = ((x,y)_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}(x',y')_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)} - (x',y')_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}(x,y)_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}) \cdot f$. Es gilt

$$\begin{aligned} g = \;& f \circ x'_{V_1} \circ x_{V_1} - y'_{V_2} \circ f \circ x_{V_1} - y_{V_2} \circ f \circ x'_{V_1} + y_{V_2} \circ y'_{V_2} \circ f \\ & -(f \circ x_{V_1} \circ x'_{V_1} - y_{V_2} \circ f \circ x'_{V_1} - y'_{V_2} \circ f \circ x_{V_1} + y'_{V_2} \circ y_{V_2} \circ f \\ = \;& -f \circ [x_{V_1}, x'_{V_1}] + [y_{V_2}, y'_{V_2}] \circ f \\ = \;& [(x,y),(x',y')]_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)} \cdot f. \end{aligned}$$

Daraus folgt 2.

3. Folgt aus 2, weil $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ definiert durch $x \mapsto (x,x)$ ein Lie Algebrahomomorphimus ist. ■

Definition 3.3.2 Seien V_1 und V_2 zwei Darstellungen von $\mathfrak{g}$. Die Darstellung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathrm{Hom}(V_1,V_2))$ definiert durch $x \mapsto (x,x)_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}$ heißt die **Morphismus Darstellung** und wird $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ bezeichnet.

Für $f \in \mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ und $x \in \mathfrak{g}$ gilt

$$x_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)} \cdot f = x_{V_2} \circ f - f \circ x_{V_1}.$$

Für $f \in \mathrm{Hom}(V_1,V_2)$, $v_1 \in V_1$ und $x \in \mathfrak{g}$ gilt

$$(x_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)} \cdot f)(v_1) = x_{V_2} \cdot f(v_1) - f(x_{V_1} \cdot v_1).$$

Definition 3.3.3 Sei V eine Darstellung. Die Darstellung $V^\vee = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})$ heißt die **duale Darstellung**. Für $x \in \mathfrak{g}$ und $\varphi \in V$ gilt $x_{V^\vee} \cdot \varphi = -\varphi \circ x_V$.

3.4. Tensorprodukt

Für V und W zwei Vektorräume schreiben wir $V \otimes_{\mathbb{C}} W = V \otimes W$ für das Tensorprodukt von V und W.

Lemma 3.4.1 Seien $\varrho_1 : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{gl}(V_1)$ und $\varrho_2 : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(V_2)$ zwei Darstellungen.

1. Seien $x \in \mathfrak{g}_1$, $y \in \mathfrak{g}_2$. Dann ist die Abbildung $x_{V_1} \times x_{V_2} : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$ definiert durch $(v_1,v_2) \mapsto (x_{V_1} \cdot v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x_{V_2} \cdot v_2)$ eine Bilinearabbildung. Insbesondere gibt es eine lineare Abbildung $(x,y)_{V_1 \otimes V_2} : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$ so, dass

$$(x,y)_{V_1 \otimes V_2} \cdot (v_1 \otimes v_2) = (x_{V_1} \cdot v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (x_{V_2} \cdot v_2).$$

2. Die Abbildung $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(\mathrm{Hom}(V_1,V_2))$ definiert durch $(x,y) \mapsto (x,y)_{V_1 \otimes V_2}$ ist eine Darstellung.

3. Für $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}$ ist die Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ definiert durch $x \mapsto (x,x)_{V_1 \otimes V_2}$ eine Darstellung. □

Beweis. 1. Übung.

2. Es gilt $[(x,y),(x',y')] = ([x,x'],[y,y'])$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
[(x,y),(x',y')]_{V_1\otimes V_2}\cdot(v_1\otimes v_2) &= ([x,x'],[y,y'])_{V_1\otimes V_2}\cdot(v_1\otimes v_2)\\
&= ([x,x']_{V_1}\cdot v_1)\otimes v_2 + v_1\otimes([y,y']_{V_2}\cdot v_2)\\
&= ([x_{V_1},x'_{V_1}]\cdot v_1)\otimes v_2 + v_1\otimes([y_{V_2},y'_{V_2}]\cdot v_2)\\
&= (x_{V_1}\cdot x'_{V_1}\cdot v_1)\otimes v_2 - (x'_{V_1}\cdot x_{V_1}\cdot v_1)\otimes v_2\\
&\quad + v_1\otimes(y_{V_2}\cdot y'_{V_2}\cdot v_2) - v_1\otimes(y'_{V_2}\cdot y_{V_2}\cdot v_2)
\end{aligned}$$

Es gilt auch

$$\begin{aligned}
[(x,y)_{V_1\otimes V_2},(x',y')_{V_1\otimes V_2}]\cdot(v_1\otimes v_2) &= (x,y)_{V_1\otimes V_2}\cdot(x',y')_{V_1\otimes V_2}\cdot(v_1\otimes v_2)\\
&\quad -(x',y')_{V_1\otimes V_2}\cdot(x,y)_{V_1\otimes V_2}\cdot(v_1\otimes v_2)\\
&= (x_{V_1}\cdot x'_{V_1}\cdot v_1)\otimes v_2 + (x_{V_1}\cdot v_1)\otimes(y'_{V_2}\cdot v_2)\\
&\quad +(x'_{V_1}\cdot v_1)\otimes(y_{V_2}\cdot v_2) + v_1\otimes(y_{V_2}\cdot y'_{V_2}\cdot v_2)\\
&\quad -(x'_{V_1}\cdot x_{V_1}\cdot v_1)\otimes v_2 - (x'_{V_1}\cdot v_1)\otimes(y_{V_2}\cdot v_2)\\
&\quad -(x_{V_1}\cdot v_1)\otimes(y'_{V_2}\cdot v_2) - v_1\otimes(y'_{V_2}\cdot y_{V_2}\cdot v_2)\\
&= ([x_{V_1},x'_{V_1}]\cdot v_1)\otimes v_2 + v_1\otimes([y_{V_2},y'_{V_2}]\cdot v_2)\\
&= [(x,y),(x',y')]_{V_1\otimes V_2}\cdot(v_1\otimes v_2).
\end{aligned}$$

Da $(v_1,v_2)_{v_1\in V_1, v_2\in V_2}$ ein EZS ist folgt 2.

3. Folgt aus 2, weil $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ definiert durch $x\mapsto(x,x)$ ein Lie Algebrahomomorphimus ist. ∎

Definition 3.4.2 Seien V_1 und V_2 zwei Darstellungen von $\mathfrak{g}$. Die Darstellung $\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V_1\otimes V_2))$ definiert durch $x\mapsto x_{V_1\otimes V_2}=(x,x)_{V_1\otimes V_2}$ heißt **Tensorprodukt Darstellung** .

Für $v_1\otimes v_2\in V_1\otimes V_2$ und $x\in\mathfrak{g}$ gilt

$$x_{V_1\otimes V_2}\cdot v_1\otimes v_2 = x_{V_1}\cdot v_1\otimes v_2 + v_1\otimes x_{V_2}\cdot v_2.$$

Lemma 3.4.3 Seien V_1 und V_2 zwie Darstellungen von $\mathfrak{g}$. Wir betrachten die duale Darstellung $V_1^\vee$, die Tensorprodukt-Darstellung $V_1^\vee\otimes V_2$ und die Morphismus-Darstellung $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$.

Die Abbildung $\Phi: V_1^\vee\otimes V_2\to\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ definiert durch $\Phi(\varphi\otimes v_2)(v_1)=\varphi(v_1)v_2$ ist ein Darstellungsisomorphismus. □

Beweis. Das diese Abbildung wohl definiert ist und ein Isomorphismus von Vetorräume findet man im Skript LA II. Wir zeigen, dass es ein Darstellungshomomorphismus ist. Seien $x\in\mathfrak{g}$, $v_1\in V_1$, $\varphi\in V_1^\vee$ und $v_2\in V_2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Phi(x_{V_1^\vee\otimes V_2}\cdot(\varphi\otimes v_2))(v_1) &= \Phi((x_{V_1^\vee}\cdot\varphi)\otimes v_2 + \varphi\otimes(x_{V_2}\cdot v_2))(v_1)\\
&= \Phi((-\varphi\circ x_{V_1})\otimes v_2 + \varphi\otimes(x_{V_2}\cdot v_2))(v_1)\\
&= (-\varphi\circ x_{V_1})(v_1)v_2 + \varphi(v_1)(x_{V_2}\cdot v_2).
\end{aligned}$$

Es gilt auch

$$\begin{aligned}(x_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)} \cdot \Phi(\varphi \otimes v_2))(v_1) &= (x_{V_2} \circ \Phi(\varphi \otimes v_2) - \Phi(\varphi, v_2) \circ x_{V_1})(v_1)\\ &= x_{V_2} \cdot (\varphi(v_1)v_2) - \varphi(x_{V_1} \cdot v_1)v_2\end{aligned}$$

Das Lemma folgt. ∎

3.5. Tensor Algebra, symmetrische Algebra und äußere Algebra

Nach Induktion zeigt man.

Proposition 3.5.1 Seien $(V_i)_{i\in[1,n]}$ Darstellungen einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist das Tensorprodukt $V = \otimes_{i=1}^n V_i$ auch eine Darstellung von $\mathfrak{g}$.

Für $x \in \mathfrak{g}$ und $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V$ gilt

$$x_V \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_1 \otimes \cdots \otimes (x_{V_i} \cdot v_i) \otimes \cdots \otimes v_n.$$

Insbesondere, falls V eine Dastellung von $\mathfrak{g}$ ist, ist $V^{\otimes n}$ eine Darstellung von $\mathfrak{g}$. Daraus folgt, dass die Tensor-Algebra

$$T(V) = \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$$

eine (unendlich-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist.

Lemma 3.5.2 Sei V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$.

1. Seien $I = (v \otimes v' - v' \otimes v \mid v, v' \in V)$ und $J = (v \otimes v \mid v \in V)$. Diese Ideale von $T(V)$ sind Teildarstellungen.

2. Die Quotienten $S(V) = T(V)/I$ und $\bigwedge(V) = T(V)/J$ sind Darstellungen von $\mathfrak{g}$.

3. Die Unterräume $S_n(V) = V^{\otimes n}/(V^{\otimes n} \cap I)$ und $\bigwedge^n(V) = V^{\otimes n}/(V^{\otimes n} \cap J)$ sind Teildarstellungen von $S(V)$ und $\bigwedge(V)$. Für $x \in \mathfrak{g}$. □

Beweis. 2. und 3. folgen aus 1. Seien $v, v' \in V$ und sei $x \in \mathfrak{g}$. Es gilt

$$\begin{aligned}x_{T(V)} \cdot (v \otimes v' - v' \otimes v) &= x_V \cdot v \otimes v' + v \otimes x_V \cdot v' - x_V \cdot v' \otimes v - v' \otimes x_V \cdot v\\ &= x_V \cdot v \otimes v' - v' \otimes x_V \cdot v + v \otimes x_V \cdot v' - x_V \cdot v' \otimes v \in I\end{aligned}$$

Es gilt auch

$$\begin{aligned}x_{T(V)} \cdot (v \otimes v) &= (x_V \cdot v) \otimes v + v \otimes (x_V \cdot v)\\ &= \tfrac{1}{2}((v + x_V \cdot v) \otimes (v + x_V \cdot v) - x_V \cdot v \otimes x_V \cdot v - v \otimes v) \in J.\end{aligned}$$

3.6. Multilineare Abbildungen

Sei $n-\mathrm{Hom}(\times_{i=1}^n V_i, V_{n+1})$ der Vektorraum aller n-linearen Abbildungen. Es gibt ein Isomorphimus von Vektorräume $n-\mathrm{Hom}(\times_{i=1}^n V_i, V_{n+1}) \simeq \mathrm{Hom}(\otimes_{i=1}^n V_i, V_{n+1})$ definiert durch $f \mapsto L_f$ wobei

$$L_f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_1, \cdots, v_n).$$

Mit der Morphismus-Darstellung haben wir als Korollar.

Korollar 3.6.1 Seien $(V_i)_{i\in[1,n+1]}$ Darstellungen einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist der Vektorraum aller multilinearen Abbildungen

$$V = \mathrm{Hom}(\otimes_{i=1}^n V_i, V_{n+1}) = n-\mathrm{Hom}(\times_{i=1}^n V_i, V_{n+1})$$

eine Darstellung von $\mathfrak{g}$.

Für $x \in \mathfrak{g}$, $f \in V$ und $(v_1, \cdots, v_n) \in \times_{i=1}^n V_i$ gilt

$$(x_V \cdot f)(v_1, \cdots, v_n) = x_{V_{n+1}} \cdot f(v_1, \cdots, v_n) - \sum_{i=1}^n f(v_1, \cdots, x_{V_i} \cdot v_i, \cdots, v_n).$$

Beispiel 3.6.2 Sei V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ und sei $\mathrm{Bil}(V) = 2-\mathrm{Hom}(V \times V, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}(V \otimes V, \mathbb{C})$ der Vektorraum aller bilinearen Formen. Sei $B \in \mathrm{Bil}(V)$. Nach Lemma 3.1.10 ist die Teilmenge

$$\mathfrak{g}_B = \{x \in \mathfrak{g} \mid x_{\mathrm{Bil}(V)} \cdot B = 0\}$$

eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Die Gleichung $x_{\mathrm{Bil}}(V) \cdot B = 0$ kann man hier umschreiben in

$$B(x_V \cdot v, v') + B(v, x_V \cdot v') = 0 \text{ für alle } v \text{ und } v'.$$

Beispiel 3.6.3 Sei $V = \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{gl}_n$ mit der Identität-Darstellung $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$. Sei B das standard Skalarprodukt definiert durch

$$b((x_i)_{i\in[1,n]}, (y_i)_{i\in[1,n]}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y$$

wobei $X^T = (x_1, \cdots, x_n)$ und $Y^T = (y_1, \cdots, y_n)$.

Die obige Gleichung gibt für $x = M \in \mathfrak{gl}_n$:

$$\begin{aligned} 0 &= B(MX, Y) + B(X, MY) \\ &= (MX)^T Y + X(MY) \\ &= X^T M^T Y + X^T MY \\ &= X^T(M^T + M)Y \text{ für alle } X \text{ und } Y. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu $M^T + M = 0$ oder $M^T = -M$. Daraus folgt, dass die Teilmenge

$$\mathfrak{so}_n = \mathfrak{g}_B = \{M \in \mathfrak{gl}_n \mid M^T - M\}$$

eine Lie Algebra ist.

Beispiel 3.6.4 Sei $V = \mathbb{C}^{2n}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{gl}_{2n}$ mit der Identität-Darstellung $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{2n} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^{2n})$. Sei B die standard symplektische Form definiert durch

$$B((x_i)_{i\in[1,2n]}, (y_i)_{i\in[1,2n]}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_{2n+1-i} - \sum_{i=1}^{n} x_{2n+1-i} y_i = X^T \Omega Y$$

wobei

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} \text{ und } I_r \in \mathfrak{gl}_r \text{ die Einheitsmatrix ist.}$$

Dann ist $\mathfrak{sp}_{2n} = \mathfrak{g}_B$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_{2n}$. Man kann $\mathfrak{sp}_{2n}$ explizit bestimmen. Es gilt

$$\mathfrak{sp}_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ mit } A, B, C, D \in \mathfrak{gl}_n \mid D = -A^T,\ B = B^T \text{ und } C = C^T \right\}.$$

Beispiel 3.6.5 Es gilt

$$\mathfrak{sp}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_2 \right\} = \mathfrak{sl}_2.$$

3.7. Invarianten

Definition 3.7.1 Sei V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$. Ein Element $v \in V$ heißt **invariant** falls $\mathfrak{g}_v = \mathfrak{g}$ *i.e.* $x_V \cdot v = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$.

Die Menge aller invarianten Vektoren in V wird $V^{\mathfrak{g}}$ bezeichnet.

Proposition 3.7.2 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und I ein Ideal von $\mathfrak{g}$. Sei V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$. Dann ist V eine Darstellung von I und V^I ist eine $\mathfrak{g}$-Teildarstellung von V.

Beweis. Die Teilmenge V^I ist ein Unterraum von V. Außerdem gilt für $x \in \mathfrak{g}$, $y \in I$ und $v \in V^I$: $y_V \cdot (x_V \cdot v) = [y, x]_V \cdot v + x_V \cdot (y_V \cdot v) = 0$, weil I ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist. ∎

Beispiel 3.7.3 Seien V und W Darstellungen von $\mathfrak{g}$ und sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Der Vektor f ist genau dann invariant, wenn $x_{\mathrm{Hom}(V,W)} \cdot f = 0$ *i.e.* $x_V \circ f - f \circ x_W = 0$ *i.e.* $x_V \circ f = f \circ x_W$. Also ist der Vektor f genau dann invariant, wenn f ein Darstellungshomomorphismus ist. Es gilt

$$\mathrm{Hom}(V, W)^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W).$$

Beispiel 3.7.4 Sei V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$. Es gibt in $\mathrm{Hom}(V,V)$ eine Invariante: die Identität-Abbildung. Es gilt immer: $x_V \circ \mathrm{Id}_V - \mathrm{Id}_V \circ x_V = 0$.

Da $\mathrm{Hom}(V,V)$ und $V^\vee \otimes V$ als Darstellungen isomorph sind, gibt es in $V^\vee \otimes V$ eine Invariante. Wir schreiben $c_V^\otimes$ für diese Invariante. Man kann $c_V^\otimes$ explizit schreiben. Sei $(v_i)_{i\in[1,n]}$ eine Basis von V und sei $(v_i^\vee)_{i\in[1,n]}$ die duale Basis. Es gilt

$$c_V^\otimes = \sum_{i=1}^n v_i^\vee \otimes v_i.$$

Man sollte hier bemerken, dass das Element $c_V^\otimes$ nicht von der Basis $(v_i)_{i\in[1,n]}$ abhängt.

Beispiel 3.7.5 Sei V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ und sei let $B \in \mathrm{Hom}(V \times V, \mathbb{C})$ eine Bilinearform. Dann ist B ein Element aus $\mathrm{Hom}(V \otimes V, \mathbb{C}) \simeq V^\vee \otimes V^\vee \simeq \mathrm{Hom}(V, V^\vee)$. Die Abbildung ist so definiert: $B \mapsto (f_B : V \to V^\vee)$ wobei $f_B(v) : V \to \mathbb{C}$ mit $f_B(v)(v') = B(v,v')$.

Die Bilinearform B ist genau dann invariante, wenn die Abbildung $f_B : V \to V^\vee$ invariante ist *i.e.* f_B ist ein Darstellungshomomorphismus:

$$\mathrm{Hom}(V \times V, \mathbb{C})^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V^\vee).$$

Insbesondere für V endlich-dimensional und B nicht ausgeartet ist $f_B : V \to V^\vee$ ein Darstellungshomomorphismus.

Es gibt eine Invariante $c_V^\otimes \in V^\vee \otimes V$ und da $V^\vee \simeq V$ als Darstellung haben wir auch eine Invariante $c_V \in V \otimes V$.

Für $(v_i)_{i\in[1,n]}$ eine Basis von V dann ist das System $(v_i')_{i\in[1,n]}$ definiert mit $B(v_i, v_j') = \delta_{i,j}$ eine Basis und es gilt

$$c_V = \sum_{i=1}^n v_i' \otimes v_i.$$

Man sollte hier bemerken, dass das Element $c_V^\otimes$ nicht von der Basis $(v_i)_{i\in[1,n]}$ abhängt.

3.8. Invariante Bilinearformen

Sei $\mathrm{ad} : g \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ die adjungierte Darstellung. Dann ist $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ eine Darstellung. Daraus folgt, dass $V = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathbb{C})$ eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist.

Definition 3.8.1 Eine Bilinearform B auf $\mathfrak{g}$ heißt *invariant* falls B eine Invariante von $V = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathbb{C})$ ist: $B \in V^{\mathfrak{g}}$.

Bemerkung 3.8.2 Eine Bilinear form $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ ist genau dann invariant, wenn $B(x_{\mathfrak{g}} \cdot y, z) + B(y, x_{\mathfrak{g}} \cdot z) = 0$ *i.e.*

$$B([x,y],z) + B(x,[y,z]) = 0$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Definition 3.8.3 Eine Bilinearform B auf $\mathfrak{g}$ heißt *völlig invariant* falls für alle Derivationen $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ gilt

$$B(Dx, y) + B(x, Dy) = 0$$

füe alle $x, y \in \mathfrak{g}$.

Proposition 3.8.4 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und sei I ein Ideal. Sei B eine invariante symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{g}$.

1. Der Unterraum $I^{\perp}$ (für B) ist ein Ideal von $\mathfrak{g}$.

2. Sei I charakteristisch und sei B völlig invariant. Dann ist $I^{\perp}$ auch charakteristisch.

3. Sei B nicht ausgeartet. Dann ist $I \cap I^{\perp}$ abelsch.

Beweis. Wir zeigen 1. und 2. Sei D eine innere (bzw. allgemeine) Derivation of $\mathfrak{g}$ und seien $x \in I^{\perp}$ und $y \in I$. Es gilt $B(Dx, y) = -B(x, Dy) = 0$. Daraus folgt $Dx \in I^{\perp}$.

3. Sei $x, y \in I \cap I^{\perp}$ und sei $z \in \mathfrak{g}$. Es gilt $B([x,y],z) = B(x,[y,z]) = 0$, weil $x \in I$ und $[y,z] \in I^{\perp}$ sind orthogonal für B. Diese Gleichung gilt für alle $z \in \mathfrak{g}$. Da B nicht ausgeartet ist gilt $[x,y] = 0$. ∎

Definition 3.8.5 Sei V eine endlich-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$. Die **Bilinearform zur Darstellung** V ist die Bilineareform definiert wie folgt:

$$(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(x_V y_V).$$

Wenn V die adjungierte Darstellung ist, heißt diese Bilinearform die **Killing-Form** und wird $\kappa_{\mathfrak{g}}$ bezeichnet.

Beispiel 3.8.6 Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ und sei $\mathcal{B} = (e, h, f)$ die Basis von $\mathfrak{sl}_2$ definiert durch

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In dieser Basis gilt

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}_e) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}_h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}\,_f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\kappa_{\mathfrak{g}}(e,e) = 0$, $\kappa_{\mathfrak{g}}(e,h) = 0$, $\kappa_{\mathfrak{g}}(e,f) = 4$, $\kappa_{\mathfrak{g}}(h,h) = 8$, $\kappa_{\mathfrak{g}}(h,f) = 0$ und $\kappa_{\mathfrak{g}}(f,f) = 0$. Insbesondere gilt

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Killing-Form ist nicht ausgeartet.

Proposition 3.8.7 Sei V eine endlich-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$. Dann ist die Bilinearform zu V invariant.

Beweis. Seien $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}([x,y]_V z_V) &= \mathrm{Tr}(x_V y_V z_V) - \mathrm{Tr}(y_V x_V z_V) = \mathrm{Tr}(x_V y_V z_V) - \mathrm{Tr}(x_V z_V y_V) \\ &= \mathrm{Tr}(x_V [y,z]_V)\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. ∎

Proposition 3.8.8 Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie Algebra und sei I ein Ideal von $\mathfrak{g}$. Seien $\kappa_{\mathfrak{g}}$ die Killing-Form von $\mathfrak{g}$ und κ_I die Killing-Form von I. Dann gilt $\kappa_I = \kappa_{\mathfrak{g}}|_I$.

Beweis. Seien $x, y \in I$. Wir bestimmen die Spur Tr von $\mathrm{ad} x \mathrm{ad} y$ als Endomorphismus von I und von $\mathfrak{g}$. Sei $u = \mathrm{ad}\,_x \mathrm{ad}\,_y \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Sei W ein Komplement von I in $\mathfrak{g}$ *i.e.* $\mathfrak{g} = I \oplus W$. Seien $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}''$ Basen von I und W. Dann ist $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}''$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Da I ein Ideal ist gilt $u(\mathfrak{g}) \subset I$. Insbesondere gilt

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\kappa_{\mathfrak{g}}(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)) = \mathrm{Tr}(u|_I) = \kappa_I(x,y)$. ∎

Proposition 3.8.9 Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie Algebra. Dann ist die Killing-Form $\kappa_{\mathfrak{g}}$ völlig invariant.

Beweis. Sei D eine Derivation von $\mathfrak{g}$ und seien $x, y \in \mathfrak{g}$.

Lemma 3.8.10 Sei D eine Derivation von $\mathfrak{g}$. Dann gibt es eine Lie Algebra $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}x_0$ so, dass für $x \in \mathfrak{g}$ gilt $Dx = [x_0, x]$ und so, dass $\mathfrak{g}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}'$ ist. □

Beweis. Wir definieren ein Produkt auf $\mathfrak{g}'$ durch

$$[x+\lambda x_0, y+\mu x_0] = [x,y] + \lambda Dy - \mu Dx.$$

Wir zeigen, dass dieses Produkt ein Lie Algebra-Produkt ist. Zuerst gilt die Gleichung $[x+\lambda x_0, x+\lambda x_0] = [x,x] + \lambda Dx - \lambda Dx = 0$. Es gilt auch

$$\begin{aligned}
[x+\lambda x_0,[y+\mu x_0, z+\nu x_0]] = & \ [x+\lambda x_0,[y,z]+\mu Dz - \nu Dy]] \\
= & \ [x,[y,z]+\mu Dz-\nu Dy]] + \lambda D[y,z] \\
& +\lambda\mu D^2 z - \lambda\nu D^2 y \\
= & \ [x,[y,z]] \\
& +\mu[x,Dz] - \nu[x,Dy] + \lambda[Dy,z] + \lambda[y,Dz] \\
& +\lambda\mu D^2 z - \lambda\nu D^2 y.
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
[y+\mu x_0,[z+\nu x_0, x+\lambda x_0]] = & \ [y,[z,x]] \\
& +\nu[y,Dx] - \lambda[y,Dz] + \mu[Dz,x] + \mu[z,Dx] \\
& +\mu\nu D^2 x - \lambda\mu D^2 z.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[z+\nu x_0,[x+\lambda x_0, y+\mu x_0]] = & \ [z,[x,y]] \\
& +\lambda[z,Dy] - \mu[z,Dx] + \nu[Dx,y] + \nu[x,Dy] \\
& +\lambda\nu D^2 y - \mu\nu D^2 x.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das Produkt ein Lie Algebra-Produkt ist. Es gilt $D(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{g}$ also ist $\mathfrak{g}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}'$ und es gilt $[x_0, x] = Dx$ für $x \in \mathfrak{g}$. ■

Aus Proposition 3.8.8 folgt, dass $\kappa_{\mathfrak{g}} = \kappa_{\mathfrak{g}'}|_{\mathfrak{g}}$. Insbesondere gilt

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(Dx,y) = \kappa_{\mathfrak{g}'}(Dx,y) = \kappa_{\mathfrak{g}'}([x_0,x],y).$$

Da die Killing-Form $\kappa_{\mathfrak{g}'}$ invariant ist, gilt

$$\kappa_{\mathfrak{g}'}([x_0,x],y) = -\kappa_{\mathfrak{g}'}(x,[x_0,y]) = -\kappa_{\mathfrak{g}}(x,Dy)$$

und die Behauptung ist bewiesen. ■

3.9. Casimir Elemente

Wir werden hier Invariante von $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ konstruieren.

Lemma 3.9.1 Sei V eine Darstellung von $\mathfrak{g}$.

1. Die Abbildung $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ definiert durch $(x,y) \mapsto x_V \circ y_V$ ist bilinear.

2. Es gibt eine lineare Abbildung $\Phi_V : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ so, dass $\Phi_V(x \otimes y) = x_V \circ y_V$. □

Beweis. Übung. ∎

Lemma 3.9.2 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und sei I ein Ideal von $\mathfrak{g}$ mit $\dim I = n$. Sei $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ eine invariante Bilinearform so, dass $B|_I : I \times I \to \mathbb{C}$ nicht ausgeartet ist.

Seien $(h_i)_{i\in[1,n]}$ und $(h'_i)_{i\in[1,n]}$ Basen von I mit $B(h_i, h'_j) = \delta_{i,j}$.

Dann ist

$$c_I = \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes h'_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

invariant und hängt von den Basen $(h_i)_{i\in[1,n]}$ und $(h'_i)_{i\in[1,n]}$ nicht ab. □

Beweis. Wir haben im Beispiel 3.7.5 schon gesehen, dass das Element $c_{\mathfrak{h}} \in I \otimes I \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ nicht von den Basen abhängt und eine Invariante ist. ∎

Definition 3.9.3 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra, sei I ein Ideal von $\mathfrak{g}$ mit $\dim I = n$ und sei B eine invariante Bilinearform. Angenommen, dass $B|_I$ nicht ausgeartet ist heißt das Element $c_I \in \mathrm{End}(V)$ das **Casimir Element** von $\mathfrak{g}$ bezüglich I und B.

Proposition 3.9.4 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra, sei I ein Ideal von $\mathfrak{g}$ und sei V eine endlich-dimensionale $\mathfrak{g}$-Darstellung. Sei $B = B_{\mathfrak{g}}^V$ die Bilinearform zur Darstellung V. Angenommen, dass $B|_I$ nicht ausgeartet ist, seien $(h_i)_{i\in[1,n]}$ und $(h'_i)_{i\in[1,n]}$ Basen von I mit $B(h_i, h'_j) = \delta_{i,j}$.

Dann ist das Element

$$c_I^V = \sum_{i=1}^{n} (h_i)_V (h'_i)_V \in \mathrm{End}(V)$$

ein Darstellungshomomorphismus und hängt von den Basen $(h_i)_{i\in[1,n]}$ und $(h'_i)_{i\in[1,n]}$ nicht ab.

Beweis. Sei $c_I \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Wir haben eine lineare Abbildung $\Phi : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ so, dass $\Phi(x \otimes y) = x_V y_V$. Insbesondere gilt $c_I^V = \Phi_V(c_I)$ und c_I^V hängt von den Basen nicht ab. Wir zeigen, dass c_I^V ein Darstelungshomomorphismus ist.

Sei $x \in \mathfrak{g}$. Da c_I eine Invariante ist gilt $x_{\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}} \cdot c_I = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= x_{\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}} \cdot c_I \\ &= x_{\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}} \cdot \textstyle\sum_{i=1}^n h_i \otimes h'_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n x_{\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}} \cdot h_i \otimes h'_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n ((x_{\mathfrak{g}} \cdot h_i) \otimes h'_i + h_i \otimes (x_{\mathfrak{g}} \cdot h'_i)) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n ([x, h_i] \otimes h'_i + h_i \otimes [x, h'_i]). \end{aligned}$$

Wir können jetzt Φ_V anwenden. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_V\left(\sum_{i=1}^n([x,h_i]\otimes h_i' + h_i\otimes [x,h_i'])\right) \\ &= \sum_{i=1}^n([x,h_i]_V(h_i')_V + (h_i)_V[x,h_i']_V \\ &= \sum_{i=1}^n x_V(h_i)_V(h_i')_V - (h_i)_V x_V(h_i')_V) + (h_i)_V x_V(h_i')_V - (h_i)_V(h_i')_V x_V) \\ &= x_V\sum_{i=1}^n(h_i)_V(h_i')_V - \sum_{i=1}^n(h_i)_V(h_i')_V x_V \\ &= x_V c_I^V - c_I^V x_V. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass c_I^V ein Darstellungshomomorphismus ist. ■

Definition 3.9.5 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra, sei I ein Ideal von $\mathfrak{g}$ mit $\dim I = n$ und sei V eine endlich-dimensionale $\mathfrak{g}$-Darstellung. Sei $B = B_{\mathfrak{g}}^V$ die Bilinearform zur Darstellung V. Angenommen, dass $B|_I$ nicht ausgeartet ist heißt das Element $c = c_I^V \in \mathrm{End}(V)$ das **Casimir Element** von $\mathfrak{g}$ bezüglich I und V.

Proposition 3.9.6 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra, sei I ein Ideal von $\mathfrak{g}$ mit $\dim I = n$ und sei V eine endlich-dimensionale $\mathfrak{g}$-Darstellung. Sei $B = B_{\mathfrak{g}}^V$ die Bilinearform zur Darstellung V. Angenommen, dass $B|_I$ nicht ausgeartet, sei $c = c_I^V \in \mathrm{End}(V)$ das Casimir Element von $\mathfrak{g}$ bezüglich I und V.

1. Es gilt $\mathrm{Tr}(c) = n$.

2. Sei V einfach. Dann ist c ein Darstellungsautomorphismus von V.

Beweis. 1. Nach der Definition gibt es Basen $(h_i)_{i\in[1,n]}$ und $(h_i')_{i\in[1,n]}$ von I so, dass $B_{\mathfrak{g}}^V(h_i,h_j') = \delta_{i,j}$ und $c = \sum_{i=1}^n (h_i)_V(h_i')_V$. Es gilt

$$\mathrm{Tr}(c) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Tr}((h_i)_V(h_i')_V) = \sum_{i=1}^n B_{\mathfrak{g}}^V(h_i,h_i') = n.$$

2. Da $n \neq 0$ (die Charakteristik von $\mathbb{C}$ ist 0) gilt $\mathrm{Tr}(c) \neq 0$ also $c \neq 0$. Aber c ist ein Darstelungshomomorphismus. Vom Lemma 3.1.11 folgt, dass $\mathrm{Ker}(c)$ eine Teildarstellung von V ist. Da V einfach ist, muss $\mathrm{Ker}(c) = 0$ oder $\mathrm{Ker}(c) = V$. Im Fall $\mathrm{Ker}(c) = V$ ist $c = 0$. Ein Widerspruch. Es folgt $\mathrm{Ker}(c) = 0$ und c ist injektiv also bijektiv. ■

4. Nilpotente Lie Algebren

4.1. Definition

Definition 4.1.1 Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **nilpotent** falls es eine absteigende Familie $(I_i)_{i\in[0,k]}$ von Ideale gibt mit $I_0 = \mathfrak{g}$, $I_k = 0$ und $[\mathfrak{g}, I_i] \subset I_{i+1}$ für alle $i \in [0, k-1]$.

Beispiel 4.1.2 Die Lie Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_n$ die Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n$ aller nilpotente obere Dreieckmatrizen. Dann ist $\mathfrak{n}_n$ nilpotent.

Proposition 4.1.3 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Dann sind äquivalent:

1. Die Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist nilpotent;
2. es gilt $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} = 0$ für k groß genug;
3. es gilt $\mathcal{C}_k\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ für k groß genug;
4. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ad}_{x_1} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}_{x_k} = 0$ für alle Folge $(x_i)_{i\in[1,k]}$ aus $\mathfrak{g}$;
5. es gibt eine absteigende Folge von Ideale $(\mathfrak{g}_i)_{i\in[0,n]}$ mit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_n = 0$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ und so, dass $\dim g_i/g_{i+1} = 1$ für alle $i \in [0, n-1]$.

Beweis. 2. $\Leftrightarrow$ 1. und 3. $\Leftrightarrow$ 1. Wir setzen $I_i = \mathcal{C}^i\mathfrak{g}$ oder $I_i = \mathcal{C}_{k-i}\mathfrak{g}$. Dann erfüllt dir Folge $(I_i)_{i\in[0,k]}$ die Definition für nilpotente Lie Algebren und $\mathfrak{g}$ ist nilpotent.

Umgekehrt sei $(I_i)_{i\in[0,k]}$ eine Folge von Ideal mit $I_0 = \mathfrak{g}$, $I_k = 0$ und $[\mathfrak{g}, I_i] \subset I_{i+1}$ für alle $i \in [0, k-1]$. Wir zeigen per Induktion nach i, dass $\mathcal{C}^i\mathfrak{g} \subset I_i$ und $\mathcal{C}_i\mathfrak{g} \supset I_{k-i}$. Für $i = 0$ gilt $\mathcal{C}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} = I_0$ und $\mathcal{C}_0\mathfrak{g} = 0 = I_k$. Angenommen, dass $\mathcal{C}^i\mathfrak{g} \subset I_i$ und $\mathcal{C}_i\mathfrak{g} \supset I_{k-i}$. Dann gilt $\mathcal{C}^{i+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^i\mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, I_i] \subset I_{i+1}$ und $[\mathfrak{g}/\mathcal{C}_i\mathfrak{g}, (I_{k-(i+1)} + \mathcal{C}_i\mathfrak{g})/\mathcal{C}_i\mathfrak{g}] \subset (I_{k-i} + \mathcal{C}_i\mathfrak{g})/\mathcal{C}_i\mathfrak{g} = 0$. Das heißt $(\mathfrak{g}_{k-(i+1)} + \mathcal{C}_i\mathfrak{g})/\mathcal{C}_i\mathfrak{g}$ ist im Zentrum von $\mathfrak{g}/\mathcal{C}_i\mathfrak{g}$ enthalten. Es folgt $\mathfrak{g}_{k-(i+1)} \subset \mathcal{C}_{i+1}\mathfrak{g}$. Daraus folgt $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} = 0$ und $\mathcal{C}_k\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

2. $\Leftrightarrow$ 4. Das Ideal $\mathcal{C}^k\mathfrak{g}$ ist die lineare Hülle aller Elemente der Form

$$[x_1, [x_2, [\cdots [x_k, y] \cdots]]] = \mathrm{ad}_{x_1} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}_{x_k}(y)$$

wobei $x_i \in \mathfrak{g}$ für alle i und $y \in \mathfrak{g}$. Daraus folgt die Behauptung 2. $\Leftrightarrow$ 4.

1. $\Leftrightarrow$ 5. Die Implikation 5. $\Rightarrow$ 1. ist klar. Umgekehrt, sei $(I_i)_{i\in[0,k]}$ eine Folge von Ideale mit $I_0 = \mathfrak{g}$, $I_k = 0$ und $[\mathfrak{g}, I_i] \subset I_{i+1}$ für alle $i \in [0, k-1]$. Wir ergänzen die Folge $(I_i)_{i\in[0,k]}$ auf einer Folge $(J_j)_{j\in[0,n]}$ von Unterräume mit $n = \dim\mathfrak{g}$, $\dim J_j = n - j$,

$J_{j+1} \subset J_j$ und $J_{n-\dim I_i} = I_i$. Diese ergänzung von Unterräume ist immer möglich. Wir zeigen, dass J_j ein Ideal für alle $j \in [1,n]$ ist. Sei $j \in [1,n]$ und sei $i_j = \min\{i \ / \ J_j \subset I_i\}$. Es gilt $I_{i_j+1} \subset J_{j+1} \subset J_j \subset I_{i_j}$. Daraus folgt $[\mathfrak{g}, J_j] \subset [\mathfrak{g}, I_{i_j}] \subset I_{i_j+1} \subset J_{j+1}$. ∎

Korollar 4.1.4 Sei $\mathfrak{g} \neq 0$ eine nilpotente Lie Algebra. Dann gilt $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Beweis. Angenommen $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, zeigen wir per Induktion nach k, dass $\mathcal{C}_k\mathfrak{g} = 0$ gilt für alle $k \geq 0$. Für $k = 0$ gilt per Definition $\mathcal{C}_0\mathfrak{g} = 0$. Angenommen $\mathcal{C}_k\mathfrak{g} = 0$. Dann gilt $\mathfrak{g}/\mathcal{C}_k\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}/\mathcal{C}_k\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. Es folgt $\mathcal{C}_{k+1}\mathfrak{g} = 0$. Ein Widerspruch da $\mathfrak{g}$ nilpotente ist. ∎

Korollar 4.1.5 Sei $\mathfrak{g}$ eine nilpotente Lie Algebra. Dann ist die Killing-Form $\kappa_{\mathfrak{g}}$ die Null-Form.

Beweis. Seien $(x,y) \in \mathfrak{g}^2$. Dann ist $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y$ nilpotent und es gilt $\kappa_{\mathfrak{g}}(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) = 0$. ∎

Proposition 4.1.6 Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ Lie Algebren, sei I ein Ideal von $\mathfrak{g}$ und sei $\mathfrak{h}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

1. Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, dann sind auch $\mathfrak{h}$, I und $\mathfrak{g}/I$ nilpotent.

2. Umgekehrt, sind I und $\mathfrak{g}/I$ nilpotent und ist $I \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, dann ist auch $\mathfrak{g}$ nilpotent.

3. Sind $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ nilpotent, dann ist auch $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ nilpotent.

Beweis. 1. Es gilt $\mathcal{C}^k\mathfrak{h} \subset \mathcal{C}^k\mathfrak{g} = 0$ für k groß genug und $\mathfrak{h}$ ist nilpotent. Ein Ideal ist eine Lie Unteralgebra also folgt, dass I nilpotent ist.

Sei $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ die kanonische Projektion. Nach Proposition 2.5.6 gilt $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}/I) = \pi(\mathcal{C}^k\mathfrak{g}) = 0$ für k groß genug. Daraus folgt, dass $\mathfrak{g}/I$ nilpotent ist.

2. Sei $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ die kanonische Projektion. Es gilt $p(\mathcal{C}^k\mathfrak{g}) = \mathcal{C}^k(\mathfrak{g}/I) = 0$ für k groß genug. Daraus folgt, dass $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} \subset I$ für k groß genug. Es gilt also $\mathcal{C}^{k+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^k\mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, I] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = 0$ und $\mathfrak{g}$ ist nilpotent.

3. Es gilt $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}') = \mathcal{C}^k\mathfrak{g} \times \mathcal{C}^k\mathfrak{g}'$. Daraus folgt die Behauptung. ∎

4.2. Satz von Engel

Satz 4.2.1 (Satz von Engel) Sei V ein Vektorraum und sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ mit $\dim \mathfrak{g} < +\infty$ so, dass x nilpotent ist für alle $x \in \mathfrak{g}$.

Dann gibt es ein Vektor $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $x(v) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. □

Beweis. Per Induktion nach $n = \dim \mathfrak{g}$. Für $n = 0$ ist der Satz klar. Sei also $\dim \mathfrak{g} > 0$.

Lemma 4.2.2 Sei $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$. Es gilt

$$\operatorname{ad}_x^n(y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k y x^{n-k}.$$

Beweis. Per Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Behauptung klar. Angenommen

$$\operatorname{ad}_x^n(y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k y x^{n-k},$$

gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}_x^{n+1}(y) &= x\operatorname{ad}_x^n(y) - \operatorname{ad}_x^n(y)x \\
&= x\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k y x^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k y x^{n-k} \cdot x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{k+1} y x^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k y x^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{k+1} y x^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k y x^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{n+1-k} x^k y x^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n+1-k} x^k y x^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} x^k y x^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Lemma 4.2.3 Sei V eine Vektorraum und sei $x \in \mathfrak{gl}(V)$ nilpotent. Dann ist $\operatorname{ad}_x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ nilpotent. □

Beweis. Nach dem obigen Lemma ist $\operatorname{ad}_x^m(y)$ eine lineare Kombination von Endomorphismen der Form $x^i y x^{m-i}$. Da x nilpotent ist, gilt $\operatorname{ad}_x^m(y) = 0$ für m groß genug und ad_x ist nilpotent. ■

Sei $\mathfrak{h}$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ mit $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$. Wir betrachten $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ als Vektorraum. Sei $\sigma : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ definiert durch $\sigma(x) : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $\overline{y} \mapsto \sigma(x)(\overline{y}) = \overline{[x, y]}$ wobei $\overline{y}$ die Äquivalenzklasse von $y \in \mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ist. Nach dem obigen Lemma ist die abbildung ad_x nilpotent also ist $\sigma(x)$ auch nilpotent. Insbesondere erfüllt $\sigma(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ die Annahme Engelssatzes. Da $\dim \sigma(\mathfrak{h}) \leq \dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g} = n$, gilt nach Induktion, dass es ein Vektor $\overline{y} \neq 0$ in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ mit $\sigma(x)(bary) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{h}$. Insbesondere gilt $y \in \mathfrak{h}$ und $[x, y] \in \mathfrak{h}$ für alle $x \in \mathfrak{h}$. Also ist $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}y$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}y$.

Damit konstruieren wir eine Folge von Paare $(\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_i')_{i \in [0,n-1]}$ konstruieren mit $\mathfrak{h}_i$ und $\mathfrak{h}_i'$ sind Unteralgebren von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_i$ ist ein Ideal von $\mathfrak{h}_i'$, $\dim \mathfrak{h}_i = i$ und $\dim \mathfrak{h}_i' = i+1$. Wir setzen $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 = 0$ und konstruieren $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}'_0$ wie oben. Angenommen $(\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}'_i)$ existiert, setzen wir $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{i+1} = \mathfrak{h}'_i$ und konstruiren $\mathfrak{h}'_{i+1} = \mathfrak{h}'$ wie oben.

Insbesondere gilt $I = \mathfrak{h}_{n-1}$ ist ein Ideal in $I \oplus \mathbb{C}y = \mathfrak{h}'_{n-1} = \mathfrak{g}$ (die Dimensionen sind gleich) und $\dim I = n-1$. Sei

$$W = \{v \in W \mid x(v) = 0 \text{ für alle } x \in I\}.$$

Nach Induktion gilt $W \neq 0$. Sei $w \in W$. Wir zeigen, dass $y(w) \in W$. Sei $x \in I$, es gilt $x(y(w)) = [x,y](w) + y(x(w)) = 0$, da $x \in I$ und $[x,y] \in I$. Es folgt $y(w) \in W$. Da y nilpotent ist, ist auch $y|_W$. Es gibt also ein Vektor $v \in W$ mit $v \neq 0$ und $y(v) = 0$. Sei $z \in \mathfrak{g} = I \oplus \mathbb{C}y$. Dann gibt es $x \in I$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $z = x + \lambda y$. Es gilt $x(v) = 0$ da $x \in I$ und $v \in W$. Es gilt also $z(v) = x(v) + \lambda y(v) = 0$. ∎

Korollar 4.2.4 Sei V ein Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$ und sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ so, dass x nilpotent ist für alle $x \in \mathfrak{g}$.

Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V so, dass für alle $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}_x)$ eine nilpotente obere Dreieckmatrix ist.

In andere Worte, wenn man $\mathfrak{gl}(V)$ mit $\mathfrak{gl}_n$ identifiziert dank $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ gilt $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}_n$ wobei $\mathfrak{n}_n$ die Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n$ aller nilpotenten oberen Dreieckmatrizen ist.

Insbesondere ist $\mathfrak{g}$ nilpotent.

Beweis. Per Induktion nach $n = \dim V$. Für $n = 0$ ist es klar.

Angenommen das Korollar sei wahr für Vektorräume der Dimension $n-1$. Nach dem Satz von Engel gibt es ein Vektor $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $x(v) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Wir setzen $e_1 = v$ und $V' = V/\langle e_1 \rangle$. Es gilt $\dim V' = n-1$.

Sei $x \in \mathfrak{g}$. Wir betrachten die lineare Abbildung $f_x : V \to V'$ definiert durch $f_x(v) = \overline{x(v)}$. Es gilt $f_x(e_1) = \overline{x(e_1)} = \bar{0} = 0$. Insbesondere gilt $\langle e_1 \rangle \subset \mathrm{Ker}(f_x)$. Daraus folgt, dass es eine lineare Abbildung $\bar{x} : V' \to V'$ gibt mit $\bar{x}(\bar{v}) = \overline{x(v)}$. Wir setzen

$$\mathfrak{g}' = \{\bar{x} \in \mathfrak{gl}(V') \mid x \in \mathfrak{g}\}.$$

Wir zeigen, dass $\mathfrak{g}'$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V')$ ist und, dass alle $x' \in \mathfrak{g}'$ nilpotent sind. Seien $x, y \in \mathfrak{g}$. Es gilt $[\bar{x}, \bar{y}](\bar{v}) = (\bar{x}\bar{y} - \bar{y}\bar{x})(\bar{v}) = \overline{(xy - yx)(v)} = \overline{[x,y](v)} = \overline{[x,y]}(\bar{v})$. Daraus folgt $[\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x,y]} \in \mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}'$ ist eine Lie Unteralgebra. Es gilt auch $\bar{x}^n(\bar{v}) = \overline{x^n(v)} = 0$ für alle $v \in V$. Daraus folgt $\bar{x}^n = 0$ und $\bar{x}$ ist nilpotent.

Nach Induktionsannahme gibt es eine Basis $\mathcal{B}' = (e'_2, \cdots, e'_{n-1})$ von V' so, dass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x')$ eine obere nilpotente Dreieckmatrix ist für alle $x' \in \mathfrak{g}'$. Sei $(e_2, \cdots, e_{n-1})$ Vektoren in V so, dass $\bar{e}_i = e'_i$. Dann ist $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ eine Basis von V (Übung) und es gilt $\overline{x(e_i)} = \bar{x}(\bar{e}_i) = \bar{x}(e'_i) \in \langle e'_2, \cdots, e'_{i-1} \rangle$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und alle $i \geq 2$. Daraus folgt $x(e_i) \in \langle e_1, \cdots, e_{i-1} \rangle$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $i \geq 1$.

Da $\mathfrak{n}_n$ nilpotent ist, ist die Unteralgebra $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{n}_n$ auch nilpotent. ∎

Korollar 4.2.5 Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann nilpotent, wenn ad_x nilpotent für all $x \in \mathfrak{g}$ ist.

Beweis. Wir betrachten die adjungierte Darstellung $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Es gilt $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Sei

$$\mathfrak{g}' = \mathrm{ad}\,(\mathfrak{g}) = \{\mathrm{ad}_x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \mid x \in \mathfrak{g}\}.$$

Es gilt $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(\mathfrak{g})$.

Für alle $x' = \mathrm{ad}_x \in \mathfrak{g}'$ ist x' nilpotent. Nach dem obigen Korollar ist $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ nilpotent. Aber $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ist im Zentrum enthalten. Nach Proposition 4.1.6.2. gilt, dass $\mathfrak{g}$ nilpotent ist. ■

Korollar 4.2.6 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und sei I ein Ideal. Angenommen $\mathfrak{g}/I$ sei nilpotent und die Einschränkung $(\mathrm{ad}_x)|_I$ sei nilpotent für alle $x \in \mathfrak{g}$.

Dann ist $\mathfrak{g}$ nilpotent.

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{g}$. Wir zeigen, dass ad_x nilpotent ist. Sei k groß genug, sei $y \in \mathfrak{g}$ und seien $\bar{x}, \bar{y}$ die Klassen von x, y in $\mathfrak{g}/I$. Es gilt $\overline{\mathrm{ad}_x(y)} = \overline{[x,y]} = [\bar{x}, \bar{y}] = \mathrm{ad}_{\bar{x}}(\bar{y})$. Insbesondere gilt $\overline{\mathrm{ad}_x^k(y)} = \mathrm{ad}_{\bar{x}}^k(\bar{y}) = 0$ für k groß genug. Es gilt also $\mathrm{ad}_x^k(y)) \in I$. Es folgt $\mathrm{ad}_x^{k+k'}(y) = \mathrm{ad}_x^{k'}(\mathrm{ad}_x^k(y)) = (\mathrm{ad}_x)|_I^{k'}(\mathrm{ad}_x^k(y)) = 0$ für k und k' groß genug ($(\mathrm{ad}_x)|_I$ ist nilpotent). Es folgt, dass ad_x nilpotent für alle $x \in \mathfrak{g}$ ist. ■

Man kann sogar zeigen.

Theorem 4.2.7 (Satz von Ado I) Sei $\mathfrak{g}$ eine nilpotente Lie Algebra endlicher Dimension. Es gibt eine Lie Algebra Einbettung $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}_n$. □

4.3. Maximales nilpotente Ideal

Definition 4.3.1 Ein Ideal I von $\mathfrak{g}$ heißt **nilpotent** falls es nilpotent als Lie Algebra ist.

Lemma 4.3.2 Ein Ideal I von $\mathfrak{g}$ ist genau dann nilpotent, wenn $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ nilpotent ist für alle $x \in I$. □

Beweis. Sei $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ nilpotent für alle $x \in I$. Dann ist $\mathrm{ad}_I(x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)|_I$ nilpotent für alle $x \in I$. Nach Korollar 4.2.5 ist I nilpotent als Lie Algebra.

Sei umgekehrt I nilpotent. Dann ist $\mathrm{ad}_I(x)$ nilpotent für alle $x \in I$. Sei $x \in I$ wir zeigen, dass $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ nilpotent ist. Sei $y \in \mathfrak{g}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)^{n+1}(y) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)^n([x,y])$. Da I ein Ideal ist und $x \in I$ gilt $[x,y] \in I$. Insbesondere gilt $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)^n([x,y]) = \mathrm{ad}_I(x)^n([x,y]) = 0$ für n groß genug. Es folgt $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)^{n+1} = 0$ für n groß genug und $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ ist nilpotent. ■

Wir zeigen ein Paar allgemeine Resultate über Darstellungen.

Lemma 4.3.3 Sei $f : V \to W$ ein Darstellungshomomorphismus und seien V' und W' Teildarstellungen von V und W. Dann sind $f(V')$ und $f^{-1}(W')$ Teildarstellungen von W und V. □

Beweis. Übung. ■

Lemma 4.3.4 Sei V eine endlich-dimensionale $\mathfrak{g}$-Darstellung. Dann gibt es eine Teildarstellung V' von V so, dass V/V' einfach ist. □

Beweis. Sei V' eine maximale Teildarstellung von V mit $V' \subsetneq V$. Sei $\pi : V \to W = V/V'$ die kanonische Projektion und sei W' eine Teildarstellung von W. Dann ist $\pi^{-1}(W')$ eine Teildarstellung von V mit $V' \subset \pi^{-1}(W') \subset V$. Da V' maximal war gilt $V' = \pi^{-1}(W')$ oder $\pi^{-1}(W') = V$. Es folgt $W' = 0$ oder $W' = W$. Daraus folgt, dass W einfach ist. ■

Lemma 4.3.5 Sei V eine endlich-dimensionale $\mathfrak{g}$-Darstellung. Dann gibt es eine steigende Folge $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ vom Teildarstellungen von V so, dass V_i/V_{i-1} einfach ist für alle $i \in [1, n]$. □

Beweis. Per Induktion nach $r = \dim V$. Für $r = 0$ ist die Aussage klar. Angenommen die Aussage sei wahr für Darstellungen der Dimension echt kleiner als r. Sei $V_n = V$ und V_{n-1} eine Teildarstellung mit $W = V/V_{n-1}$ einfach. Falls $V_{n-1} = 0$ sind wir fertig. Andernfalls gilt $\dim V_{n-1} < \dim V = r$ und per Induktion gibt es eine Folge $V_0 = 0 \subset \cdots \subset V_{n-1}$ von Teildarstellungen von V_{n-1} mit V_i/V_{i-1} einfach. ■

Lemma 4.3.6 Sei V eine einfache $\mathfrak{g}$-Darstellung und sei I ein Ideal von $\mathfrak{g}$ so, dass x_V nilpotent ist für alle $x \in I$. Dann gilt $x_V = 0$ für alle $x \in I$. □

Beweis. Nach Proposition 3.7.2 ist $V^I = \{v \in V \mid x_V \cdot v = 0 \text{ für alle } x \in I\}$ eine $\mathfrak{g}$-Teildarstellung von V. Nach dem Satz von Engel (Satz 4.2.1) gilt $V^I \neq 0$. Da V einfach ist, gilt $V^I = V$. ■

Lemma 4.3.7 Die Summe von zwei nilpotente Ideale ist nilpotent. □

Beweis. Seien I und J zwei nilpotente Ideale. Sei $x \in I$ und $y \in J$. Wir zeigen, dass $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x + y)$ nilpotent ist. Sei $\mathfrak{g}_0 = 0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ eine Folge von Teildarstellungen der adjungierten Darstellung gegeben dank Lemma 4.3.5. Da $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ und $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} y$ nilpotent sind für alle $x \in I$ and $y \in J$, gilt, dass $x_{\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}}$ und $y_{\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}}$ nilpotent für alle $i \in [1, n]$ sind. Nach Lemma 4.3.6 und da $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}$ einfach ist, gilt $x_{\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}} = 0$ und $y_{\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}} = 0$ für alle $x \in I$ und $y \in J$ und für alle $i \in [1, n]$. Insbesondere gilt $(x + y)_{\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}} = 0$ für alle $x \in I$ und $y \in J$ und für alle $i \in [1, n]$. Es gilt also $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x + y)(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{g}_{i-1}$ für alle $i \in [1, n]$ und $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x + y)$ ist nilpotent. ■

Korollar 4.3.8 Es gibt ein maximales nilpotente Ideal $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}$ in $\mathfrak{g}$.

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}} = \displaystyle\sum_{I \text{ nilpotent Ideal von } \mathfrak{g}} I.$ ■

Bemerkung 4.3.9 Es kann sein, dass $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}$ nicht triviale nilpotente Ideale enthält.

5. Halbeinfache und nilpotente Elemente

5.1. Halbeinfache Endomorphismen

Definition 5.1.1 Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **halbeinfach**, wenn f diagonalisierbar ist (oder das Minimalpolynom μ_f von f zerfällt in lineare Faktoren mit Vielfachkeit Eins).

Lemma 5.1.2 Sei $x \in \mathrm{End}(V)$ halbeinfach und $W \subset V$ ein Unterraum mit $x(W) \subset W$. Dann ist $x|_W \in \mathrm{End}(W)$ halbeinfach. □

Beweis. Sei μ_x das Minimalpolynom von x. Es gilt $\mu_x(x|_W)(w) = \mu_x(x)(w) = 0$. Insbesondere gilt $\mu_x(x|_W) = 0$ und $\mu_{x|_W}$ teilt μ_x. Das Lemma folgt. ■

Lemma 5.1.3 Seien x und y halbeinfache Endomorphismen von V mit $[x, y] = 0$. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von Eigenvektoren für x und y. Insbesondere ist $x + y$ halbeinfach. □

Beweis. Sei $V = \oplus V_\lambda(x)$ die Zerlegung in Eigenräume für x, wobei λ ein Eigenwert ist. Für $v \in V_\lambda(x)$, gilt $x(y(v)) = y(x(v)) = y(\lambda(v)) = \lambda y(v)$ und es gilt $y(V_\lambda(x)) \subset V_\lambda(x)$. Aus dem obigen Lemma folgt, dass $y|_{V_\lambda(x)}$ halbeinfach ist. Das Lemma folgt. ■

Lemma 5.1.4 Seien x und y nilpotente Endomorphismen von V mit $[x, y] = 0$. Dann ist $x + y$ nilpotent. □

Beweis. Folgt aus der binomialen Formel. ■

5.2. Jordan-Chevalley Zerlegung

Theorem 5.2.1 Sei $x \in \mathrm{End}(V)$.

1. Es gibt eine eindeutig bestimmte Zerlegung $x = x_s + x_n$ in $\mathrm{End}(V)$ mit x_s halbeinfach, x_n nilpotent und $[x_s, x_n] = 0$.

2. Es gibt Polynome P und Q in $k[T]$ mit $P(0) = 0 = Q(0)$ und mit $x_s = P(x)$ und $x_n = Q(x)$. Insbesondere gilt $[x_s, y] = 0 = [x_n, y]$ für alle $y \in \mathrm{End}(V)$ mit $([x, y] = 0$.

3. Seien $U \subset W \subset V$ mit $x(W) \subset U$. Dann gilt, $x_s(W) \subset U$. und $x_n(W) \subset U$. □

Beweis. 1. und 2. Sei χ_x das charakteristische Polynom von x. Es gilt

$$\chi_x(T) = \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i)^{a_i},$$

wobei λ_i paarweise verschiedene komplexe Zahlen sind. Der Vektorraum $H_{\lambda_i}(x) = \mathrm{Ker}((x - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{a_i})$ is x-invariant und es gilt

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} H_{\lambda_i}(x).$$

Wir betrachten zwei Fälle. When $0 \in \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ *i.e.* x ist not bijektiv setzen wir

$$P_i = \prod_{j \neq i} (T - \lambda_j)^{a_j}.$$

When $0 \notin \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ *i.e.* x ist bijektiv setzen wir

$$P_0 = \prod_{j=1}^{n} (T - \lambda_j)^{a_j} \text{ und } P_i = T \prod_{j \neq i} (T - \lambda_j)^{a_j}.$$

Dann sind $(P_1, \cdots, P_n)$ im Fall 1 und $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ im Fall 2 teilerfremd. Es gibt also (Siehe Skript LAII Lemma 2.3.5) Polynome $Q_0, Q_1, \cdots, Q_n$ so, dass (wir setzen $P_0 = Q_0 = 0$ im Fall 1)

$$1 = \sum_{i=0}^{n} Q_i P_i.$$

Wir setzen

$$P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i P_i.$$

Lemma 5.2.2 Es gilt $P \equiv \lambda_i \pmod{(T - \lambda_i)^{a_i}}$ für alle $i \in [1, n]$ und $P(0) = 0$. □

Beweis. Es gilt $P_j \equiv 0 \pmod{(T - \lambda_i)^{a_i}}$ für alle $j \neq i$. Insbesondere gilt $1 \equiv Q_i P_i \pmod{(T - \lambda_i)^{a_i}}$ und $P \equiv \lambda_i Q_i P_i \pmod{(T - \lambda_i)^{a_i}}$. Daraus folgt den ersten Teil des Lemmas. Analog gilt $P_j \equiv 0 \pmod{T}$ für alle $j \neq 0$. Insbesondere gilt $P \equiv 0 \pmod{T}$. ■

Sei $x_s = P(x)$. Wir zeigen, dass x_s halbeinfach ist. Es genügt zu zeigen, dass $x_s|_{H_{\lambda_i}}$ halbeinfach für alle $i \in [1, n]$ ist. Nach dem Lemma gibt es für alle $i \in [1, n]$ ein Polynom R_i mit $P(T) = \lambda_i + R_i(T)(T - \lambda_i)^{a_i}$. Für $v \in H_{\lambda_i}$ gilt

$$x_s(v) = P(x)(v) = \lambda_i v + R_i(x)(x - \lambda_i)^{a_i}(v) = \lambda_i v.$$

Daraus folgt, dass x_s halbeinfach ist.

Sei $Q(T) = T - P(T)$ und $x_n = Q(x) = x - P(x)$. Es gilt $Q(0) = 0 - P(0) = 0$. Wir zeigen, dass x_n nilpotent ist. Es genügt zu zeigen , dass $x_n|_{H_{\lambda_i}}$ nilpotent ist. Aber es gilt $x_s|_{H_{\lambda_i}} = \lambda_i \mathrm{Id}_{H_{\lambda_i}}$. Es gilt also

$$(x_n|_{H_{\lambda_i}})^{a_i}(v) = (x|_{H_{\lambda_i}} - x_s|_{H_{\lambda_i}})^{a_i} = (x|_{H_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{H_{\lambda_i}})^{a_i} = 0.$$

Daraus folgt das x_n nilpotent ist.

Wir zeigen, dass diese Zerlegung eindeutig ist. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und sei ${}_\lambda(x_s) = \mathrm{Ker}(x - \lambda \mathrm{Id}_V)$. Sei $v \in E_\lambda(x)$. Es gilt $(x - \lambda \mathrm{Id}_V)(v) = (x - x_s)(v) = x_n(v)$. Also gilt $(x - \lambda \mathrm{Id}_V)^k(v) = 0$ für k groß genug. Daraus folgt, dass $v \in H_\lambda(x)$. Aber es gilt

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} E_\lambda(x_s) = V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} H_\lambda(x).$$

Daraus folgt $E_\lambda(x_s) = H_\lambda(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Insbesondere gilt für $v = v_1 + \cdots + v_n$ mit $v_i \in H_{\lambda_i}(x)$ gilt $x_s(v) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ und x_s ist von x fest bestimmt. Da $x_n = x - x_s$ ist auch x_n eindeutig bestimmt.

3. Folgt aus $P(0) = Q(0) = 0$. ■

Definition 5.2.3 Die Elemente x_s (bzw. x_n) heißen **halbeinfacher Teil** von $x \in \mathrm{End}(V)$ (bzw. **nilpotenter Teil** Die Zerlegung $x = x_s + x_n$ heißt **Jordan-Chevalley Zerlegung**.

Lemma 5.2.4 Sei $x \in \mathfrak{gl}(V)$ und sei $\mathrm{ad} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{gl}(V)$ definiert durch $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y] = xy - yx$. Dann gilt

$$\mathrm{ad}_{x_s} = (\mathrm{ad}_x)_s \text{ und } \mathrm{ad}_{x_n} = (\mathrm{ad}_x)_n.$$

Beweis. Es gilt $x = x_s + x_n$. Daraus folgt $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n}$. Außerdem, da $[x_s, x_n] = 0$, gilt $[\mathrm{ad}_{x_s}, \mathrm{ad}_{x_n}] = 0$. Es genügt also zu zeigen, dass ad_{x_s} halbeinfach ist und ad_{x_n} nilpotent ist. Nach Lemma 4.2.3 ist ad_{x_n} is nilpotent.

Sei $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [1,n]}$ eine Basis von Eigenvektoren von x_s zu den Eigenwerte $(\lambda_i)_{i \in [1,n]}$. Let $(E_{i,j})$ die kanonische Basis von $M_n(\mathbb{C})$. Es gilt $\mathrm{ad}_{x_s}(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$ und ad_{x_s} ist also halbeinfach. ■

6. Auflösbare Lie Algebren

Ab jetzt sind alle Lie Algebren endlich-dimensional.

6.1. Definition

Definition 6.1.1 Eine Lie algebra $\mathfrak{g}$ heißt **auflösbar** wenn $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} = 0$ für k groß genug.

Beispiel 6.1.2 1. Nilpotente Lie Algebren sind auflösbar: es gilt $\mathcal{D}^i\mathfrak{g} \subset \mathcal{C}^i\mathfrak{g}$.

2. Die Lie Algebra $\mathfrak{b}_n$ ist auflösbar aber nicht nilpotent.

Proposition 6.1.3 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra, sei $\mathfrak{h}$ eine Unteralgebra und sei I ein Ideal von $\mathfrak{g}$.

1. Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Dann sind auch $\mathfrak{h}$, I und $\mathfrak{g}/I$ auflösbar.

2. Umgekehrt sind I und $\mathfrak{g}/I$ auflösbar. Dann ist auch $\mathfrak{g}$ auflösbar.

Beweis. 1. Es gilt $\mathcal{D}^k\mathfrak{h} \subset \mathcal{D}^k\mathfrak{g}$. Daraus folgt 1. für Unteralgeren und Ideale. Sei $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ die kanonische Projektion. Nach Proposition 2.5.6 gilt $p(\mathcal{D}^k\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^k(\mathfrak{g}/I)$ daraus folgt $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}/I) = 0$ für k groß genug.

2. Sei $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ die kanonische Projektion. Es gilt $p(\mathcal{D}^k\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^k(\mathfrak{g}/I)$. Für k und l groß genug gilt $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}/I) = 0$ und $\mathcal{D}^lI = 0$. Daraus folgt $p(\mathcal{D}^k(\mathfrak{g})) = 0$ also $\mathcal{D}^k\mathfrak{g} \subset I$ und $\mathcal{D}^{k+l}\mathfrak{g} = \mathcal{D}^l(D^k\mathfrak{g}') \subset \mathcal{D}^lI = 0$. ∎

Proposition 6.1.4 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Die folgende Aussagen sind äquivalent:

1. die Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist auflösbar;
2. es gibt eine absteigende Folge $(\mathfrak{g}_i)_{i\in[0,k]}$ von Ideale mit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_k = 0$ und $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ ist abelsch für alle $i \in [0, k-1]$;
3. es gibt eine absteigende Folge $(\mathfrak{g}_i)_{i\in[0,k]}$ von Unteralgebren so, dass $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_k = 0$ und $\mathfrak{g}_i$ ein Ideal von $\mathfrak{g}_{i+1}$ ist mit $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ ist abelsch für alle $i \in [0, k-1]$;
4. es gibt eine absteigende Folge $(\mathfrak{g}_i)_{i\in[0,n]}$ von Unteralgebren mit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_n = 0$ und $\mathfrak{g}_i$ ist ein Ideal der Codimension 1 in $\mathfrak{g}_i$ für alle $i \in [0, n-1]$.

Beweis. (1. ⇒ 2.) Wir setzen $\mathfrak{g}_i = \mathcal{D}^i\mathfrak{g}$ und 2. folgt aus 1.

(2. ⇒ 3.) Das Ideale Unteralgebren sind folgt 3. aus 2.

(3. ⇒ 4.) Wir ergänzen die Folge $(\mathfrak{g}_i)_{i\in[1,r]}$ von 3. in einer Folge $(\mathfrak{a}_j)_{j\in[1,n]}$ von Unterräume mit

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{a}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_{j_1} = \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g}_k = 0$$

und $\dim \mathfrak{a}_{j+1} = \dim \mathfrak{a}_j - 1$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathfrak{a}_{j+1}$ ein Ideal von $\mathfrak{a}_j$ ist. Seien $x \in \mathfrak{a}_{j+1}$ und $y \in \mathfrak{a}_j$. Sei $i_j = \max\{i \mid \mathfrak{a}_j \subset \mathfrak{g}_i\}$. Es gilt $\mathfrak{g}_{i_j+1} \subset \mathfrak{a}_{i+1}$. Da $\mathfrak{g}_{i_j}/\mathfrak{g}_{i_j+1}$ abelsch ist gilt in $\mathfrak{g}_{i_j}/\mathfrak{g}_{i_j+1}$: $\overline{[x,y]} = 0$. Daraus folgt $[x,y] \in \mathfrak{g}_{i_j+1} \subset \mathfrak{a}_{j+1}$ und a_{j+1} ist ein Ideal in $\mathfrak{a}_j$.

(4. ⇒ 1.) Per Induktion nach $n = \dim \mathfrak{g}$. Für $n = 0$ ist die Aussage klar. Per Induktion haben wir, dass $\mathfrak{g}_1$ auflösbar ist und $\mathfrak{g}_1$ ist ein Ideal von $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_0/\mathfrak{g}_1$ abelsch. Also ist das Quotient nilpotent und insbesondere auch auflösbar. Nach Proposition 6.1.3 ist $\mathfrak{g}$ auflösbar. ■

6.2. Radikal

Definition 6.2.1 Ein Ideal I einer Lie Algebra heißt **auflösbar** wenn I auflösbar als Lie Algebra ist.

Lemma 6.2.2 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Dann gibt es ein maximales auflösbare Ideal in $\mathfrak{g}$. □

Beweis. Seien I und J zwei Ideale. Wir zeigen, dass $I + J$ auch auflösbar ist. Da I ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist, ist I auch ein Ideal von $I + J$. Da I auflösbar ist genügt es zu zeigen, dass $I + J/I$ auflösbar ist. Sei $f : J \to I + J/I$ definiert durch $f(y) = \bar{y}$ für $y \in J$. Dann ist f ein Lie Algebra Homomorphismus. Wir zeigen, dass f surjektiv ist: sei $\overline{x+y} \in I + J/I$ wobei $x \in I$ und $y \in J$. Es gilt $\overline{x+y} = \bar{y} = f(y)$. Als ist f surjektiv und es gilt $I + J/I \simeq J/\mathrm{Ker}(f)$ (es gilt eigentlich $\mathrm{Ker}(f) = I \cap J$ also $I + J/I \simeq J/I \cap J$). Da J auflösbar ist, ist $J/\mathrm{Ker}(f) \simeq I + J/I$ auch auflösbar.

Wir setzen $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \displaystyle\sum_{I \text{ auflösbar}} I$. Das ist $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ das maximale auflösbare Ideal von $\mathfrak{g}$. ■

Definition 6.2.3 Wir schreiben $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ oder $\mathfrak{r}$ für das maximale auflösbare Ideal von $\mathfrak{g}$. Dieses Ideal heißt das **radikal Ideal** von $\mathfrak{g}$.

Proposition 6.2.4 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra.

1. Es gilt $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})) = 0$.

2. Das radikal Ideal ist das minimale Ideal I von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}/I) = 0$.

Beweis. 1. Sei $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ die kanonische Projektion und sei I ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Dann ist $p^{-1}(I)$ ein Ideal von I, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ ist ei nIdeal von $p^{-1}(I)$ und es gilt $p^{-1}(I)/\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \simeq I$. Daraus folgt, dass $p^{-1}(I)$ auflösbar ist. Aber da $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ das maximale auflösbare Ideal ist gilt $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = p^{-1}(I)$ und $I = p(p^{-1}(I)) = p(\mathfrak{r}(\mathfrak{g})) = 0$. Als gilt $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})) = 0$.

2. Sei I ein Ideal so, dass $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}/I) = 0$ und sei $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ die kanonische Projektion. Dann ist $p(\mathfrak{r}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})/\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \cap I$ auflösbar. Es folgt $p(\mathfrak{r}(\mathfrak{g})) = 0$ und $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \subset I$. ∎

6.3. Satz von Lie

Theorem 6.3.1 Sei V ein nicht trivialer endlich-dimensionale Vektorraum. Sei $\mathfrak{g}$ eine auflösbare Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Dann gibt es ein $v \in V \setminus \{0\}$ so, dass v einen Eigenvektor für x_V für alle $x \in \mathfrak{g}$ ist. □

Beweis. Per Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$. Für $\dim \mathfrak{g} = 0$ ist die Aussage klar.

Sei I ein Ideal mit $\dim I = \dim \mathfrak{g} - 1$. Dies ist möglich, da $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ ein echtes Ideal von $\mathfrak{g}$ ist und weil alle Unterräume I mit $\mathcal{D}\mathfrak{g} \subset I \subset \mathfrak{g}$ Ideale von $\mathfrak{g}$ sind.

Es folgt, dass I auflösbar ist. Nach Induktionsannahme gibt es ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit $x(v) = \lambda(x)v$ für alle $x \in I$. Man zeigt, dass $\lambda : I \to \mathbb{C}$ eine Lineraform ist: Es gilt $\lambda(x)v + \lambda(y)v = (x+y)(v) = \lambda(x+y)v$ und $a\lambda(x) = (ax)(v) = \lambda(ax)v$ für $a \in \mathbb{C}$.

Sei
$$W = \{w \in V \mid x(w) = \lambda(x)w \text{ für alle } x \in I\}.$$
Es gilt $W \neq 0$.

Wir zeigen, dass W eine Teildarstellung von V ist *i.e.* $y(W) \subset W$ für alle $y \in \mathfrak{g}$: Sei $w \in W$ und $x \in I$. Es gilt $x(y(w)) = [x, y](w) + y(x(w)) = \lambda([x, y])w + \lambda(x)y(w)$. Es genügt zu zeigen, dass $\lambda([x, y]) = 0$. Dafür beweisen wir ein Lemma.

Lemma 6.3.2 Sei $U = \langle y^k(w) \mid k \geq 0\rangle$ und sei $t \in I$. Es gilt $\mathrm{Tr}(t|_U) = \lambda(t) \cdot \dim U$. □

Beweis. Wir zeigen, per Induktion, dass es, für $t \in I$ und $i \geq 0$, Skalare $a_{i,j}(t) \in \mathbb{C}$ gibt mit
$$t(y^i(w)) = \lambda(t)y^i(w) + \sum_{j<i} a_{i,j}(t)y^j(w).$$
Für $i = 0$ gilt $t(w) = \lambda(t)w$. Für $i = 1$, gilt $t(y(w)) = \lambda([t, y])w + \lambda(t)y(w)$. Per Induktion gilt
$$\begin{aligned} t(y^{i+1}(w)) = \;& [t, y](y^i(w)) + y(t(y^i(w))) \\ = \;& \lambda([t, y])y^i(w) + \textstyle\sum_{j<i} a_{i,j}([t, y])y^j(w) + y(\lambda(t)y^i(w) \\ & + \textstyle\sum_{j<i} a_{i,j}(t)y^j(w)) \\ = \;& \lambda(t)y^{i+1}(w) + \lambda([t, y])y^i(w) + \textstyle\sum_{j<i} a_{i,j}([t, y])y^j(w) \\ & + \textstyle\sum_{j<i} a_{i,j}(t)y^{j+1}(w). \end{aligned}$$

Das System $(y^i(w))_{i\geq 0}$ ist ein EZS von U. Es gibt also eine Teilmenge $\mathcal{B}$ davon so, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von U ist. Die Matrix $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t|_U)$ von $t|_U$ in $\mathcal{B}$ ist eine obere Dreieckmatrix mit $\lambda(t)$ auf der Diagonal. Das Lemma folgt. ■

Es gilt also $0 = \mathrm{Tr}([x,y]|_U) = \dim U \cdot \lambda([x,y])$. Aber $w \in U$ also $\dim U > 0$. Daraus folgt $\lambda(x,y) = 0$. Insbesondere ist W eine Teildarstellung von V.

Sei z in $\mathfrak{g} \setminus I$. Es gilt $z(W) \subset W$. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen Eigenvektor $w \in W$ für z zu einem Eigenwert μ. Sei $x = az + y$ wobei $a \in \mathbb{C}$ und $y \in I$. Es gilt $x(w) = az(w) + y(v) = a\mu w + \lambda(y)w = (a\mu + \lambda(y))w$. ■

Korollar 6.3.3 Sei V mit $\dim V = n$ und sei $\mathfrak{g}$ eine auflösbare Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V so, dass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ eine obere Dreieckmatrix ist *i.e.* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathfrak{b}_n$ für alle $x \in \mathfrak{g}$.

Beweis. Per Induktion nach n. Für $\dim V = 0$ ist die Aussage klar. Nach dem Satz von Lie gibt es ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $x(v) = \lambda(x)v$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Insbesondere ist $\langle v \rangle$ eine Teildarstellung von V und $V/\langle v \rangle$ ist eine $\mathfrak{g}$-Darstellung. Das bild von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{gl}(V/\langle v \rangle)$ ist auflösbar. Nach Induktionsannahme gibt es eine Basis $\mathcal{B}'$ in $V/\langle v \rangle$ die die Aussage erfüllt. Die Basis $\mathcal{B} = \{v\} \cup \mathcal{B}'$ erfüllt die Aussage für V. ■

Theorem 6.3.4 (Satz von Ado II) Sei $\mathfrak{g}$ eine auflösbare Lie Algebra endlicher Dimension. Es gibt eine Lie Algebra Einbettung $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}_n$. □

Korollar 6.3.5 Eine Lie Algebra ist genau dann auflösbar, wenn $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ nilpotent ist.

Beweis. Angenommen $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ sei nilpotent. Dann ist $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ auflösbar und $\mathfrak{g}/\mathcal{D}\mathfrak{g}$ ist abelsch also nilpotent also auflösbar. Es folgt, dass $\mathfrak{g}$ auflösbar ist.

Umgekehrt sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Sei $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ die adjungierte Darstellung. Das bild ist isomorph zu $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ und es gilt $\mathcal{D}(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) = \mathcal{D}\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{D}\mathfrak{g}$. Insbesondere ist $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ genau dann nilpotent, wenn $\mathcal{D}\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{D}\mathfrak{g}$ nilpotent ist. Wir können also annehmen, dass $\mathfrak{g}$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ ist (z.B. mit $V = \mathfrak{g}$).

Nach dem obigen Korollar gilt $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}_n$ (wobei $n = \dim V$) und es gilt $\mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \mathcal{D}\mathfrak{b}_n = \mathfrak{n}_n$. Daraus folgt, dass $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ nilpotent ist. ■

6.4. Kriterium von Cartan

Wir geben ein characterisierung von auflösbare Lie Algebren.

Lemma 6.4.1 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und seien $W \subset U$ Unterräume von $\mathfrak{gl}(V)$. Wir setzen

$$T = \{t \in \mathfrak{gl}(V) \mid [t, U] \subset W\}.$$

Sei $x \in T$ so, dass für alle $t \in T$ gilt $\mathrm{Tr}(xt) = 0$. Dann ist x nilpotent. □

Beweis. Sei $x = x_s + x_n$ die Chevalley-Jordan Zerlegung. Wir zeigen, dass alle Eigenwerte $(\lambda_i)_{i\in[1,r]}$ von x_s verschwinden. Sei $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[1,r]}$ eine Basis von Eigenvektoren.

Sei
$$M = \{a_1\lambda_1 + \cdots + a_r\lambda_i \in \mathbb{C} \mid a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{Q}\}.$$
Dies ist ein $\mathbb{Q}$-Unterraum von $\mathbb{C}$. Es ist die $\mathbb{Q}$-lineare Hülle von $(\lambda_i)_{i\in[1,r]}$ *i.e.* $M = \langle\lambda_1, \cdots, \lambda_r\rangle_{\mathbb{Q}}$. Sei $f : M \to \mathbb{Q}$ eine Linearform auf M. Wir definieren $t \in \mathfrak{gl}(V)$ durch $t(e_i) = f(\lambda_i)e_i$ für alle $i \in [1, r]$. Sei $(E_{i,j})_{i,j\in[1,r]}$ die kanonische Basis von $\mathfrak{gl}(V)$ bezüglich $(e_i)_{i\in[1,r]}$. Es gilt
$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} x_s)(E_{i,j}) &= (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}\\ (\operatorname{ad} t)(E_{i,j}) &= (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))E_{i,j} = f(\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}.\end{aligned}$$
Sei $P \in \mathbb{Q}[T]$ ein Polynom mit $P(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i - \lambda_j)$ für alle $i, j \in [1, r]$ und $P(0) = 0$. Es gilt $\operatorname{ad} t(E_{i,j}) = f(\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j} = P(\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j} = P(\operatorname{ad} x_s)(E_{i,j})$ für alle $i, j \in [1, r]$. Daraus folgt $\operatorname{ad} t = P(\operatorname{ad} x_s)$ und $\operatorname{ad} t(U) \subset W$. Es gilt also $t \in T$.

Es folgt, dass $0 = \operatorname{Tr}(xt) = \sum_{i=1}^r f(\lambda_i)\lambda_i$. Da f $\mathbb{Q}$-linear ist, gilt $\sum_{i=1}^r f(\lambda_i)^2 = 0$. Aber $f(\lambda_i) \in \mathbb{Q}$ für alle $i \in [1, r]$. Es folgt $f(\lambda_i) = 0$ für alle $i \in [1, r]$ und für alle Linearformen f. Es folgt $M = 0$ und $\lambda_i = 0$ für alle $i \in [1, r]$. ∎

Theorem 6.4.2 (Kriterium von Cartan) Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und sei V eine endlich-dimensionale $\mathfrak{g}$-Darstellung. Sei B_V die Bilinearform zu V.

Dann ist das Bild von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{gl}(V)$ genau dann auflösbar, wenn $\mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^\perp$, wobei $\perp$ die Orthogonalität bezüglich B_V ist. □

Beweis. Wir können $\mathfrak{g}$ mit ihrem Bild in $\mathfrak{gl}(V)$ ersetzen. Damit können wir ohne Beschränkung annehmen, dass $\mathfrak{g}$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ ist.

Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Dank Korollar 6.3.3 können wir sogar annehmen, dass $\mathfrak{g}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{b}_n$ (die Lie Algebra aller oberen Dreieckmatrizen) ist. Es gilt also $\mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \mathcal{D}\mathfrak{b}_n = \mathfrak{n}_n$. Insbesondere gilt für $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in \mathcal{D}\mathfrak{g}$, dass $xy \in \mathfrak{n}_n$ und also $\operatorname{Tr}(xy) = 0$ *i.e.* $\mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^\perp$.

Umgekehrt, sei $\mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^\perp$. Sei T wie in dem obigen Lemma mit $U = \mathfrak{g} \supset W = \mathcal{D}\mathfrak{g}$. Sei $t \in T$ und $x \in \mathcal{D}\mathfrak{g}$. Es gibt Elemente $y_i, z_i \in \mathfrak{g}$ mit $x = \sum_i [y_i, z_i]$. Es gilt
$$\operatorname{Tr}(tx) = \sum_i \operatorname{Tr}(t[y_i, z_i]) = \sum_i B_V(t, [y_i, z_i]) = \sum_i B_V([t, y_i], z_i) = 0$$
da $[t, y_i] \in \mathcal{D}\mathfrak{g}$ und $\mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^\perp$ ist. Nach dem Lemma folgt, dass x nilpotent ist. Nach Korollar 4.2.4 ist $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ nilpotent. Nach Korollar 6.3.5 ist $\mathfrak{g}$ auflösbar. ∎

Korollar 6.4.3 (Kriterium von Cartan) Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra so, dass $\mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^\perp$, wobei $\perp$ die Orthogonalität bezüglich der Killing-Form $\kappa_{\mathfrak{g}}$ ist. Dann ist $\mathfrak{g}$ auflösbar.

Beweis. Sei $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ die adjungierte Darstellung. Die Killing-Form ist die Bilinearform zur adjungierten Darstellung. Nach dem Kriterium von Cartan ist $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ auflösbar. Der Kern von ad ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Daraus folgt, dass $\mathfrak{g}$ auflösbar ist. ∎

7. Halbeinfache Lie Algebren

7.1. Definition

Definition 7.1.1 Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **halbeinfach**, wenn gilt:

$$(I \text{ ist ein abelsches Ideal}) \Rightarrow (I = 0).$$

Beispiel 7.1.2 Die Null-Algebra ist halbeinfach.

Beispiel 7.1.3 Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ halbeinfach. Dann ist auch $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ halbeinfach.

Bemerkung 7.1.4 Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra. Es gilt $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$. Insbesondere ist die adjungierte Darstellung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ injektiv.

7.2. Charakterisierung

Theorem 7.2.1 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Die folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $\mathfrak{g}$ ist halbeinfach;
2. $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$;
3. die Killing-Form $\kappa_{\mathfrak{g}}$ is nicht ausgeartet. □

Beweis. (1. $\Rightarrow$ 2). Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach und sei $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ sein Radikal. Angenommen $\mathfrak{r} \neq 0$, sei r die maximale naturlische Zahl mit $\mathcal{D}^r\mathfrak{r} \neq 0$ (da $\mathfrak{r}$ auflösbar ist gilt $\mathcal{D}^k\mathfrak{r} = 0$ für k groß genug deswegen gibt es eine solche Zahl r). Dann gilt $\mathcal{D}(\mathcal{D}^r\mathfrak{r}) = \mathcal{D}^{r+1}(\mathfrak{r}) = 0$ und $\mathcal{D}^r\mathfrak{r}$ ist abelsch. Aber is $\mathcal{D}^r\mathfrak{r}$ ist ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ($\mathcal{D}^r\mathfrak{r}$ ist ein charakteristische Ideal von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}$ ist ein Ideal von $\mathfrak{g}$). Ein Widerspruch.

(2. $\Rightarrow$ 3). Angenommen $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$. Sei $\mathfrak{g}^\perp$ das orthogonale Ideal von $\mathfrak{g}$ bezüglich der Killing-form. Dies ist ein Ideal nach Proposition 3.8.4 (sogar ein charakteristisches Ideal da $\kappa_{\mathfrak{g}}$ völlig invariant ist). Außerdem ist die Killing-Form $\kappa_{\mathfrak{g}^\perp}$ von $\mathfrak{g}^\perp$ die Einschränkung von $\kappa_{\mathfrak{g}}$ auf $\mathfrak{g}^\perp$. Insbesondere gilt $\kappa_{\mathfrak{g}^\perp} = 0$. Daraus folgt $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^\perp) \subset \mathfrak{g}^\perp = (\mathfrak{g}^\perp)^{\perp_{\kappa_{\mathfrak{g}^\perp}}}$. Nach dem Kriterium von Cartan (Theorem 6.4.2) ist $\mathfrak{g}^\perp$ auflösbar also in $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ enthalten. Es folgt $\mathfrak{g}^\perp = 0$ und $\kappa_{\mathfrak{g}}$ ist nicht ausgeartet.

(3. $\Rightarrow$ 1). Angenommen $\kappa_\mathfrak{g}$ sei nicht ausgeartet. Sei I ein abelsches Ideal von $\mathfrak{g}$. Seien $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in I$. Wir bestimmen $\kappa_\mathfrak{g}(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$. Es gilt aber $\mathrm{ad}_x(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_x(I) \subset I$ und $\mathrm{ad}_y(\mathfrak{g}) \subset I$, $\mathrm{ad}_y(I) \subset 0$ (da I abelsch ist). Daraus folgt $(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)(\mathfrak{g}) \subset I$ und $(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)^2(\mathfrak{g}) \subset 0$. Es gilt also $\kappa_\mathfrak{g}(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) = 0$ und $I \subset \mathfrak{g}^\perp = 0$. ■

Korollar 7.2.2 Seien $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ halbeinfache Lie Algebren. Dann ist $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ halbeinfach.

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_1) \times \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_2)$.

Da $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}_1)$ und $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}_2)$ auflösbar sind ist das Produkt $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}_1) \times \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_2)$ auch auflösbar und es gilt $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}_1) \times \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_2) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2)$.

Umgekehrt betrachten wir die kanonische Projektionen $p_1 : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_1$ und $p_2 : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_2$ definiert durch $(x_1.x_2) \mapsto x_1$ und $(x_1, x_2) \mapsto x_2$. Das Bild von $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2)$ in $\mathfrak{g}_1$ via p_1 ist auflösbar also in $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}_1)$ enthalten. Ananlog ist das Bild von $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2)$ in $\mathfrak{g}_2$ via p_2 in $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}_2)$ enthalten. Die umkehre Enthaltung folgt. ■

Korollar 7.2.3 Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Es gilt $\mathcal{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

Beweis. Sei $x \in (\mathcal{D}\mathfrak{g})^\perp$ und sei $y, z \in \mathfrak{g}$. Es gilt $\kappa_\mathfrak{g}([x,y],z) = \kappa_\mathfrak{g}(x,[y,z]) = 0$. Insbesondere gilt $[x,y] \in \mathfrak{g}^\perp = 0$ (die Killing-Form ist nicht ausgeartet). Es folgt $[x,y] = 0$ also $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, gilt $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ und also $x = 0$. Es folgt $(\mathcal{D}\mathfrak{g})^\perp = 0$ und $\mathcal{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. ■

Korollar 7.2.4 Sei $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung mit $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann gilt $\varrho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$.

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{g}$. Es gilt $\mathfrak{g} = \mathcal{D}\mathfrak{g}$. Also gibt es Elemente $y_i, z_i \in \mathfrak{g}$ mit $x = \sum_i [y_i, z_i]$. Es folgt $\mathrm{Tr}(x_V) = \mathrm{Tr}(\sum_i [y_i, z_i]_V) = \mathrm{Tr}([(y_i)_V, (z_i)_V]) = 0$. ■

Proposition 7.2.5 Sei $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine injektive Darstellung mit $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann ist B_V die Bilinearform zu V nicht ausgeartet.

Beweis. Sei $I = \mathfrak{g}^\perp$, wobei $\perp$ die Orthogonalität bezüglich B_V ist. Dann ist I ein Ideal von $\mathfrak{g}$. Die Einschränkung der Darstellung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ induziert eine injektive I-Darstellung $I \to \mathfrak{gl}(V)$. Die Bilinearform B'_V zu dieder Darstellung ist die Null-Form. Es folgt $I^\perp = I \supset \mathcal{D}(I)$. Nach Theorem 6.4.2 ist die Lie Algebra I auflösbar. Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, gilt $I = 0$. ■

Korollar 7.2.6 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und sei $\mathfrak{h}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

1. Sei $\mathfrak{h}$ halbeinfach ist. Dann ist $\mathfrak{h}^\perp$ (wobei die Orthogonalität bezüglich der Killing-Form $\kappa_\mathfrak{g}$ ist) ein Komplement von $\mathfrak{h}$ und es gilt $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\perp] \subset \mathfrak{h}^\perp$.

2. Sei $\mathfrak{h}$ ein halbeinfaches Ideal von $\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{h}^\perp$ auch ein Ideal und es gilt $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^\perp$ als Lie Algebra. Außerdem gilt $\mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x,y] = 0 \text{ für alle } y \in \mathfrak{h}\}$.

Beweis. 1. Sei $\mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ die Darstellung definiert durch $x \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$. Diese Darstellung ist injektiv: Sei x im Kern, es gilt $0 = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)(y) = [x, y]$ für alle $y \in \mathfrak{g}$. Insbesondere gilt $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = 0$. Nach dem obigen Proposition, ist die Bilinearform $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}}$ zu dieser Darstellung nicht ausgeartet. Insbesondere gilt $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp} = \mathfrak{h}^{\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}}} = 0$. Es folgt $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^{\perp}$.

Für $x \in \mathfrak{h}^{\perp}$ und $y, z \in \mathfrak{h}$ gilt $\mathrm{Tr}([x, y], z) = \mathrm{Tr}(x, [y, z]) = 0$ da $[y, z] \in \mathfrak{h}$. Daraus folgt die Enthaltung $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{\perp}] \subset \mathfrak{h}^{\perp}$.

2. Sei $\mathfrak{h}$ ein Ideal, dann ist $\mathfrak{h}^{\perp}$ ein Ideal. Für $x, y \in \mathfrak{g}$ gibt es Darstellungen $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ wobei $x_1, y_1 \in \mathfrak{h}$ und $x_2, y_2 \in \mathfrak{h}^{\perp}$. Es gilt $[x, y] = [x_1, y_1] + [x_2, y_2] + [x_1, y_2] + [x_2, y_1]$. Aber die zwei letzte Terme sind in $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^{\perp} = 0$. Es folgt $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^{\perp}$. Da $\mathfrak{h}^{\perp}$ und $\mathfrak{h}$ kommutieren und da $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = 0$ folgt die letzte Aussage. ∎

Korollar 7.2.7 Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra. Dann gilt $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Inner}(\mathfrak{g})$.

Beweis. Die Lie Algebra $\mathrm{Inner}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ ist das Bild von $\mathfrak{g}$ via die adjungierte Darstellung. Das $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, ist die adjungierte Darstellung injektiv unf $\mathfrak{g} \simeq \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Inner}(\mathfrak{g})$ ist eine halbeinfache Lie Unteralgebra von $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Nach Proposition 2.2.2 gilt $[D, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{D(x)}$. Insbesondere ist $\mathrm{Inner}(\mathfrak{g})$ ein Ideal von $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Nach dem obigen Korollar gilt

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Inner}(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Inner}(\mathfrak{g})).$$

Wir bestimmen $\mathfrak{z}_{\mathrm{Der}}(\mathrm{Inner}(\mathfrak{g}))$. Sei $D \in \mathfrak{z}_{\mathrm{Der}}(\mathrm{Inner}(\mathfrak{g}))$. Es gilt $[D, \mathrm{ad}\, x] = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Aber Nach Proposition 2.2.2 gilt $[D, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{D(x)}$ also $\mathrm{ad}_{D(x)} = 0$. Da ad injektiv ist gilt $D(x) =$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und es folgt $D = 0$. ∎

Korollar 7.2.8 Ideale einer halbeinfachen Lie Algebra sind charakteristische Ideale.

Korollar 7.2.9 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und sei I ein Ideal von $\mathfrak{g}$.

1. Seien I und $\mathfrak{g}/I$ halbeinfach. Dann ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach.

2. Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann sind I und $\mathfrak{g}/I$ halbeinfach.

Beweis. 1. Nach Korollar 7.2.6 gilt $\mathfrak{g} = I \times I^{\perp}$. Es folgt $\mathfrak{g}/I \simeq I^{\perp}$ und $\mathfrak{g} \simeq I \times \mathfrak{g}/I$. Da I und $\mathfrak{g}/I$ halbeinfach sind folgt aus Korollar 7.2.2, dass $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist.

2. Das Zentrum $\mathfrak{z}(I)$ von I ist ein charakteristisches Ideal von I. Insbesondere ist $\mathfrak{z}(I)$ ein abelches Ideal von $\mathfrak{g}$. Es folgt $\mathfrak{z}(I) = 0$.

Wir zeigen, dass $I \cap I^{\perp} \subset \mathfrak{z}(I) = 0$ wobei $\perp$ die Orthogonalität bezüglich der Killing-Form ist. Sei $x \in I \cap I^{\perp}$, sei $y \in I$ und sei $z \in \mathfrak{g}$. Es gilt $\kappa_{\mathfrak{g}}([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]) = 0$ da $x \in I^{\perp}$ und $[y, z] \in I$. Da $\kappa_{\mathfrak{g}}$ nicht ausgeartet ist gilt $[x, y] = 0$ für alle $y \in I$. Es folgt $x \in \mathfrak{z}(I)$.

Sei κ_I die Killing-Form für I. Wir zeigen, dass κ_I nicht ausgeartet ist. Sei $x \in I^{\perp_{\kappa_I}}$. Da $\kappa_I = \kappa_{\mathfrak{g}}|_I$ gilt für alle $y \in I$, dass $\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \kappa_I(x, y) = 0$. Es gilt also $x \in I \cap I^\perp = 0$. Daraus folgt, dass κ_I nicht ausgeartet ist und I ist halbeinfach.

Es folgt, dass $\mathfrak{g} = I \times I^\perp \simeq I \times \mathfrak{g}/I$. Insbesondere gilt $\mathfrak{g}/I \simeq I^\perp$. Aber $I^\perp$ ist ein Ideal und es folgt, dass $\mathfrak{g}/I \simeq I^\perp$ halbeinfach ist. ■

7.3. Einfache Lie Algebren

Proposition 7.3.1 Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, wenn $\mathfrak{g}$ ein Produkt von einfache Lie Algebren der Dimension ungleich 1 ist.

Beweis. Eine einfache Lie Algebra der Dimension ungleich 1 ist halbeinfach. Nach Korollar 7.2.2 ist ein Produkt von solche Lie Algebren auch halbeinfach.

Umgekehrt zeigen wir per Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$, dass eine halbeinfache Lie Algebra ein Produkt von einfache Lie Algebren ist. Für $\dim \mathfrak{g} = 0$ ist die Aussage klar. Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach der dimension n. Wir nehmen an, dass alle halbeinfache Lie Algebren der Dimension kleiner n Produkte von einfache Lie Algebren sind.

Ist $\mathfrak{g}$ einfach, sind wir fertig. Ist $\mathfrak{g}$ nicht einfach, dann gibt es ein nicht triviales Ideal I von $\mathfrak{g}$ und I ist halbeinfach. Es gilt also $\mathfrak{g} = I \times I^\perp$. Da I und $I^\perp$ halbeinfache Ideale der Dimension kleiner n sind, sind beide Produkte von einfache Lie Algebren. Es folgt, dass $\mathfrak{g}$ ein Produkt von einfache Lie Algebren ist. ■

Korollar 7.3.2 Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra.

1. $\mathfrak{g}$ ist das Produkt von alle einfache Ideale $(\mathfrak{g}_i)_{i \in [1,n]}$ von $\mathfrak{g}$.

2. Ein Ideal I von $\mathfrak{g}$ ist ein Produkt von gewisse $\mathfrak{g}_i$.

Beweis. Nach dem Proposition ist $\mathfrak{g}$ das Produkt von einfache Lie Algebren $\mathfrak{g}_i$. Diese Lie Algebren sind einfache Ideale von $\mathfrak{g}$.

Sei I ein Ideal von $\mathfrak{g}$. Dann ist $I \cap \mathfrak{g}_i$ ein Ideal von $\mathfrak{g}_i$ und es gilt $I \cap \mathfrak{g}_i = 0$ oder $I \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i$ *i.e.* $\mathfrak{g}_i \subset I$. Seien $\mathfrak{g}_{i_1}, \cdots, \mathfrak{g}_{i_r}$ die einfache Lie Algebren mit $\mathfrak{g}_{i_k} \subset I$. Wir zeigen, dass $I = \mathfrak{g}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{g}_{i_r}$. Es gilt $\mathfrak{g}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{g}_{i_r} \subset I$. Umgekehrt, sei $x = (x_1, \cdots, x_n) \in I$ und $i \notin \{i_1, \cdots, i_r\}$. Wir zeigen, dass $x_i = 0$. Angenommen $x_i \neq 0$. Da $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_i) = 0$ gilt $x_i \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_i)$. Es gibt also ein $y_i \in \mathfrak{g}_i$ mit $[x_i, y_i] \neq 0$. Es gilt also $0 \neq [x_i, y_i] = [x, y_i] \in I \cap \mathfrak{g}_i$. Ein Widerspruch. ■

Definition 7.3.3 Die einfache Ideale einer halbeinfachen Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißen **einfache Komponente** von $\mathfrak{g}$.

Korollar 7.3.4 Sei $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein surjektiver Lie Algebra Homomorphismus. Dann gilt $f(\mathfrak{r}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}')$.

Beweis. Das Bild $I' = f(\mathfrak{r}(\mathfrak{g}))$ von $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ ist auflösbar und ist ein Ideal in $\mathfrak{g}'$ (da f surjektiv ist). Also gilt $f(\mathfrak{r}(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{g}')$.

Sei $p : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'/I'$ die kanonische Projektion. Es gibt ein sujektiven Lie Algebra Homomorphismus $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}'/I'$. Daraus folgt, dass G'/I' halbeinfach ist. Aber $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}')/I'$ ist ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{g}'/I'$ und muss also null sein. Es folgt $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}')/I = 0$ also $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}') = I'$. ■

7.4. Halbeinfachkeit der Darstellungen

Theorem 7.4.1 (Satz von Weyl) Endlich-dimensionale Darstellungen einer halbeinfachen Lie Algebra sind halbeinfach. □

Beweis. Wir zeigen zuerst einige Lemma.

Lemma 7.4.2 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und V eine $\mathfrak{g}$-Darstellung. Die folgende Aussagen sind äquivalent:

1. die Darstellung V ist halbeinfach;
2. für jede Teildarstellung $W \subset V$ gibt $U \subset V$ Teildarstellung mit $V = U \oplus W$. □

Beweis. (1. $\Rightarrow$ 2.) Sei $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ mit V_i einfach für $i \in [1, r]$ und sei W eine Teildarstellung von V. Wir zeigen per nduktion nach r, dass U exisitiert.

Für $r = 1$ ist V einfach und es gilt $W = 0$ oder $W = V$. Dann setezn wir $U = V$ oder $U = 0$ und die Aussage folgt.

Angenommen, dass es für $V' = V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$ und W' Teildarstellung von V' ein U' gibt mit $V' = U' \oplus W'$. Wir betrachten die kanonische Projektion $p : V \to V/V_1 \simeq V_2 \oplus \cdots \oplus V_r = V'$. Dann ist $W' = p(W)$ eine Teildarstellung von V' und es gibt U' Teildarstellung von V' mit $V' = U' \oplus W'$. Außerdem gilt $\mathrm{Ker} p|_W = W \cap V_1$. Da V_1 einfach ist gilt $\mathrm{Ker} p|_W = 0$ oder $\mathrm{Ker} p|_W = V_1$.

Im Fall $\mathrm{Ker} p|_W = 0$, setzen wir $U = V_1 \oplus U'$. Wir zeigen $V = U \oplus W$. Sei $v \in U \cap W$. Wir schreiben $v = v_1 + v'$ mit $v_1 \in V_1$ und $v' \in U'$. Es gilt $v' = p(v) \in p(W) = W'$ also $v' \in U' \cap W' = 0$. Es folgt $v = v_1 \in V_1$ und $v \in W$ also $v \in V_1 \cap W = \mathrm{Ker} p = 0$. Daraus folgt $v = 0$. Sei $v \in V$. Wir schreiben $v = v_1 + v'$ mit $v_1 \in V_1$ und $v' \in V'$. Es gibt $u' \in U'$ und $w \in W$ mit $v' = u' + p(w)$. Es gilt $p(v - u' - w) = p(v) - p(u) - p(w) = v' - u' - p(w) = 0$. Insbesondere gilt $v - u' - w \in \mathrm{Ker} p = V_1$. Sei $v_1' = v - u' - w$, es gilt $v = v_1' + u + w \in U \oplus W$. Es folgt $V = U \oplus W$.

Im Fall $\mathrm{Ker} p|_W = V_1$, setzen wir $U = U'$. Wir zeigen $V = U \oplus W$. Sei $v \in U \cap W$. Da $v \in U \subset V'$ gilt $v = p(v)$. Daraus folgt $v = p(v) \in U \cap p(W) = U' \cap W' = 0$. Sei $v \in V$. Wir schreiben $v = v_1 + v'$ mit $v_1 \in V_1$ und $v' \in V'$. Es gibt $u' \in U'$ und $w \in W$ mit $v' = u' + p(w)$. Es gilt $p(v - u' - w) = p(v) - p(u) - p(w) = v' - u' - p(w) = 0$.

Insbesondere gilt $v - u' - w \in \mathrm{Ker} p = V_1$. Sei $v_1' = v - u' - w$, es gilt $v = u + w + v_1' \in U \oplus W$ da $V_1 \subset W$. Es folgt $V = U \oplus W$.

(1. $\Rightarrow$ 2.) Per Induktion nach $\dim V$. Für $V = 0$ ist die Aussage klar. Sei $W \subset V$ eine echte Teildarstellung mit $V_r = V/W$ einfach. Wir zeigen, dass 2. gilt für W. Sei W' eine Teildarstellung von W. Dann ist W' eine Teildarstellung von V und es gibt eine Teildarstellung E von V mit $W' \oplus E = V$. Sei $U' = E \cap W$. Es gilt $U' \cap W' = E \cap W \cap W' = E \cap W' = 0$. Sei $w \in W$. Dann gibt es $e \in E$ und $w' \in W'$ mit $w = w' + e$. Es gilt $e = w - w' \in E \cap W = U'$. Es gilt also $W = U' \oplus W'$. Dann gilt per Induktion, dass es einfache Teildarstellungen $V_1, \cdots, V_{r-1}$ gibt mit $W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{r-1}$. Sei U eine Teildarstellung mit $V = W \oplus U$. Es gilt $V_r = V/W \simeq U$ ist einfach und es folgt $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ mit V_i einfach für alle $i \in [1, r]$. ■

Lemma 7.4.3 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Die folgende Aussagen sind äquivalent:

1. alle endlich dimensionale Darstellungen von $\mathfrak{g}$ sind halbeinfach;

2. Gegeben $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung und W ein Unterraum der Kodimension 1 in V mit $\varrho(x)(V) \subset W$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Dann gibt es ein Teildarstellung L von V mit $\dim L = 1$ so, dass $V = W \oplus L$. □

Beweis. (1. $\Rightarrow$ 2.) ist klar.

(2. $\Rightarrow$ 1.) Per Induktion nach der Dimension.

Sei $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E)$ eine endlich-dimensionale Darstelung und sei F eine Teildarstellung. Wir betrachten die induzierte Darstellung $\tau : \mathfrak{g} \to \mathrm{Hom}(E, F)$. Diese Darstellung ist definiert durch $x_{\mathrm{Hom}(E,F)} \cdot \varphi = x_F \circ \varphi - \varphi \circ x_E$. Seien V und W die Unterräume definiert durch

$$\begin{aligned} V &= \{\varphi \in \mathrm{Hom}(E, F) \mid \text{es gibt } \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \varphi|_F = \lambda \mathrm{Id}_F\} \\ W &= \{\varphi \in \mathrm{Hom}(E, F) \mid \varphi|_F = 0\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen zuerst, dass V und W Teildarstellungen von $\mathrm{Hom}(E, F)$ sind. Sei $\varphi \in V$. Es gilt $\varphi|_F = \lambda \mathrm{Id}_F$ und $(x_{\mathrm{Hom}(E,F)} \cdot \varphi)|_F = x_F \circ \varphi|_F - \varphi|_F \circ x_F = x_F \circ \lambda \mathrm{Id}_F - \lambda \mathrm{Id}_F \circ x_F = 0$.

Sei $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ die induzierte Darstellung. Nach Annahme gibt es eine Teildarstellung $L = \langle \varphi \rangle$ der Dimension 1 mit $V = W \oplus L$. Insbesondere gilt $\varphi|_F = \lambda \mathrm{Id}_F$ mit $\lambda \neq 0$ und $\varrho(x)(\varphi) \subset L \cap W = 0$. Es folgt $x_E \circ \varphi = \varphi \circ x_E$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Sei $G = \mathrm{Ker} \varphi$. Es gilt $E = F \oplus G$ und G ist eine Teildastellung von E. Per Induktion nach der Dimension sind F und G halbeinfach also auch E. ■

Lemma 7.4.4 Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra und sei $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung. Sei W eine Teildarstellung der Kodimension 1 von V mit $\varrho(x)(V) \subset W$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Dann gibt es eine Teildarstellung L der Dimension 1 von V mit $V = W \oplus L$. □

Beweis. Sei $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ die eingeschränkte Darstellung. Angenommen $\sigma = 0$. Dann gilt $\varrho(x)\varrho(y) = 0$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$. Es folgt $\varrho([x, y]) = 0$ und $\varrho(\mathfrak{g}) = \varrho(\mathcal{D}\mathfrak{g}) = 0$. Die Darstellung ist die triviale Darstellung und jedes Komplement L von W ist eine Teildarstellung.

Angenommen $\sigma \neq 0$. Wir nehmen zuerst an, dass W einfach ist. Sei $I = \mathrm{Ker}\sigma$. Es ist ein Ideal von $\mathfrak{g}$. Nach Lemma 7.4.2 gilt $\mathfrak{g} = I \times I^{\perp}$. Die Einschränkung $\sigma|_{I^{\perp}}$ ist injektiv. Nach Proposition 7.2.5 ist die Bilinearform B zu dieser Darstellung nicht ausgeartet. Sei $c_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ das Casimir Element von $\mathfrak{g}$ bezüglich B. Es gibt eine lineare Abbildung $\Phi_V : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ definiert durch $\Phi_V(x \otimes y) = x_V \circ y_V$ und $\Phi_V(c_{\mathfrak{g}})|_W = c_{\mathfrak{g}}^W$ ist das Casimir Element von $\mathfrak{g}$ bezüglich B und W. Nach Proposition 3.9.6 ist $c_{\mathfrak{g}}^W$ ein Automorphismus von W. Aber es gilt $\Phi_V(c_{\mathfrak{g}})(V) \subset W$. Also gilt $\mathrm{im}(\Phi_V(c_{\mathfrak{g}})) = W$. Sei $L = \mathrm{Ker}\Phi_V(c_{\mathfrak{g}})$. Es gilt $\dim L = 1$ und $L \cap W = 0$. Daraus folgt, dass L eine Teildarstellung der Dimension 1 ist mit $V = W \oplus L$.

Angenommen W sei nicht einfach. Wir zeigen die Aussage per Induktion nach $\dim V$. Sei U eine minimale Teildarstellung von W und sei $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(U)$ die induzierte Darstellung. Dann ist U einfach. Für die Quotientdarstellung V/U gilt nach Induktion, dass es eine Teildarstellung Z/U der Dimension 1 gibt mit $V/U = W/U \oplus Z/U$. Sei $p : V \to V/U$. Das Urbild $Z = p^{-1}(Z/U)$ ist eine Teildarstellung von V und $W \cap Z = U$. Es gilt $\tau(x)(Z) \subset U$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Da U einfach ist gilt aus dem obigen Paragraph, dass es eine Teildarstellung L von Z der Dimension 1 gibt mit $Z = U \oplus L$. Es folgt, dass L eine Teildarstellung L von V der Dimension 1 ist mit $V = W \oplus L$. ■

Theorem 7.4.1 folgt aus Lemma 7.4.3 und Lemma 7.4.4. ■

Korollar 7.4.5 Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, wenn alle endlich-dimensionale $\mathfrak{g}$-Darstellungen halbeinfach sind.

Beweis. Der Satz von Weyl besagt, dass wenn $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, dann auch alle endliche-dimensionale $\mathfrak{g}$-Darstellungen halbeinfach sind.

Umgekehrt sei $\mathfrak{g}$ nicht halbeinfach. Sei die adjungierte Darstellung nicht halbeinfach sind wir fertig. Angenommen die adjungierte Darstellung sei halbeinfach. Sei I ein nicht-triviales abelsche Ideal von $\mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach als $\mathfrak{g}$-Darstellung ist gibt es ein Ideal J mit $\mathfrak{g} = I \oplus J$. Sei $x \in I \setminus \{0\}$ und sei $\mathfrak{h}$ ein Komplement von $\langle x \rangle$ in I. Es gibt ein Lie Algebra-Isomorphismus

$$\mathfrak{g} \simeq I \times J \simeq \langle x \rangle \times \mathfrak{h} \times J.$$

Insbesondere für $\langle x \rangle \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung ist die hintereinander Schaltung $\mathfrak{g} \to \langle x \rangle \to \mathfrak{gl}(V)$ eine $\mathfrak{g}$-Darstellung wobei $\mathfrak{g} \to \langle x \rangle$ die kanonische Projektion ist. Aber die Darstellung $\langle x \rangle \to \mathfrak{gl}_2$ definiert durch

$$x_{\mathbb{C}^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nicht halbeinfach. Dasselbe gilt für $\mathbb{C}^2$ als $\mathfrak{g}$-Darstellung. ■

7.5. Jordan-Chevalley Zerlegung

Proposition 7.5.1 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Dann sind, für alle $x \in \mathfrak{g}$, der halbeinfache Teil x_s und der nilpotente Teil x_n in $\mathfrak{g}$.

Beweis. Für W eine Teildarstellung von V, schreiben wir $\mathfrak{g}_W$ für die Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ definiert durch

$$\mathfrak{g}_W = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid x(W) \subset W \text{ und } \mathrm{Tr}(x|_W) = 0\}.$$

Für $x \in \mathfrak{g}$ gilt $x(W) \subset W$ und da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, gilt $x|_W \in \mathfrak{sl}(W)$. Es folgt $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_W$.

Sei $x \in \mathfrak{g}$ und sei $x = x_s + x_n$ die Jordan-Chevalley Zerlegung, wobei $x_s, x_n \in \mathfrak{gl}(V)$. Sei W eine Teildarstellung von V. Es gilt $x(W) \subset W$. Daraus folgt $x_s(W) \subset W$ und $x_n(W) \subset W$. (siehe Theorem 5.2.1). Darüber hinaus ist x_n nilpotent. Es folgt $\mathrm{Tr}((x_n)|_W) = 0$ und $\mathrm{Tr}((x_s)|_W) = \mathrm{Tr}(x|_W) - \mathrm{Tr}((x_n)|_W) = 0$. Also gilt $x_s, x_n \in \mathfrak{g}_W$.

Sei $\mathfrak{n}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ der Normalisator von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{gl}(V)$ *i.e.*

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) = \{y \in \mathfrak{gl}(V) \mid [y, x] \in \mathfrak{g} \text{ für alle } x \in \mathfrak{g}\}.$$

Dies ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Wir setzen

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{n}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) \cap \bigcap_W \mathfrak{g}_W$$

wobei wir den Schnitt über alle Teildarstellung W von V betrachten. Es gilt $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^*$ und $x_s, x_n \in \mathfrak{g}^*$.

Es genügt also zu zeigen, dass $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$. Da $\mathfrak{g}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}^*$ ist (weil $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$) und $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, gilt nach Korollar 7.2.6, dass $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \times \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g})$. Sei $y \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g})$ und sei W eine minimale $\mathfrak{g}$-Teildarstellung in V. Sei λ ein Eigenwert von y in W. Der Eigenraum $E_\lambda(y|_W) = \mathrm{Ker}(y|_W - \lambda \mathrm{Id}_W)$ ist $\mathfrak{g}$-invariant und nicht trivial. Da W einfach ist, gilt $E_\lambda(y|_W) = W$ *i.e.* $y|_W = \lambda \mathrm{Id}_W$. Es gilt aber $\mathrm{Tr}(y|_W) = 0$ also $\lambda = 0$ und $y|_W = 0$. Da V halbeinfach ist, ist V eine Summe von einfachen Teildarstellungen und es folgt $y = 0$. ∎

Korollar 7.5.2 Sei V ein endliche-dimensionaler Vektorraum und sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Ein Element $x \in \mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach (bzw. nilpotent), wenn $\mathrm{ad}\, x$ so ist.

Beweis. Sei $x = x_s + x_n$ die Jordan-Chevalley Zerlegung von x. Dann ist $\mathrm{ad} x = \mathrm{ad} x_s + \mathrm{ad} x_n$ die Jordan-Chevalley Zerlegung von $\mathrm{ad} x$ (Lemma 5.2.4). Sei x halbeinfach (bzw. nilpotent), gilt $x_n = 0$ (bzw. $x_s = 0$) und $\mathrm{ad}\, x_n = 0$ (bzw. $\mathrm{ad}\, x_s = 0$) *i.e.* $\mathrm{ad}\, x$ ist halbeinfach (bzw. nilpotent). Umgekehrt, sei $\mathrm{ad} x$ halbeinfach (bzw. nilpotent). Dann gilt $\mathrm{ad}\, x_n = 0$ (bzw. $\mathrm{ad}\, x_s = 0$). Da $\mathfrak{g}$ haleinfach ist, ist die adjungierte Darstellung injektiv und es gilt $x_n = 0$ (bzw. $x_s = 0$) und x ist halbeinfach (bzw. nilpotent). ∎

Definition 7.5.3 Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra. Ein Element $x \in \mathfrak{g}$ heißt **halbeinfach** (bzw. **nilpotent**) wenn, für alle endlich-dimensionale Darstellung V von $\mathfrak{g}$, das Element x_V halbeinfach (bzw. nilpotent) ist.

Proposition 7.5.4 Sei $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ein Lie-Algebrahomomorphismus, wobei $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ halbeinfach sind.

1. Ist $x \in \mathfrak{g}$ halbeinfach (bzw. nilpotent), so ist $f(x)$.

2. Außerdem, ist f surjektiv, dann sind alle halbeinfache (bzw. nilpotente) Element von $\mathfrak{g}'$ das Bild eines halbeinfachen (bzw. nilpotenten) Element von $\mathfrak{g}$.

Beweis. 1. Sei V eine $\mathfrak{g}'$-Darstellung. Dann ist V auch eine $\mathfrak{g}$-Darstellung durch $x_V = f(x)_V$. Der erste Teil folgt.

2. Sei $I = \mathrm{Ker} f$. Es gilt $\mathfrak{g} = I \times I^\perp$ und $I^\perp \simeq \mathfrak{g}/I$. Da f surjektiv ist, gilt $\mathfrak{g}/I \simeq \mathfrak{g}'$. Es folgt $\mathfrak{g} \simeq I \times \mathfrak{g}'$. Es gibt also ein Lie-Algebrahomomorphismus $f' : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ mit $f \circ f' = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}'}$. Für $x' \in \mathfrak{g}'$, gilt $x' = f(f'(x'))$ und $f'(x')$ ist halbeinfach (bzw. nilpotent) nach 1. wenn x' so ist. ∎

Theorem 7.5.5 Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra.

1. Ein Element $x \in \mathfrak{g}$ is genau dann halbeinfach (bzw. nilpotent), wenn es eine injektive endlich-dimensionale Darstellung $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ gibt mit $\varrho(x)$ halbeinfach (bzw. nilpotent).

2. Jedes Element $x \in \mathfrak{g}$ hat eine Darstellung $x = x_s + x_n$, wobei $x_s \in \mathfrak{g}$ halbeinfach ist, $x_n \in \mathfrak{g}$ nilpotent ist und $[x_s, x_n] = 0$. □

Beweis. 1. Sei x halbeinfach (bzw. nilpotent). Dann ist $\mathrm{ad}\, x$ halbeinfach und $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ ist injektiv.

Umgekehrt, sei $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ injektiv mit $\varrho(x)$ halbeinfach (bzw. nilpotent). Dann ist $\mathrm{ad}\, x$ halbeinfach (bzw. nilpotent) nach Korollar 7.5.2.

Sei $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ eine endlich-dimensionale $\mathfrak{g}$-Darstellung und sei I der Kern. Es gilt $\mathfrak{g} = I \times I^\perp$. Sei $J = I^\perp$ und $p : \mathfrak{g} \to J \simeq \mathfrak{g}/I$ die kanonische projektion. Es gilt $\mathrm{ad}_J p(x) = (\mathrm{ad}\, x)|_J$ also ist $\mathrm{ad}_J p(x)$ halbeinfach (bzw. nilpotent). Die einschränkung von σ auf J ist injektiv. Nach Korollar 7.5.2, ist $\sigma(p(x))$ halbeinfach (bzw. nilpotent). Da $\sigma(x) = \sigma(p(x))$, folgt 1.

2. Die Jordan-Chevalley Zerlegung in der adjungierten Darstellung gibt diese Zerlegung. ∎

Teil II.

Klassifizierung halbeinfacher Lie Algebren

8. Cartan Unteralgebren

8.1. Definition

Definition 8.1.1 Sei $\mathfrak{g}$ ein Lie Algebra. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ heißt **Cartan Unteralgebra** wenn gilt following two conditions:

- $\mathfrak{h}$ ist nilpotent;
- $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\} = \mathfrak{h}$.

Beispiel 8.1.2 Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Dann ist die Unteralgebra aller diagonalen Matrizen in $\mathfrak{g}$ eine Cartan Unteralgebra.

8.2. Reguläre Elemente

Definition 8.2.1 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und sei $x \in \mathfrak{g}$. Sei $\chi_{\mathrm{ad}\,x}(T)$ das charakteristisches Polynom von $\mathrm{ad}\,_x$. Sei $n = \dim \mathfrak{g}$. Wir definieren die Funktionen $a_i : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ durch die Gleichung

$$\chi_{\mathrm{ad}\,x}(T) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) T^i.$$

Definition 8.2.2 Der **Rang** von $\mathfrak{g}$ ist

$$\mathrm{Rg}(\mathfrak{g}) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}.$$

Bemerkung 8.2.3 Es gilt $1 \leq \mathrm{Rg}(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g}$.

Der Rang ist immer kleiner gleich $n = \dim \mathfrak{g}$. Die Gleichung $\mathrm{Rg}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ gilt genau dann wenn, $\mathfrak{g}$ nilpotent ist.

Da $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\,_x)$ gilt $a_0(x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $\mathrm{Rg}(\mathfrak{g}) \geq 1$.

Definition 8.2.4 Ein Element $x \in \mathfrak{g}$ heißt **regulär** falls $a_{\mathrm{Rg}(\mathfrak{g})}(x) \neq 0$.

Proposition 8.2.5 Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Die Menge $\mathfrak{g}_r$ aller regulären Elemente aus $\mathfrak{g}$ ist eine dichte, zusammenhängende, offene Teilmenge von $\mathfrak{g}$.

Proof. Es gilt $\mathfrak{g}_r = \{x \in \mathfrak{g} \mid \alpha_{\mathrm{Rg}(\mathfrak{g})}(x) \neq 0\}$. Da $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ offen ist und $a_{\mathrm{Rg}(x)}$ stetig ist (es ist ein Polynom in koordinaten von x), folgt, dass $\mathfrak{g}_r$ eine offene Teilmenge ist. Seien $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in \mathfrak{g}_r$. Wir setzen $L = \{z_t = (1-t)x + ty \mid t \in \mathbb{C}\}$. Sei $P(t) = a_{\mathrm{Rg}(\mathfrak{g})}(z_t)$. Dies ist ein Polynom in t und $L \cap \mathfrak{g}_r = \{z_t \mid P(t) \neq 0\}$.

Da P nur endlich viele Nullstelle hat gibt es eine Folge $(t_n)_{n\geq 0}$ mit $\lim_n t_n = 0$ und $P(t_n) \neq 0$ für alle $n \geq 0$. Es folgt, dass $\lim_n z_{t_n} = z_0 = x$ und $z_{t_n} \in \mathfrak{g}_r$ für alle $n \geq 0$ *i.e.* $\mathfrak{g}_r$ ist dicht in $\mathfrak{g}$.

Angenommen $x \in \mathfrak{g}_r$. Da P nur endlich viele Nullstelle hat gibt es einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$ und $P(\gamma(t)) \neq 0$ für allr t. Es folgt, dass $\Gamma : [0,1] \to \mathfrak{g}$ definiert durch $\Gamma(t) = z_{\gamma(t)}$ einen Weg in $\mathfrak{g}$ ist mit $\Gamma(0) = x$, $\Gamma(1) = y$ und $\Gamma(t) \in \mathfrak{g}_r$ für alle t. Es folgt, dass $\mathfrak{g}_r$ zusammenhängend ist.None

8.3. Cartan Unteralgebren und reguläre Elemente

Definition 8.3.1 Sei $x \in \mathfrak{g}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $\mathfrak{g}_x^\lambda$ für den Hauptraum von ad_x zum Eigenwert λ:

$$\mathfrak{g}_x^\lambda = \{y \in \mathfrak{g} \ / \ (\mathrm{ad}_x - \lambda \mathrm{Id}_\mathfrak{g})^n(y) = 0 \text{ für ein } n\}.$$

Lemma 8.3.2 Sei $n \geq 0$, seien $x, y, z \in \mathfrak{g}$ und sei $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$(\mathrm{ad}\, x - (\lambda+\mu)\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^n[y,z] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[(\mathrm{ad}\, x - \lambda\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^i y, (\mathrm{ad}\, x - \mu\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^{n-i} z\right].$$

Beweis. Per Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Aussage klar. Wir setzen $A = (\mathrm{ad}\, x - (\lambda+\mu)\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^{n+1}[y,z]$.

Nach Induktion gilt

$$\begin{aligned} A = & \ (\mathrm{ad}\, x - (\lambda+\mu)\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^{n+1}[y,z] \\ = & \ (\mathrm{ad}\, x - (\lambda+\mu)\mathrm{Id}_\mathfrak{g}) \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[(\mathrm{ad}\, x - \lambda\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^i y, (\mathrm{ad}\, x - \mu\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^{n-i} z\right] \right) \\ = & \ \mathrm{ad}\, x \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[(\mathrm{ad}\, x - \lambda\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^i y, (\mathrm{ad}\, x - \mu\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^{n-i} z\right] \right) \\ & -\lambda \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[(\mathrm{ad}\, x - \lambda\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^i y, (\mathrm{ad}\, x - \mu\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^{n-i} z\right] \\ & -\mu \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[(\mathrm{ad}\, x - \lambda\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^i y, (\mathrm{ad}\, x - \mu\mathrm{Id}_\mathfrak{g})^{n-i} z\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left[(\operatorname{ad} x - \lambda \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}})^{i+1}(x), (\operatorname{ad} x - \mu \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}})^{n-i}(y)\right] \\ & + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left[(\operatorname{ad} x - \lambda \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}})^{i}(x), (\operatorname{ad} x - \mu \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}})^{n+1-i}(y)\right] \\ = & \sum_{i=0}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) \left[(\operatorname{ad} x - \lambda \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}})^{i}(x), (\operatorname{ad} x - \mu \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}})^{n+1-i}(y)\right]. \end{aligned}$$

Die Aussage folgt. ■

Proposition 8.3.3 Sei $x \in \mathfrak{g}$. Es gilt

1. $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda} \mathfrak{g}_x^{\lambda}$.
2. $[\mathfrak{g}_x^{\lambda}, \mathfrak{g}_x^{\mu}] \subset \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu}$.
3. $\mathfrak{g}_x^0$ ist eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

Beweis. 1. Siehe LAII.

2. Folgt vom Lemma.

3. Folgt aus 2. ■

Lemma 8.3.4 Sei $x \in \mathfrak{g}$. Es gilt $\dim \mathfrak{g}_x^0 \geq \mathrm{Rg}(\mathfrak{g})$. Für x regulär gilt $\dim \mathfrak{g}_x^0 = \mathrm{Rg}(\mathfrak{g})$. □

Beweis. Das charakteristische Polynom $\chi_{\operatorname{ad} x}$ von $\operatorname{ad} x$ in $\mathfrak{g}$ ist das Produkt der charakterisctischen Polynome P_x^{λ} von $\operatorname{ad}_x|_{\mathfrak{g}_x^{\lambda}}$ für alle λ. Es gilt $P_x^0(T) = T^{\dim \mathfrak{g}_x^0}$ und für $\lambda \neq q0$ gilt $P_x^{\lambda}(0) \neq 0$. Es folgt $\chi_{\operatorname{ad} x}(T) = T^{\dim \mathfrak{g}_x^0} Q(T)$ mit $Q(0) \neq 0$. Insbesondere gilt $a_k(x) = 0$ für $k \leq \dim \mathfrak{g}_x^0$ und $a_{\dim \mathfrak{g}_x^0}(x) \neq 0$. Es folgt $\dim \mathfrak{g}_x^0 \geq \mathrm{Rg}(\mathfrak{g})$.

Für x regulär gilt $a_{\mathrm{Rg}(\mathfrak{g})}(x) \neq 0$ und $a_k(x) = 0$ für alle $k \leq \mathrm{Rg}(\mathfrak{g})$. Daraus folgt die Gleichheit. follows. ■

Theorem 8.3.5 Sei x regulär. Dann ist $\mathfrak{g}_x^0$ eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Es gilt $\dim \mathfrak{g}_x^0 = \mathrm{Rg}(\mathfrak{g})$. □

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\mathfrak{g}_x^0$ nilpotent ist. Dafür sollen wir zeigen, dass für alle $y \in \mathfrak{g}_x^0$, der Endomorphismus $A_y = (\operatorname{ad} y)|_{\mathfrak{g}_x^0}$ nilpotent ist. Sei B_y der Endomorphismus von $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x^0$ definiert durch $B_y(\bar{z}) = \overline{[y,z]}$. We setzen

$$U = \{y \in \mathfrak{g}_x^0 \ / \ A_y \text{ ist nicht nilpotent}\} \qquad V = \{y \in \mathfrak{g}_x^0 \ / \ B_y \text{ ist invertierbar}\}.$$

Diese Mengen are offene Teimengen von $\mathfrak{g}_x^0$ (die erste Teilmenge ist definiert durch: das Produkt von alle koeffizienten im charakteristischen Polynom ist nicht null, die zweite durch: die Determinante ist nicht null). Darüber hinhaus ist V nicht leer da $x \in V$ und dicht (selben Beweis wie im Proposition 8.2.5).

Es genügt zu zeigen , dass U leer ist. Angenommen U sei nicht leer. Dann ist $U \cap V$ auch nicht leer (V ist dicht und U ist offen). Sei $y \in U \cap V$. Es gilt $\mathfrak{g}_y^0 \subsetneq \mathfrak{g}_x^0$. Daraus folgt $\dim \mathfrak{g}_y^0 < \dim \mathfrak{g}_x^0$. Nach dem obigen Lemma und da x rgulär ist gilt $\dim \mathfrak{g}_x^x = \mathrm{Rg}(\mathfrak{g})$. Ein Widerspruch mit der Ungleichung $\dim \mathfrak{g}_y^0 \geq \mathrm{Rg}(\mathfrak{g})$ vom Lemma.

Jetzt zeigen wir, dass $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_x^0) = \mathfrak{g}_x^0$. Sei $z \in \mathfrak{n}(\mathfrak{g}_x^0)$. Es gilt $[z, \mathfrak{g}_x^0] \subset \mathfrak{g}_x^0$ also gilt $\mathrm{ad}_x(z) = -[z,x] \in \mathfrak{g}_x^0$. Daraus folgt, dass es ein $m \geq 0$ gibt it $(\mathrm{ad}_x)^m(\mathrm{ad}_x(z)) = 0$. Es folgt $z \in \mathfrak{g}_x^0$. ■

8.4. Konjugation von Cartan Unteralgebren

Definition 8.4.1 Sei $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ die Gruppe von Lie Algebra Automorphismen:

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \{f \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \mid f([x,y]) = [f(x), f(y)] \text{ für alle } x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Proposition 8.4.2 Sei $x \in \mathfrak{g}$. Es gilt $\exp(\mathrm{ad}_x) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Beweis. Es gilt $\exp(\mathrm{ad}_x)$ in $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ da $\exp(-\mathrm{ad}_x) = \exp(\mathrm{ad}_x)^{-1}$. Seien $y, z \in \mathfrak{g}$. Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$. Es gilt dank 8.3.2:

$$\begin{aligned}
(\exp(\mathrm{ad}_x))[y,z] = \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}_x)^n[y,z] \\
= \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} [(\mathrm{ad}_x)^i(y), (\mathrm{ad}_x)^{n-i}(z)] \\
= \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!}(\mathrm{ad}_x)^i(y)(\mathrm{ad}_x)^{n-i}(z) \\
& - \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!}(\mathrm{ad}_x)^{n-i}(z)(\mathrm{ad}_x)^i(y) \\
= \quad & (\exp(\mathrm{ad}_x))(y)(\exp(\mathrm{ad}_x))(z) - (\exp(\mathrm{ad}_x))(z)(\exp(\mathrm{ad}_x))(y).
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt. ■

Definition 8.4.3 Sei $\mathfrak{g}$ ein Lie Algebra. Die *innere-Automorphismen- Gruppe* G ist die von Elementen der Form $\exp \mathrm{ad}\, x$ für $x \in \mathfrak{g}$ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Theorem 8.4.4 Die Gruppe G wirkt transitiv auf der Menge aller Cartan Unteralgebren von $\mathfrak{g}$. □

Beweis. Sei $\mathfrak{h}$ ein Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Für $x \in \mathfrak{h}$ schreiben wir Y_x (bzw. Z_x) für $\mathrm{ad}_x|_{\mathfrak{h}}$ (bzw. für die Abbildung $Z_x : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ definiert durch $Z_x(\bar{y}) = \overline{[x,y]}$.

Lemma 8.4.5 Die Menge $V = \{x \in \mathfrak{h} \ / \ Z_x \text{ ist invertierbar}\}$ ist offen in $\mathfrak{h}$ und nicht leer. □

Beweis. Diese Menge ist offen da es durch die Ungleichung $\det(Z_x) \neq$ definiert ist. Wir zeigen, dass es nicht leer ist. Wir betrachten $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ als $\mathfrak{h}$-Darstellung. Die Wirkung von $x \in \mathfrak{h}$ ist dank Z_x definiert. Da $\mathfrak{h}$ nilpotent ist, ist $\mathfrak{h}$ auflösbar und Nach dem Satz von Lie gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_r)$ von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ so, dass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Z_x)$ eine obere Dreieckmatrix ist. Sei $V_i = \langle e_1, \cdot e_i \rangle$. Es gibt eine Linearform $\alpha_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ so, dass $Z_x(v) - \alpha_i(x)v \in V_{i-1}$ für alle $v \in V_i$ (die komplexe Zahl $\alpha_i(x)$ ist der i-te Koeffizient von $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Z_x)$ auf der Diagonal. Insbesondere sind $(\alpha_i(x))_{i\in[1,r]}$ die Eigenwerte von Z_x auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Es genügt zu zeigen, dass alle Linearformen $(\alpha_i)_{i\in[1,r]}$ nicht trivial sind: in diesem Fall ist V das Kompelment des Schnittes aller Hyperebenen $\{x \in \mathfrak{h} \ / \ \alpha_i(x) = 0\}$ für $i \in [1, r]$ also nicht leer.

Angenommen $\alpha_i = 0$ als Linearform. Sei $k = \min\{i \geq 0 \mid \alpha_k = 0\}$. Dann ist Z_x invertiebar auf V_{k-1} aber nicht auf V_k. Der Kern K von $Z_x|_{V_k}$ hat also Dimension 1 und es gilt $K \oplus V_{k-1} = V_k$. Es gilt also $K = \{v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \mid Z_x^n(v) = 0 \text{ für ein } n \geq 0\}$. Wir zeigen, dass für $y \in \mathfrak{h}$ und $v \in K$ gilt $Z_y(v) = 0$. Es gilt $Z_x(Z_y(z)) = \overline{[x, [y, v]]} = \overline{[[x, y], v]} + \overline{[y, [x, v]} = Z_{\mathrm{ad}\,x(y)}(v) + \overline{[y, Z_x(v)]} = Z_{\mathrm{ad}\,x}(v)$. Per Induktion folgt

$$Z_x^m(Z_y(v)) = (\mathrm{ad}\,_x)^m(\mathrm{ad}\,_y(v)) = Z_{(\mathrm{ad}\,_x)^m(y)}(v).$$

Da $\mathfrak{h}$ nilpotent ist, gilt $(\mathrm{ad}\,x)^m(y) = 0$ für ein m. Also $Z_x^m(Z_y(v)) = 0$ und $Z_y(v) \in K$. Aber $Z_y(V_k) \subset V_{k-1}$ (weil $\alpha_k = 0$). Daraus folgt $Z_y(v) \in K \cap V_{k-1} = 0$.

Sei $z \in \mathfrak{g}$. Dann ist die Klasse $\overline{z}$ in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ in K enthalten. Für $y \in \mathfrak{h}$, gilt $Z_y(\overline{z}) = 0$ also $\mathrm{ad}\,_y(z) \in \mathfrak{h}$ oder $\mathrm{ad}\,_z(y) \in \mathfrak{h}$. Daraus folgt $z \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ und $z \notin \mathfrak{h}$. Ein Widerspruch mit der Definition von Cartan Unteralgebren. ∎

Lemma 8.4.6 Sei $W = G \cdot V$ die Vereinigung

$$W = \bigcup_{g\in G} g \cdot V.$$

Dann ist W offen in $\mathfrak{g}$. □

Beweis. Sei $x \in V$. Es genür zu zeigen, dass W eine Umgebung von x in $\mathfrak{g}$ enthält. Sei $\mu : G \times V \to \mathfrak{g}$ definiert durch $\mu(g, y) = g \cdot y$. Es gilt $\mu(G \times V) = W$. Wir bestimmen das Bild I von $T_{(e,x)}(G \times V)$ (den Tangentraum) via die Differenzielle $d_{(e,x)}\mu$. Das Bild I enthält das Bild von $\mathfrak{h} = T_xV$ via die Differenzielle der Embettung $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ (die ist die Abbildung $\mu(e, \cdot)$). Darüber hinhaus betrachten wir für $y \in \mathfrak{g}$ die Kurve $t \mapsto \exp(t\mathrm{ad}\,_y)(x) = x + t[y, x] + O(t^2)$. Das bild eines Tangentsvektors dieser Kurve liegt in I. Insbesondere ist $[y, x]$ in I. Es folgt $\mathrm{ad}\,_x(\mathfrak{g}) \subset I$. Aber für $x \in V$, gilt, dass Z_x invertierbar ist. Die Projektion $\mathrm{ad}\,_x(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ist also sujektive und $I = \mathfrak{g}$.

Nach dem Satz von der impliziten Funktion, ist μ eine lokale Submertion am (e, x). Daraus folgt, dass das Bild W eine Umgebung von x enthält. ∎

Lemma 8.4.7 Es gibt ein reguläres Element x mit $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$. □

Beweis. Die Menge $\mathfrak{g}_r$ aller regulären Elemente ist dicht in $\mathfrak{g}$. Da W offen ist, gibt es ein $y \in W \cap \mathfrak{g}_r$. Es gibt also $g \in G$ und $x \in V$ mit $y = g \cdot x$. Dar Element x ist auch regulär: es gilt $\mathrm{ad}_y(z) = \mathrm{ad}_{g \cdot x}(z) = g \cdot \mathrm{ad}_x(g^{-1} \cdot z)$ und ad_y sind ad_x konjugiert. Es folgt $\chi_{ad_x} = \chi_{ad_y}$ und x ist regulär. Es gilt auch $x \in \mathfrak{h}$. Da $\mathfrak{h}$ nilpotent ist, gilt, dass Y_x nilpotent ist. Es folgt $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_x^0$. Da Z_x invertiebar ist gilt $\mathfrak{g}_x^0 = \mathfrak{h}$. ■

Um den Satz zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass es, für $x, y \in \mathfrak{g}_r$, ein Element $g \in G$ gibt mit $g(\mathfrak{g}_x^0) = \mathfrak{g}_y^0$. Wir betrachten die äquivalenz relation über $\mathfrak{g}_r$

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ es gibt } g \in G \text{ mit } g(\mathfrak{g}_x^0) = \mathfrak{g}_y^0.$$

Lemma 8.4.8 Die äquivalenzklassen von $\sim$ are offene Teilmengen von $\mathfrak{g}_r$. □

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{g}_r$. Wir zeigen, dass es eine Umgebung U von x gibt so, dass für alle $y \in U$ gilt $x \sim y$.

Sei $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$. Dies ist eine Cartan Unteralgebra. Die Teilmenge V ist offen und nicht leer und W ist offen. Es gilt $x \in V \cap \mathfrak{g}_r \subset W \cap \mathfrak{g}_r$. Es folgt, dass es eine Umbegung U von x gibt mit $U \subset W \cap \mathfrak{g}_r$. Sei $y \in U$. Diese Element ist regulär under Form $y = g \cdot z$ mit $z \in V$. Also ist z regulär. Es gilt $z \in \mathfrak{g}_x^0$ und Z_z ist invertierbar. Daraus folgt (selben Beweis als im obigen Lemma) $\mathfrak{g}_z^0 = \mathfrak{g}_x^0$ und $\mathfrak{g}_y^0 = g(\mathfrak{g}_z^0) = g(\mathfrak{g}_x^0)$. Es gilt also $x \sim y$. ■

Da $\mathfrak{g}_r$ zusammenhängend ist, gibt es eine einzige äquivalenzklasse für $\sim$. Daraus folgt der Satz. ■

8.5. Halbeinfacher Fall

Theorem 8.5.1 Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra und sei $\mathfrak{h}$ eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Dann gilt:

1. $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}}$ ist nicht ausgeartet.

2. $\mathfrak{h}$ ist abelsch.

3. $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$;

4. Alle $x \in \mathfrak{h}$ sind halbeinfach. □

Beweis. 1. Sei x regulär mit $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$. Wir haben die Zerlegung $\mathfrak{g} = \oplus_\lambda \mathfrak{g}_x^\lambda$.

Lemma 8.5.2 Sei $y \in \mathfrak{g}_x^\lambda$ und $z \in \mathfrak{g}_x^\mu$ mit $\lambda + \mu \neq 0$. Dann gilt $\kappa_{\mathfrak{g}}(y, z) = 0$. □

Proof. Sei $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_r)$ eine Basis von $\mathfrak{g}_x^\lambda$ so, dass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}\,_x|_{\mathfrak{g}_x^\lambda})$ in Jordan-Normal-Form ist. Sei $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_s)$ eine Basis von $\mathfrak{g}_x^\mu$ so, dass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{ad}\,_x|_{\mathfrak{g}_x^\mu})$ in Jordan-Normal-Form ist. Wir zeigen per Induktion nach $i+j$, dass $\kappa_\mathfrak{g}(e_i, f_j) = 0$. Da $\kappa_\mathfrak{g}$ bilinear ist, ist es genügend.

Für $i + j = 2$ gilt $i = j = 1$. Es gilt $\mathrm{ad}\,_x(e_1) = \lambda e_1$ und $\mathrm{ad}\,_x(f_1) = \mu f_1$ also gilt

$$(\lambda + \mu)\kappa_\mathfrak{g}(e_1, f_1) = \kappa_\mathfrak{g}(\lambda e_1, f_1) + \kappa_\mathfrak{g}(e_1, \mu f_1) = \kappa_\mathfrak{g}([x, e_1], f_1) + \kappa_\mathfrak{g}(e_1, [x, f_1]) = 0.$$

Da $\lambda + \mu \neq 0$, folgt $\kappa_\mathfrak{g}(e_1, f_1) = 0$. Angenommen $\kappa_\mathfrak{g}(e_i, f_j) = 0$ für $i + j = k$. Seien i, j mit $i + j = k + 1$. Es gilt Es gilt $\mathrm{ad}\,_x(e_i) = \lambda e_i + v$, wobei $v \in \langle e_1, \cdots, e_{i-1}\rangle$ und $\mathrm{ad}\,_x(e_j) = \mu e_j + v'$, wobei $v' \in \langle f_1, \cdots, f_{j-1}\rangle$. Es folgt

$$(\lambda+\mu)\kappa_\mathfrak{g}(e_i, f_j) = \kappa_\mathfrak{g}([x, e_i], f_j) + \kappa_\mathfrak{g}(e_i, [x, f_j]) + \kappa_\mathfrak{g}(\lambda e_i, v') + \kappa_\mathfrak{g}(v, \mu f_j) + \kappa_\mathfrak{g}(v, v') = 0.$$

Da $\lambda + \mu \neq 0$, folgt $\kappa_\mathfrak{g}(e_i, f_j) = 0$. ■

Daraus folgt, dass $\mathfrak{g}_x^0$ orthogonal zu aller $\mathfrak{g}_x^\lambda$ für $\lambda \neq 0$ ist. Da $\kappa_\mathfrak{g}$ nicht ausgeartet ist, gilt dass $\kappa_\mathfrak{g}|_\mathfrak{h}$ nicht ausgeartet ist.

2. Wir betrachten die Darstellung $\mathrm{ad}\; : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Diese Darstellung ist injektiv, da die adjungierte Darstellung injektiv ist. Das Bild $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{h})$ von $\mathfrak{h}$ ist auflösbar, weil $\mathfrak{h}$ nilpotent ist. Nach dem Kriterium von Cartan (Satz 6.4.2) gilt $[\mathrm{ad}\,(\mathfrak{h}), \mathrm{ad}\,(\mathfrak{h})] \subset \mathrm{ad}\,(\mathfrak{h})^{\perp_{\kappa_\mathfrak{g}}}$. Da $\kappa_\mathfrak{g}|_\mathfrak{h}$ nicht ausgeartet ist folgt $[\mathrm{ad}\,(\mathfrak{h}), \mathrm{ad}\,(\mathfrak{h})] = 0$ und $\mathfrak{h} \simeq \mathrm{ad}\,(\mathfrak{h})$ ist abelsch.

3. Es gilt $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Daraus folgt $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Da $\mathfrak{h}$ abelsch ist, gilt $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$.

4. Sei $x \in \mathfrak{h}$ und sei $x = x_s + x_n$ die Jordan-Chevalley Zerlegung (diese Zerlegung ist wohl definiert da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist). Sei $y \in \mathfrak{h}$, es gilt $[x, y] = 0$. Daraus folg $[x_s, y] = 0 = [x_n, y]$. Also gilt $x_s, x_n \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Sei $y \in \mathfrak{h}$ wir zeigen $\kappa_\mathfrak{g}(x_n, y) = 0$. Da x_n nilpotent ist, ist auch ad_{x_n} nilpotent. Aber $[x_n, y] = 0$ also folgt $[\mathrm{ad}_{x_n}, \mathrm{ad}_y] = 0$. Daraus folgt, dass $(\mathrm{ad}\,_{x_n}\mathrm{ad}\,_y)^m = \mathrm{ad}\,_{x_n}^m \mathrm{ad}\,_y^m = 0$ für m groß genug *i.e.* $\mathrm{ad}\,_{x_n}\mathrm{ad}\,_y$ ist nilpotent and $\kappa_\mathfrak{g}(x_n, y) = 0$. Da $\kappa_\mathfrak{g}|_\mathfrak{h}$ nicht ausgeartet ist, folgt $x_n = 0$. ■

Korollar 8.5.3 Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann sind Cartan Unteralgebren die maximale abelsche Unteralgebren.

Beweis. Folgt aus 3. vom Satz. ■

Korollar 8.5.4 Reguläre Elemente einer halbeinfachen Lie Algebra sind halbeinfach.

Beweis. Sei x regulär. Dann ist $\mathfrak{g}_x^0$ eine Cartan Unteralgebra. Aber es gilt $x \in \mathfrak{g}_x^0$ und Elemente eine Cartan Unteralgebren sind halbeinfach. Es folgt, dass x halbeinfach ist. ■

9. Die Lie Algebra $\mathfrak{sl}_2$

9.1. Definition

Definition 9.1.1 Die Lie Algebra $\mathfrak{sl}(k^2)$ wird $\mathfrak{sl}_2$ bezeichnet. Wir betrachten die Basis (e, h, f) von $\mathfrak{sl}_2$, wobei

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 9.1.2 Die Lie Algebra $\mathfrak{sl}_2$ hat dimension 3 und (e, h, f) ist eine Basis. Es gilt $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$ und $[h, f] = -2f$.

Korollar 9.1.3 Die Lie Algebra $\mathfrak{sl}_2$ ist einfach also auch halbeinfach.

Beweis. Sei $I \neq 0$ ein Ideal von $\mathfrak{sl}_2$ und sei $0 \neq ae + bh + cf \in I$. Falls $a = c = 0$ gilt $h \in I$. Es folgt, dass $2e = [h, e]$ und $2f = [h, f]$ aich i I sind. Daraus folgt $I = \mathfrak{sl}_2$. Falls $a \neq 0$ oder $c \neq 0$ können wir ohne Beschränkung annehmen, dass $a \neq 0$ gilt. Es gilt $[f, [f, ae+bh+cf]] = -[f, ah+2bf] = 2af$. Daraus folgt $f \in I$ und $h = [e, f] \in I$. Wie oben folgt $I = \mathfrak{sl}_2$. ∎

Korollar 9.1.4 Der Endomorphism ad_h hat 3 Eigenwerte 2, 0 und -2 und h ist halbeinfach. Die Lie Unteralgebra $\mathfrak{h} = \langle h \rangle$ ist eine Cartan Unteralgebra.

Beweis. Der erste Teil ist klar. Die Lie Algebra $\mathfrak{h}$ ist abelsch und also nilpotent. Für $ae + bh + cf \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathfrak{h})$ gilt $[h, ae + bh + cf] \in \mathfrak{h}$ *i.e.* $2ae - 2cf \in \mathfrak{h}$ also $a = c = 0$. Daraus folgt $\mathfrak{n}_{\mathfrak{sl}_2}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. ∎

Definition 9.1.5 Wir bezeichnen mit $\mathfrak{n}$ die von e erzeugte Lie Unteralgebra und mit $\mathfrak{b}$ die von (e, h) erzeugte Lie Unteralgebra. Die Lie Algebra $\mathfrak{b}$ heißt die *kanonische Borel Unteralgebra von* $\mathfrak{sl}_2$.

Korollar 9.1.6 Die Unteralgebra $\mathfrak{n}$ its nilpotent und die Unteralgebra $\mathfrak{b}$ is auflösbar.

Beweis. Die Lie Algebra $\mathfrak{n}$ hat dimension 1 und ist also abelsch und nilpotent. Es gilt $\mathcal{D}\mathfrak{b} = \mathfrak{n}$. Daraus folgt, dass $\mathfrak{b}$ auflösbar ist. ∎

9.2. Darstellungen, Gewichte und primiter Vektor

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und sei V eine Darstellung. Wir setzen $V_\lambda = E_\lambda(h_V) = \operatorname{Ker}(h_V - \lambda \mathrm{Id}_V)$.

Definition 9.2.1 Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $V_\lambda \neq 0$ heißt **Gewicht** von V. Sei λ ein Gewicht von V. Ein Vektor in V_λ heißt Vektor zum Gewicht λ.

Proposition 9.2.2 1. Die Summe $\sum_\lambda V^\lambda$ ist eine direkte Summe.

2. Sei $v \in V_\lambda$. Dann gilt $e \cdot v \in V_{\lambda+2}$ und $f \cdot v \in V_{\lambda-2}$.

Beweis. 1. Eigenräume sind in direkte Summe.

2. Sei $v \in V_\lambda$. Dann gilt $h(e(v)) = [h,e](v) + e(h(v)) = 2e(v) + \lambda e(v)$ und $h(f(v)) = [h,f](v) + f(h(v)) = -2f(v) + \lambda f(v)$. ∎

Bemerkung 9.2.3 Für V endlich-dimensional ist H_V halbeinfach, weil ad_h halbeinfach ist. Insbesondere gilt $V = \bigoplus\limits_\lambda V^\lambda$. Dies ist nicht mehr wahr für $\dim V = \infty$.

Definition 9.2.4 Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt **primitiv** zum Gewicht λ falls $v \in V_\lambda$ und $e(v) = 0$.

Lemma 9.2.5 Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ist genau primitiv, wenn $\mathfrak{b} \cdot v \subset \langle v \rangle$. □

Beweis. Sei v primitiv. Dann ist die Aussage klar. Umgekehrt, nehmen wir an, dass $\mathfrak{b} \cdot v \subset \langle v \rangle$. Es gilt $e(v) = av$ und $h(v) = bv$. Wir zeigen, dass $a = 0$ gilt. Es gilt $2av = 2e(v) = [h,e](v) = he(v) - eh(v) = ah(v) - be(v) = abv - abv = 0$. Es folgt $a = 0$. ∎

Proposition 9.2.6 Jede endlich-dimensionale $\mathfrak{sl}_2$-Darstellung besitzt einen primitiven Vektor.

Beweis. Nach dem Satz von Lie 6.3.1 und da $\mathfrak{b}$ auflösbar ist, gibt es einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ so, dass v einen Eigenvektor für alle Element aus $\mathfrak{b}$ ist. Es gilt also $\mathfrak{b}v \subset \langle v \rangle$ und v ist primitiv. ∎

9.3. Die von einem primitiven Vektor erzeugte Teildarstellung

Proposition 9.3.1 Sei V eine $\mathfrak{sl}_2$-Darstellung und sei $v \in V_\lambda$ primitiv. Wir setzen $v_n = \frac{1}{n!} f^n(v)$ und $v_{-1} = 0$. Dann gilt für alle $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} h(v_n) &= (\lambda - 2n)v_n \\ f(v_n) &= (n+1)v_{n+1} \\ e(v_n) &= (\lambda - n + 1)v_{n-1}. \end{aligned}$$

Beweis. Die erste Gleichung folgt per Induktion von Proposition 9.2.2. Die zweite Gleichung folgt von der Definition von v_n. Wir zeigen per Induktion nach n, dass die dritte Gleichung gilt. Für $n = 0$ ist die Aussage klar, weil v primitiv ist. Angenommen die dritte Gleichung gilt für n. Dann gilt

$$\begin{aligned}(n+1)e(v_{n+1}) &= ef(v_n) = fe(v_n) + [e,f](v_n)\\ &= f((\lambda - n + 1)v_{n-1}) + h(v_n)\\ &= (\lambda - n + 1)nv_n + (\lambda - 2n)v_n\\ &= (n+1)(\lambda - n)v_n.\end{aligned}$$

Die Aussage folgt. ∎

Korollar 9.3.2 Mit $(v_n)_{n\geq 0}$ wie in Proposition 9.3.1 gilt

1. entweder ist das System $(v_n)_{n\geq 0}$ linear unabhängig (und also $\dim V = \infty$),

2. oder $\lambda = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist eine nicht negative ganze Zahl, das System $(v_n)_{n\in[0,m]}$ ist linear unabhängig und est gilt $v_n = 0$ für $n > m$.

Beweis. Es gilt $v_n \in V_{\lambda-2n}$ also sind diese Vektoren, wenn nicht null, Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerte. Insbesondere, falls $v_n \neq 0$ für alle $n \geq 0$ gilt, dass $(v_n)_{n\geq 0}$ linear unabhängig ist.

Umgekehrt, angenommen es gäbe ein n mit $v_n = 0$. Sei $m + 1 = \min\{n \mid v_n = 0\}$. Es gilt $v_m \neq 0$ und $v_{m+1} = 0$. Nach Definition von v_n folgt $v_n = \frac{(m+1)!}{n!} f^{n-m-1}(v_{m+1}) = 0$ für $n \geq m + 1$. Es gilt auch $v_n \neq 0$ für $n \in [0, m]$. Insbesondere ist $(v_n)_{n\in[0,m]}$ linear unabhängig. Endlich gilt $0 = e(v_{m+1}) = (\lambda - m)v_m$ und da $v_m \neq 0$, gilt $\lambda = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. ∎

Korollar 9.3.3 Mit $(v_n)_{n\geq 0}$ wie in Proposition 9.3.1 und $\dim V < \infty$ gilt $W = \langle v_n \mid n \in [0, m]\rangle$ ist die von v erzeugte Teildarstellung von V (*i.e.* $W = \langle v\rangle_{\mathfrak{sl}_2}$) und ist einfach als $\mathfrak{sl}_2$-Darstellung.

Beweis. Nach dem obigen Korollar gilt $\lambda = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und für alle $n \in [0, m]$ gilt $e(v_n) = (\lambda - n + 1)v_{n-1} \in W$, $h(v_n) = (\lambda - 2n)v_n \in W$ und $f(v_n) = (n+1)v_{n+1} \in W$. Es folgt $\langle v_n \mid n \in [0, m]\rangle \subset W$. Umgekehrt, nach Proposition 9.3.1 ist $\langle v_n \mid n \in [0, m]\rangle$ eine Teildarstellung und enthält v also $W \subset \langle v_n \mid n \in [0, m]\rangle$.

Wir zeigen, dass W einfach ist. Sei U eine Teildarstellung mit $U \neq 0$ und sei $u \in U \setminus \{0\}$. Wir schreiben $u = \sum_n u_n v_n$, wobei $u_n \in \mathbb{C}$. Sei $k = \min\{i \mid u_i \neq 0\}$. Es gilt $f^{m-k}(u) = \frac{m!}{k!} u_k v_m$ also $v_m \in U$. Dann gilt $U \ni e^{m-n}(v_m) = \prod_{i=n}^{m}(m - i + 1)v_n$ also $v_n \in U$ und $U = W$. for all n. ∎

9.4. Endlich-dimensionale $\mathfrak{sl}_2$-Darstellungen

Wir zeigen zuerst, dass es für alle $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine einfache Darstellung der Dimension $m + 1$ gibt.

Proposition 9.4.1 Sei W_m ein Vektorram der Dimension $m+1$ und sei $(v_n)_{n\in[0,m]}$ eine Basis von W_m. Wir definieren $E, F, H \in \mathrm{End}(W_m)$ durch

$$\begin{aligned} H(v_n) &= (m-2n)v_n \\ F(v_n) &= (n+1)v_{n+1} \\ E(v_n) &= (m-n+1)v_{n-1}. \end{aligned}$$

f"urr alle $n \in [0,m]$ wobei $v_{-1} = v_{m+1} = 0$. Dann ist die Abbildung $\mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(W_m)$ definiert durch $e \mapsto E$, $h \mapsto H$ und $f \mapsto F$ eine $\mathfrak{sl}_2$-Darstellung.

Beweis. Wir sollen hier überprüffen, dass die Abbildung $\mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(W_m)$ ein Lie-Algebra-Homomorphismus ist. Es genügt zu zeigen, dass $[E,F] = H$, $[H,E] = 2E$ und $[H,F] = -2F$ gelten. Dies ist eine einfache Übung. ■

Theorem 9.4.2 1. Die Darstellungen W_m sind einfach für alle $m \geq 0$.

2. Sei V eine einfache $\mathfrak{sl}_2$-Darstellung. Dann gibt es nicht negative ganze Zahlen $m_1, \cdots, m_r$ so, dass

$$V = W_{m_1} \oplus \cdots \oplus W_{m_r}.$$

Beweis. 1. Der Vektor $v_o \in W_m$ ist primitiv zum Gewicht m. Daraus folgt, dass $(v_n)_{n\in[0,m]}$ eine einfache Teildarstellung von W_m. Da die beide von Dimension $m+1$ folgt, dass die beide übereinstimmen und W_m ist einfach.

2. Sei V eine $\mathfrak{sl}_2$-Darstellung. Nach dem Satz von Weyl 7.4.1 gibt es einfache Darstellungen $V_1, \cdots, V_r$ so, dass $V = V_1 \oplus \cdots V_r$. Sei $v \in V_i$ primitiv zum Gewicht λ_i. Dann gilt nach Korollar 9.3.2, dass $\lambda = m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Nach Korollar 9.3.2 ist W_{m_i} eine Teildarstellung von V_i. Da V_i einfach ist folgt $V_i = W_{m_i}$. ■

10. Wurzelsysteme

10.1. Definition

Definition 10.1.1 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine **Spiegelung** bzg. eines Vektors α ist ein Automorphismus s_α von V so, dass

1. $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$
2. die Teilmenge $H_\alpha = \{\beta \in V \mid s_\alpha(\beta) = \beta\}$ ist eine Hyperebene von V.

Definition 10.1.2 Sei $V^\vee$ der Dualraum eines Vektorraums V. Sei $\varphi \in V^\vee$ und $v \in V$. Wir schreiben $\langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$.

Lemma 10.1.3 Sei s_α eine Spiegelung bzg. $\alpha \in V$.

1. Dann ist $H_\alpha = \{\beta \in V \mid s_\alpha(\beta) = \beta\}$ ein Komplement von $\langle \alpha \rangle_\mathbb{R}$.

2. Es gilt $s_\alpha^2 = \mathrm{Id}_V$.

3. Es gibt ein eindeutig bestimmtes Element $\alpha^\vee \in V^\vee$ so, dass $\langle \alpha^\vee, H_\alpha \rangle = 0$ und $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$. Es gilt

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \alpha$$

für alle $\beta \in V$.

4. Umgekehrt, seien $\alpha \in V$ und $\alpha^\vee \in V^\vee$ mit $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$. Dann ist die Abbildung $s \in \mathrm{End}(V)$ definiert durch $s(\beta) = \beta - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \alpha$ für alle $\beta \in V$ eine Spiegelung bzg. α. □

Beweis. 1. H_α hat Kodimension 1 und $\alpha \notin H_\alpha$ also $H_\alpha \oplus \langle \alpha \rangle$. Die Dimension der Summe ist $\dim V$.

2. Sei $\beta \in V$. Dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in H_\alpha$ mit $\beta = \lambda\alpha + \gamma$. Es folgt $s_\alpha^2(\beta) = s_\alpha^2(\lambda\alpha) + s_\alpha^2(\gamma) = \lambda s_\alpha(-\alpha) + s_\alpha(\gamma) = \lambda\alpha + \gamma = \beta$.

3. Sei $\mathcal{B}' = (\beta_1, \cdots, \beta_{n-1})$ eine Basis von H_α. Dann ist $\mathcal{B} = \{\alpha\} \cup \mathcal{B}'$ eine Basis von V. Es gibt also ein eindeutig bestimmtes Element $\alpha^\vee \in V^\vee$ mit $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$ und $\langle \alpha^\vee, \beta_i \rangle = 0$ für alle $i \in [1, n-1]$.

Sei $\beta \in V$. Dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in H_\alpha$ mit $\beta = \lambda\alpha + \gamma$. Es folgt $s_\alpha(\beta) = -\lambda\alpha + \gamma = \beta - 2\lambda\alpha = \beta - (\langle \alpha^\vee, \lambda\alpha \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle)\alpha = \beta - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \alpha$.

4. Es gilt $s(\alpha) = \alpha - 2\alpha = -\alpha$. Sei $H = \{\beta \in V \mid \langle \alpha^\vee, \beta\rangle = 0\}$. Dann ist H eine Hyperebene (Rangsatz für $\alpha^\vee$) und es gilt $H = \{\beta \in V \mid s(\beta) = \beta\}$. ■

Definition 10.1.4 Eine Teilmenge R eines $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißt **Wurzelsystem** falls gilt

(WS 1) Die Menge R hat endlich viele Elemente, $0 \notin R$ und $\langle R\rangle = V$.

(WS 2) Für jedes $\alpha \in R$ gibt es eine Spiegelung s_α bzg. α mit $s_\alpha(R) = R$.

(WS 3) Seien $\alpha, \beta \in R$ und sei $\alpha^\vee \in V^\vee$ definiert durch s_α. Es gilt $\langle \alpha^\vee, \beta\rangle \in \mathbb{Z}$.

(WS R) Ein Wurzelsystem R heißt **reduziert** falls $R \cap \langle\alpha\rangle = \{-\alpha, \alpha\}$ gilt für alle $\alpha \in R$.

Die Elemente eines Wurzelsystem heißen **Wurzeln**. Die Dimension $\dim V$ ist der **Rang** des Wurzelsystems.

Wir Zeigen, dass die Spiegelung s_α in (WS 2) eindeutig bestimmt ist.

Lemma 10.1.5 Sei $\alpha \in V$ und sei R eine endliche Teilmenge mit $\langle R\rangle = V$. Dann gibt es höchstens eine Spiegelung s_α bzg. α mit $s_\alpha(R) = R$. □

Beweis. Seien s und s' zwei solche Spiegelungen und sei $u = s \circ s'$. Es gilt $u(\alpha) = \alpha$ und u induziert die Identität auf $V/\langle\alpha\rangle_\mathbb{R}$. Es folgt, dass die Eigenwerte von u alle gleich 1 sind.

Die Abbildung u induziert eine Permutation von R. Da R endlich ist gibt es ein n so, dass $(u|_R)^n = \mathrm{Id}_R$. Da R ein EZS ist, folgt $u^n = \mathrm{Id}_V$. Es folgt, dass u diagonalisierbar ist und $u = \mathrm{Id}_V$. ■

Beispiel 10.1.6 1. Sei V der Dimension 1. Die einzige Wurzelsysteme in V sind der Form $R = \{-\alpha, \alpha\}$ für R reduziert und $R = \{-2\alpha, -\alpha, \alpha, 2\alpha\}$ für R nicht reduziert, wobei α ein Vektor in V ist.

2. Die folgende Teilmengen R von $V = \mathbb{R}^2$ sind Wurzelsysteme

Typ $A_1 \times A_1$. $R = \{-\beta, -\alpha, \alpha, \beta\}$ mit $\alpha = (1, 0)$ und $\beta = (0, 1)$.

Typ A_2. $R = \{-\alpha - \beta, -\beta, -\alpha, \alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ mit $\alpha = (1, 0)$ und $\beta = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Typ $B_2 = C_2$. $R = \{-2\alpha - \beta, -\alpha - \beta, -\beta, -\alpha, \alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta\}$ mit $\alpha = (1, 0)$ und $\beta = (-1, 1)$.

Typ G_2. $R = \{-3\alpha - 2\beta, -3\alpha - \beta, -2\alpha - \beta, -\alpha - \beta, -\beta, -\alpha, \alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta\}$ mit $\alpha = (1, 0)$ und $\beta = (-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

10.2. Weylgruppe

Definition 10.2.1 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei R ein Wurzelsystem in V. Die Weylgruppe $W(R)$ des Wurzelsystems R ist die von s_α, für $\alpha \in R$, erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$.

Lemma 10.2.2 Die Weylgruppe ist eine endliche Gruppe. □

Beweis. Sei $w \in W(R)$. Es gilt $w(R) = R$ also definiert w ein Element $\bar{w} \in \mathrm{Bij}(R)$. Da R ein EZS ist, ist die Abbildung $W(R) \to \mathrm{Bij}(R)$ injektiv. Da R endlich ist folgt, dass $W(R)$ endlich ist. ■

Beispiel 10.2.3 Sei R von Rang 2 wie im Beispiel 10.1.6. Dann ist $W(R)$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $n = 2$ für Typ $A_1 \times A_1$, $n = 3$ für Typ A_2, $n = 4$ für Typ $B_2 = C_2$ und $n = 6$ für Typ G_2.

10.3. Invariante Bilinearform

Definition 10.3.1 Sei $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf V und sei G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$. Die Bilinearmform B heißt G**-invariant** falls $G \subset O(B)$ *i.e.* $B(g(\alpha), g(\beta)) = B(\alpha, \beta)$ für alle $\alpha, \beta \in V$ und alle $g \in G$.

Proposition 10.3.2 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und R ein Wurzelsystem in V. Dann gibt es eine symmetrische, positiv-definit $W(R)$-invariante Bilinearform $(\ ,\ )$ auf V.

Beweis. Sei B eine symmetrische positiv-definit Bilinearform auf V. Wir setzen

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{|W(R)|} \sum_{w \in W(R)} B(w(\alpha), w(\beta)).$$

Diese Form ist $W(R)$-invariant, symmetrisch und positiv-definit. ■

Lemma 10.3.3 Sei $(\ ,\ )$ eine symmetrische positiv-definit $W(R)$-invariante Bilinearform.

1. Sei $O(V)$ die Orthogonalgruppe für $(\ ,\ )$. Es gilt $W(R) \subset O(V)$.

2. Die Abbildung $\Phi : V \to V^\vee$ definiert durch $\Phi(\alpha)(v) = (\alpha, v)$ ist ein Isomorphismus.

3. Sei $\Psi = \Phi^{-1}$ und sei $\alpha \in R$. Es gilt $\Psi(\alpha^\vee) = \frac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ oder $\Phi(\alpha) = \frac{(\alpha,\alpha)}{2}\alpha^\vee$ *i.e.* für alle $v \in V$ gilt
$$\langle \alpha^\vee, v \rangle = 2\frac{(\alpha, v)}{(\alpha, \alpha)}.$$

4. Seien $\alpha \in R$ und $v \in V$. Es gilt
$$s_\alpha(v) = v - 2\frac{(\alpha, v)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

Beweis. 1. Klar, da (,) invariant ist.

2. Die Abbildung ist injektiv, weil (,) nicht ausgeartet ist und bijektiv, weil $\dim V = \dim V^\vee$.

3. Sei $v \in V$. Es gilt $(s_\alpha(v), \alpha) = -(s_\alpha(v), s_\alpha(\alpha)) = (v, \alpha)$. Daraus folgt $(v - \langle \alpha^\vee, v\rangle \alpha, \alpha) = -(v, \alpha)$ und $2(v, \alpha) = \langle \alpha^\vee, v\rangle(\alpha, \alpha)$.

4. Folgt aus 3. ∎

Beispiel 10.3.4 Sei R von Rang 2 wie im Beispiel 10.1.6. Dann ist das standard Skalarprodukt (,) ein $W(R)$-invariantes Skalarprodukt.

10.4. Dual Wurzelsystem

Definition 10.4.1 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei R ein Wurzelsystem in V. Wir setzen

$$R^\vee = \{\alpha^\vee \in V^\vee \mid \alpha \in R\}.$$

Satz 10.4.2 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei R ein Wurzelsystem in V.

1. Dann ist $R^\vee$ ein Wurzelsystem in $V^\vee$.

2. $R^\vee$ ist genau dann reduziert, ween R reduziert ist.

3. Es gilt $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$ und $(R^\vee)^\vee = R$. □

Beweis. 1. Wir überprüfen (WS 1), (WS 2) und (WS 3) für $R^\vee$.

(WS 1). Da R endlich ist, ist $R^\vee$ endlich. Sei $\alpha \in R^\vee$ mit $\alpha \in R$. Dann gilt $\langle \alpha^\vee, \alpha\rangle = 2$ und $\alpha^\vee \neq 0$ also $0 \notin R^\vee$. Da R ein EZS von V ist und da Φ ein Isomorphismus ist, ist $(\Phi(R))$ ein EZS also $R^\vee$ ist ein EZS.

(WS 2). Sei $s_{\alpha^\vee} \in \mathrm{End}(V^\vee)$ definiert durch $s_{\alpha^\vee}(\varphi) = \varphi - \langle \varphi, \alpha\rangle \alpha^\vee$. Dies ist eine Spiegelung bzg. $\alpha^\vee$.

Wir zeigen $s_{\alpha^\vee} = s_\alpha^\vee$. Es gilt $s_\alpha^\vee(\varphi)(v) = \varphi \circ s_\alpha(v) = \varphi(v - \langle \alpha^\vee, v\rangle \alpha) = \langle \varphi, v\rangle - \langle \alpha^\vee, v\rangle\langle \varphi, \alpha\rangle = s_{\alpha^\vee}(\varphi)(v)$.

Für $\alpha, \beta \in R$ gilt also

$$\langle s_{\alpha^\vee}(\beta^\vee), v\rangle = \langle \beta^\vee, s_\alpha(v)\rangle = 2\frac{(\beta, s_\alpha(v))}{(\beta, \beta)} = 2\frac{(s_\alpha(\beta), v)}{(s_\alpha(\beta), s_\alpha(\beta))} = \langle s_\alpha(\beta)^\vee, v\rangle.$$

Daraus folgt $s_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = s_\alpha(\beta)^\vee \in R^\vee$.

Wir zeigen, jetzt 3. Die Abbildung $\theta : V \to (V^\vee)^\vee$ definiert durch $\theta(\alpha)(\varphi) = \varphi(\alpha) = \langle \varphi, \alpha\rangle$ für $\alpha \in V$ und $\varphi \in V^\vee$ ist ein Isomorphismus (siehe LA I). Wir zeigen, dass $\theta(\alpha) = (\alpha^\vee)^\vee$. Das Element $(\alpha^\vee)^\vee$ ist eindeutig durch $s_{\alpha^\vee}(\varphi) = \varphi - (\alpha^\vee)^\vee(\varphi)\alpha^\vee$ definiert. Aber es gilt $s_{\alpha^\vee}(\varphi) = \varphi - \langle\varphi, \alpha\rangle\alpha^\vee = \varphi - \theta(\alpha)(\varphi)\alpha^\vee$. Es folgt $\theta(\alpha) = (\alpha^\vee)^\vee$.

(WS 3) Seien $\alpha, \beta \in R$. Es gilt $\langle(\alpha^\vee)^\vee, \beta^\vee\rangle = \theta(\alpha)(\beta^\vee) = \beta^\vee(\alpha) = \langle\beta^\vee, \alpha\rangle \in \mathbb{Z}$.

(WS R) Sei $\alpha \in R$ so, dass $\lambda\alpha \in R$. Dann gilt

$$(\lambda\alpha)^\vee = \frac{2}{(\lambda\alpha, \lambda\alpha)}\Phi(\lambda\alpha) = \frac{2}{\lambda(\alpha, \alpha)}\Phi(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\alpha^\vee.$$

Sei R nicht reduziert, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ mit $\lambda\alpha \in R$. Daraus folgt, dass $(\lambda\alpha)^\vee = \frac{1}{\lambda}\alpha^\vee \in R^\vee$. Da $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, ist $R^\vee$ auch nicht reduziert. Umgekehrt, sei $R^\vee$ nicht reduziert. Dann folgt von was wir gerade gezeigt haben, dass $R = (R^\vee)^\vee$ nicht reduziert ist. ∎

Definition 10.4.3 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei R ein Wurzelsystem in V. Das Wurzelsystem $R^\vee$ heißt **dual Wurzelsystem**.

Proposition 10.4.4 Die Abbildung $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V^\vee)$ definiert durch $u \mapsto (u^\vee)^{-1}$ ist ein Gruppen-Isomorphismus und induziert einen Gruppen-Isomorphismus $W(R) \simeq W(R^\vee)$.

Beweis. Mit der Identifizierung $V \simeq (V^\vee)^\vee$ gilt $(u^\vee)^\vee = u$ also die Abbildung $u \mapsto (u^\vee)^{-1}$ ist ein Isomorphismus. Es gilt $(s_\alpha^\vee)^{-1} = s_{\alpha^\vee}^{-1} = s_{\alpha^\vee}$ also bildet diese Abbildung $W(R)$ auf $W(R^\vee)$. ∎

10.5. Winkel zwischen Wurzeln

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und R ein Wurzelsystem in V. Sei $(\ ,\ )$ ein $W(R)$-invariante scalar Produkt.

Für $\alpha \in V$ schreiben wir $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$. Für $\alpha, \beta \in R$ schreiben φ für den Winkel zwischen den Geraden $\langle\alpha\rangle$ und $\langle\beta\rangle$.

Proposition 10.5.1 Seien $\alpha, \beta \in R$ mit $\dim\langle\alpha, \beta\rangle = 2$. Dann gilt eine der folgenden 7 Möglichkeiten (modulo Vertauschen von α und β):

1. $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle = 0$, $\langle\beta^\vee, \alpha\rangle = 0$ und $\varphi = \pi/2$;
2. $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle = 1$, $\langle\beta^\vee, \alpha\rangle = 1$, $\varphi = \pi/3$ und $|\alpha| = |\beta|$;
3. $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle = -1$, $\langle\beta^\vee, \alpha\rangle = -1$, $\varphi = 2\pi/3$ und $|\alpha| = |\beta|$;
4. $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle = 2$, $\langle\beta^\vee, \alpha\rangle = 1$, $\varphi = \pi/4$ und $\sqrt{2}|\alpha| = |\beta|$;
5. $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle = -2$, $\langle\beta^\vee, \alpha\rangle = -1$, $\varphi = 3\pi/3$ und $\sqrt{2}|\alpha| = |\beta|$;
6. $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle = 3$, $\langle\beta^\vee, \alpha\rangle = 1$, $\varphi = \pi/6$ und $\sqrt{3}|\alpha| = |\beta|$;

7. $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = -3$, $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle = -1$, $\varphi = 5\pi/6$ und $\sqrt{3}|\alpha| = |\beta|$.

Beweis. Es gilt $(\alpha, \beta) = |\alpha||\beta| \cos \varphi$. Insbesondere gilt

$$2\frac{|\beta|}{|\alpha|}\cos\varphi = \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Daraus folgt $4\cos^2\varphi = \langle \alpha^\vee, \beta \rangle\langle \beta^\vee, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ und $4\cos^2\varphi \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Modulo Vertauschen gilt $|\alpha| \leq |\beta|$. Daraus folgt $|\langle \alpha^\vee, \beta \rangle| \geq |\langle \beta^\vee, \alpha \rangle|$. Die Werte von $(|\langle \alpha^\vee, \beta \rangle|, |\langle \beta^\vee, \alpha \rangle|)$ sind also $(0, 0)$ falls $4\cos^2\varphi = 0$, $(1, 1)$ falls $4\cos^2\varphi = 1$, $(2, 1)$ falls $4\cos^2\varphi = 2$, $(3, 1)$ falls $4\cos^2\varphi = 3$ und $(4, 1)$ falls $4\cos^2\varphi = 4$.

Falls $\cos^2\varphi = 1$, gilt $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ und $\langle \alpha, \beta \rangle_\mathbb{R} = \langle \alpha \rangle_\mathbb{R}$. Ein Widerspruch. Andernfalls gilt $\cos\varphi = 0; \pm 1/2; \pm\sqrt{2}/2; \pm\sqrt{3}/2$ und $\varphi = \pi/2$; $\pi/3$ oder $2\pi/3$; $\pi/4$ oder $3\pi/4$; $\pi/6$ oder $5\pi/6$. Daraus folgt die Aussage. ∎

Korollar 10.5.2 Seien $\alpha, \beta \in R$ mit $\dim\langle \alpha, \beta \rangle = 2$ und $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle > 0$. Dann gilt $\alpha - \beta \in R$.

Beweis. Nach der obigen Aussage gilt $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = 1$ oder $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle = 1$. Im ersten Fall gilt $R \ni s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle\alpha = \beta - \alpha$. Daraus folgt $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha) \in R$. Andernfalls gilt $\alpha - \beta = \alpha - \langle \beta^\vee, \alpha \rangle\beta = s_\beta(\alpha) \in R$. ∎

10.6. Einfache Wurzeln und Basen

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei R ein Wurzelsystem in V.

Definition 10.6.1 Eine Teilmenge S von R heißt **System von einfachen Wurzeln** oder **Basis** falls gilt

- S ist eine Basis von V und
- jede $\beta \in R$ hat eine eindeutig bestimmte Darsellung $\beta = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \alpha$ so, dass
  - $a_\alpha \geq 0$ für alle $\alpha \in S$ oder
  - $a_\alpha \leq 0$ für alle $\alpha \in S$.

Beispiel 10.6.2 Sei R von Rang 2 wie im Beispiel 10.1.6. Dann ist $S = \{\alpha, \beta\}$ eine Basis von R.

Satz 10.6.3 Jedes Wurzelsystem hat eine Basis. □

Beweis. Sei $\varphi \in V^\vee$ mit $\langle \varphi, \alpha \rangle \neq 0$ für alle $\alpha \in R$ (da R endlich ist gibt es immer ein solches $\varphi \in V^\vee$). Sei

$$R_\varphi^+ = \{\alpha \in R \mid \langle \varphi, \alpha \rangle > 0\}.$$

Es gilt $R = R_\varphi^+ \cup (-R_\varphi)$.

Definition 10.6.4 Eine Wurzel $\alpha \in R_\varphi^+$ heißt **reduzibel** falls es Wurzeln $\beta, \gamma \in R_\varphi^+$ gibt mit $\alpha = \beta + \gamma$. Falls $\alpha \in R_\varphi^+$ nicht reduzibel ist heißt α **irreduzibel** oder **einfach**. Sei S_φ die Teilmenge aller einfachen Wurzeln in R_φ^+.

Wir zeigen, dass S_φ eine Basis von R ist.

Lemma 10.6.5 Sei $\beta \in R_\varphi^+$. Dann gibt es Skalare $a_\alpha \geq 0$ für jede $\alpha \in S_\varphi$ so, dass $\beta = \sum_{\alpha \in S_\varphi} a_\alpha \alpha$. □

Beweis. Sei R' die Teilmenge von R_φ^+ so, dass diese Eigenschaft nicht erfüllt ist. Falls R' nicht ler ist, gibt es ein $\beta \in R'$ so, dass $\langle \varphi, \beta \rangle$ minimal ist. Da $\beta \in R'$ gilt $\beta \notin S_\varphi$. Es gibt also $\gamma, \gamma' \in R_\varphi^+$ mit $\beta = \gamma + \gamma'$. Es gilt $\langle \varphi, \gamma \rangle = \langle \varphi, \beta \rangle - \langle \varphi, \gamma' \rangle < \langle \varphi, \beta \rangle$ weil $\gamma' \in R_\varphi^+$. Analog gilt $\langle \varphi, \gamma \rangle < \langle \varphi, \beta \rangle$. Per Definition von β gilt $\gamma, \gamma' \notin R'$. Daraus folgt $\beta = \gamma + \gamma' \notin R'$. Ein Widerspruch. ■

Lemma 10.6.6 Seien $\alpha, \beta \in S_\varphi$ mit $\alpha \neq \beta$. Es gilt $(\alpha, \beta) \leq 0$. □

Beweis. Falls $(\alpha, \beta) > 0$ gilt $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle > 0$ und $\alpha - \beta \in R$. Analog gilt $\beta - \alpha \in R$. Insbesondere gilt entweder $\gamma = \alpha - \beta \in R_\varphi^+$ oder $-\gamma = \beta - \alpha \in R_\varphi^+$. Falls $\gamma \in R_\varphi^+$ gilt $\alpha = \beta + \gamma$ und $\alpha \notin S_\varphi$ ein Widerspruch. Falls $-\gamma \in R_\varphi^+$ gilt $\beta = \alpha + (-\gamma)$ und $\beta \notin S_\varphi$. Ein Widerspruch. ■

Lemma 10.6.7 Sei A eine Teilmenge von V mit

1. $\langle \varphi, \alpha \rangle > 0$ für alle $\alpha \in A$ und
2. $(\alpha, \beta) \leq 0$ für alle $\alpha, \beta \in A$ mir $\alpha \neq \beta$.

Dann ist A ein linear unabhängiges System. □

Beweis. Seien Skalare $(a_\alpha))\alpha \in A$ so, dass $\sum_{\alpha \in A} a_\alpha \alpha = 0$. Wir zeigen, dass $a_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in A$. Sei $B = \{\alpha \in A \mid a_\alpha \geq 0\}$ und $C = \{\alpha \in A \mid a_\alpha \leq 0\}$. Wir schreiben $b_\alpha = a_\alpha$ für $\alpha \in B$ und $c_\alpha = -a_\alpha$ für $\alpha \in C$. Es gilt $b_\alpha \geq 0$ für alle $\alpha \in B$ und $c_\alpha \geq 0$ für alle $\alpha \in C$. Es gilt also

$$\sum_{\alpha \in B} b_\alpha \alpha = \sum_{\alpha \in C} c_\alpha \alpha.$$

Es folgt

$$0 \leq (\sum_{\alpha \in B} b_\alpha \alpha, \sum_{\alpha \in B} b_\alpha \alpha) = (\sum_{\alpha \in B} b_\alpha \alpha, \sum_{\alpha \in C} c_\alpha \alpha) = \sum_{\alpha \in B} \sum_{\beta \in C} b_\alpha c_\beta (\alpha, \beta) \leq 0.$$

Daraus folgt $\sum_{\alpha \in B} b_\alpha \alpha = 0$ und

$$0 = \langle \varphi, \sum_{\alpha \in B} b_\alpha \alpha \rangle = \sum_{\alpha \in B} b_\alpha \langle \varphi, \alpha \rangle.$$

Da $\langle \varphi, \alpha \rangle > 0$ für alle $\alpha \in A$ und also alle $\alpha \in B$, gilt $b_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in B$. Analog gilt $c_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in C$. ■

Die drei obige Lemma zeigen, dass S_φ eine Basis von R ist.

Lemma 10.6.8 Sei R reduziert. Alle Basen von R sind der Form S_φ für ein $\varphi \in V^\vee$.□

Beweis. Sei S eine Basis von R. Da S eine Basis von V ist, gibt es ein φ mit $\langle \varphi, \alpha \rangle > 0$ für alle $\alpha \in S$ (z.B. man setze $\langle \varphi, \alpha \rangle = 1$ für alle $\alpha \in S$). Sei R^+ die Teilmenge von Wurzeln $\beta \in R$ so, dass $\beta = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \alpha$ mit $a_\alpha \geq 0$ für alle $\alpha \in S$. Es gilt $R^+ \subset R^+_\varphi$ und $(-R^+_\varphi) \subset (-R^+)$. Daraus folgt $R^+ = R^+_\varphi$.

Sei $\alpha \in S$. Wir zeigen $\alpha \in S_\varphi$. Angenommen es gäbe $\gamma, \gamma' \in R^+_\varphi$ mit $\alpha = \gamma + \gamma'$. Da $\gamma, \gamma' \in R^+$ gibt es Skalare $c_\beta, c'_\beta \geq 0$ für alle $\beta \in S$ mit $\gamma = \sum_{\beta \in S} c_\beta \beta$ und $\gamma' = \sum_{\beta \in S} c'_\beta \beta$. Es folgt

$$\alpha = \sum_{\beta \in S} (c_\beta + c'_\beta) \beta.$$

Da $\alpha \in S$ und da S eine Basis ist gilt $c_\beta + c'_\beta = \delta_{\beta,\alpha}$. Es folgt $\gamma = \alpha$ und $\gamma' = 0$ oder $\gamma' = \alpha$ und $\gamma = 0$. Ein Widerspruch, weil $0 \notin R$. Daraus folgt $S \subset S_\varphi$. Da S und S_φ Basen von V sind gilt $|S| = \dim V = |S_\varphi|$. Daraus folgt $S = S_\varphi$. ■

10.7. Positive Wurzeln

Sei S eine Basis eines reduziertes Wurzelsystems R in V.

Definition 10.7.1 Die Wurzeln $\alpha \in R$ so, dass α als lineare Kombination von Elemente in S mit nicht negativen Koeffizienten geschrieben werden können heißen **positive Wurzeln**. Die Menge aller positiven Wurzeln wird R^+ bezeichnet. Die Wurzeln in $R \setminus R^+ = (-R^+)$ heißen **negative Wurzeln**. Die Menge aller negativen Wurzeln wird R^- bezeichnet.

Lemma 10.7.2 Sei $\alpha \in R$. Wir schreiben

$$\alpha = \sum_{\beta \in S} a_\beta \beta.$$

Es gilt $\alpha_\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für alle $\beta \in S$ für $\alpha \in R^+$ und $\alpha_\beta \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ für alle $\beta \in S$ für $\alpha \in R^-$.□

Beweis. Sei $\varphi \in V^\vee$ so, dass $\langle \varphi, \beta \rangle = 1$ für alle $\beta \in R$. Es gilt $R^+ = R^+_\varphi$ und $S = S_\varphi$ (siehe Lemma 10.6.8). Sei $\alpha \in R^+$. Angenommen die Aussage wäre falsch. Dann gibt es α so, dass $\alpha = \sum_{\beta \in S} a_\beta \beta$ und $a_\beta \geq 0$ für alle $\beta \in S$ aber es gibt mindestens ein $\beta \in S$ mit $a_\beta \notin \mathbb{Z}$. Sei F die Teilmenge von R^+ aller Wurzeln so, dass die Aussage falsch ist. Sei $\alpha \in F$ so, dass $\langle \varphi, \alpha \rangle$ minimal ist.

Wir betrachten zwei Fälle. Fall 1: $\alpha \in S$. Dann gilt für den Ausdruckt $\alpha = \sum_{\beta \in S} a_\beta \beta$ die Gleichungen $a_\alpha = 1$ und $a_\beta = 0$ für $\beta \neq \alpha$. Also für alle $\beta \in S$ gilt $a_\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $\alpha \notin F$. Ein Widerspruch.

Fall 2: $\alpha \notin S$. Die Wurzel α ist also reduzibel der Form $\alpha = \gamma + \gamma'$. Es gilt also $\langle \varphi, \gamma \rangle = \langle \varphi, \alpha \rangle - \langle \varphi, \gamma' \rangle < \langle \varphi, \alpha \rangle$. Analog gilt $\langle \varphi, \gamma' \rangle < \langle \varphi, \alpha \rangle$. Insbesondere gilt $\gamma, \gamma' \notin F$. Wir schreiben $\gamma = \sum_{\beta \in S} c_\beta \beta$ und $\gamma = \sum_{\beta \in S} c_\beta \beta$ und es gilt $c_\beta, c'_\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für alle $\beta \in S$. Daraus folgt $\alpha = \sum_{\beta \in S} (c_\beta + c'_\beta)\beta$ also $a_\beta = c_\beta + c'_\beta \in Z_{\geq 0}$ und $\alpha \notin F$. Ein Widerspruch. ■

Proposition 10.7.3 Sei $\alpha \in R^+$. Dann gibt es eine Folge $(\alpha_i)_{i \in [1,r]}$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i$, $\alpha_i \in S$ und $\sum_{k=1}^i \alpha_k \in R$ für alle $i \in [1, r]$.

Beweis. Sei $\varphi \in V^\vee$ definiert durch $\langle \varphi, \beta \rangle = 1$ für alle $\beta \in R$. Wir zeigen die Aussage per Induktion nach $\langle \varphi, \alpha \rangle$. Für $\langle \varphi, \alpha \rangle = 1$ gilt $\alpha \in S$ und die Folge $\alpha_1 = \alpha$ und $r = 1$ reicht.

Angenommen, dass die Aussage wahr für alle $\alpha' \in R^+$ mit $\langle \varphi, \alpha' \rangle < \langle \varphi, \alpha \rangle$ ist. Wir können annehmen, dass $\alpha \notin S$ also $\langle \varphi, \alpha \rangle > 1$.

Lemma 10.7.4 Sei $\alpha \in R^+ \setminus S$. Dann gibt es $\beta \in S$ mit $(\alpha, \beta) > 0$. □

Beweis. Wenn nicht würde, nach Lemma 10.6.7, das System $S \cup \{\alpha\}$ linear unabhängig sein. Ein Widerspruch, weil S eine Basis ist. ■

Sei also $\alpha_r \in S$ mit $(\alpha, \alpha_r) > 0$. Dann ist $\alpha' = \alpha - \alpha_r \in R$ und $\langle \varphi, \alpha' \rangle = \langle \varphi, \alpha \rangle - \langle \varphi, \alpha_r \rangle = \langle \varphi, \alpha \rangle - 1 > 0$. Insbesondere gilt $\alpha' \in R^+$ und $\langle \varphi, \alpha' \rangle < \langle \varphi, \alpha \rangle$. Nach Induktion, gibt es eine Folge $(\alpha_i)_{i \in [1,r-1]}$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i$, $\alpha_i \in S$ und $\sum_{k=1}^i \alpha_k \in R$ für alle $i \in [1, r-1]$. Die Folge $(\alpha_i)_{i \in [1,r]}$ ist eine Lösung des Problems. ■

Proposition 10.7.5 Sei $\sigma \in S$. Dann gilt $s_\alpha(R^+ \setminus \{\alpha\}) = R^+ \setminus \{\alpha\}$.

Beweis. Sei $\beta \in R \setminus \{\alpha\}$. Dann gibt es Skalare $a_\gamma \geq 0$ für $\gamma \in S$ mit $\beta = \sum_{\gamma \in S} a_\gamma \gamma$. Da $\beta \neq \alpha$, gibt es $\gamma_0 \in S \setminus \{\alpha\}$ mit $a_{\gamma_0} > 0$. Es gilt

$$s_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma \in R} a_\gamma s_\alpha(\gamma) = \sum_{\gamma \in R} a_\gamma \gamma - \left(\sum_{\gamma \in R} a_\gamma \langle \alpha^\vee, \gamma \rangle \right) \alpha.$$

Insbesondere ist das Koeffizient von γ_0 in $s - \alpha(\beta)$ immer noch $a_{\gamma_0} > 0$. Es folgt $s - \alpha(\beta) \in R^+ \setminus \{\alpha\}$. ■

Definition 10.7.6 Wir setzen $\varrho = \dfrac{1}{2}\sum_{\beta\in R^+}\beta$.

Korollar 10.7.7 Sei R reduziert. Es gilt $s_\alpha(\varrho) = \varrho - \alpha$ für alle $\alpha \in S$.

Beweis. Sei $\varrho_\alpha = \varrho - \alpha/2$. Es gilt

$$\varrho_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{\beta\in R^+\setminus\{\alpha\}}\beta$$

und $\varrho = \varrho_\alpha + \alpha/2$. Nach dem obigen Proposition, gilt $s_\alpha(\varrho_\alpha) = \varrho_\alpha$. Daraus folgt $s_\alpha(\varrho) = s_\alpha(\varrho_\alpha) + s_\alpha(\alpha/2) = \varrho_\alpha - \alpha/2 = \varrho - \alpha$. ∎

Proposition 10.7.8 Sei R reduziert. Dann ist $S^\vee = \{\alpha^\vee \in R^\vee \mid \alpha \in S\}$ eine Basis des dualen Wurzelsystems $R^\vee$.

Beweis. Sei $(\ ,\ )$ ein $W(R)$-invariant Skalarprodukt. Die Abbildung $\Phi : V \to V^\vee$ definiert durch $u \mapsto (v \mapsto (u,v))$ ist ein Isomorphismus (siehe Lemma 10.3.3.2.). Es gilt

$$\alpha^\vee = \frac{2}{(\alpha,\alpha)}\Phi(\alpha) \text{ (Siehe Lemma 10.3.3.3.)}$$

Insbesondere ist $S^\vee$ eine Basis von $V^\vee$. Es gilt

$$S^\vee = (\alpha^\vee)_{\alpha\in S} = \left(\frac{2}{(\alpha,\alpha)}\Phi(\alpha)\right)_{\alpha\in S}.$$

Da S eine Basis von R ist, gibt es für jede Wurzel $\beta \in R$ Skalare $a_\alpha \in \mathbb{Z}$ für jede $\alpha \in S$ mit

$$\beta = \sum_{\alpha\in S} a_\alpha\alpha,$$

wobei $a_\alpha \geq 0$ für alle $\alpha \in S$ für $\beta \in R^+$ ($a_\alpha \leq 0$ für alle $\alpha \in S$ für $\beta \in R^-$). Es gilt

$$\beta^\vee = \frac{2}{(\beta,\beta)}\Phi(\beta) = \frac{2}{(\beta,\beta)}\Phi\left(\sum_{\alpha\in S} a_\alpha\alpha\right) = \frac{2}{(\beta,\beta)}\sum_{\alpha\in S} a_\alpha\Phi(\alpha) = \sum_{\alpha\in S} a_\alpha\frac{(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}\alpha^\vee.$$

Inbesondere sind alle Koeffizienten nicht negativ für $\alpha \in R^+$ (nicht positiv für $\alpha \in R^-$). ∎

Theorem 10.7.9 Sei $W = W(R)$.

1. Für alle $\varphi \in V^\vee$, gibt es ein $w \in W(R^\vee)$ mit $\langle w(\varphi), \alpha\rangle \geq 0$ für alle $\alpha \in S$.

2. Sei S' eine Basis von R. Dann gibt es $w \in W$ mit $w(S') = S$.

3. Für jede $\beta \in R$, gibt es $w \in W$ mit $w(\beta) \in S$.

4. Die Gruppe W ist von den Spiegelungen s_α für $\alpha \in S$ erzeugt. □

Beweis. Sei W_S die von Spiegelungen s_α für $\alpha \in S$ erzeugte Untergruppe von $W = W(R)$. Analog definieren wir $W_{S^\vee} \subset W(R^\vee)$. Wir zeigen 1. für $W_{S^\vee}$ und 2. und 3. für W_S. Danach zeigen wir $W = W_S$.

Wir wollen zuerst etwas bemerken. Jedes Element in $W_{S^\vee}$ ist der Form $s_{\alpha_1^\vee} \cdots s_{\alpha_r^\vee}$, wobei $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in S$. Da $s_{\alpha^\vee} = s_\alpha^\vee$ (siehe Satz 10.4.2), gilt

$$s_{\alpha_1^\vee} \cdots s_{\alpha_r^\vee} = s_{\alpha_1}^\vee \cdots s_{\alpha_r}^\vee = (s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1})^\vee.$$

Von der Gleichung $s_{\alpha^\vee} = s_\alpha^\vee$ folgt auch $\langle s_{\alpha^\vee}(\varphi), v\rangle = \langle \varphi, s_\alpha(v)\rangle$ für alle $\varphi \in V^\vee$ und $v \in V$ (siehe Satz 10.4.2). Es gilt also

$$\langle s_{\alpha_1^\vee} \cdots s_{\alpha_r^\vee}(\varphi), v\rangle = \langle \varphi, s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1}(v)\rangle$$

für alle $\varphi \in V^\vee$ und $v \in V$.

(1. für $W_{S^\vee}$). Per Induktion nach der Anzahl

$$n(\varphi) = |\{\alpha \in R^+ \mid \langle \varphi, \alpha\rangle < 0\}.$$

Falls $\langle \varphi, \beta\rangle \geq 0$ für alle $\beta \in S$ setzen wir $w = \mathrm{Id}$ und damit ist die Aussage bewiesen. Insbesondere Falls Falls $n(t) = 0$, sezten wir $w = \mathrm{Id}$.

Angenommen, dass die Aussage für $n(\varphi) = n$ wahr ist. Sei φ mit $n(\varphi) = n+1$. Falls $\langle \varphi, \beta\rangle \geq 0$ für alle $\beta \in S$ setzen wir $w = \mathrm{Id}$ und damit ist die Aussage bewiesen. Wir können also annehmen, dass es ein $\alpha \in S$ gibt mit $\langle \varphi, \alpha\rangle < 0$. Sei $\varphi' = s_{\alpha^\vee}(\varphi)$. Es gilt $\langle s_{\alpha^\vee}(\varphi), \alpha\rangle = \langle \varphi, s_\alpha(\alpha)\rangle = -\langle \varphi, \alpha\rangle > 0$. Für $\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}$, gilt $\langle s_{\alpha^\vee}(\varphi), \beta\rangle = \langle \varphi, s_\alpha(\beta)\rangle$. Da $s_\alpha(R^+ \setminus \{\alpha\}) = R^+ \setminus \{\alpha\}$, ist die Anzaht von Wurzel $\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}$ mit $\langle \varphi, \beta\rangle < 0$ gleich die Anzaht von Wurzel $\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}$ mit $\langle \varphi', \beta\rangle < 0$. Es folgt $n(\varphi') = n(\varphi) - 1 = n$. Die Aussage folgt per Induktion: es gibt $\alpha_1, \alpha_r \in S$ so, dass $\langle s_{\alpha_1^\vee} \cdots s_{\alpha_r^\vee}(\varphi'), \beta\rangle \geq 0$ für alle $\beta \in S$. Es gilt $s_{\alpha_1^\vee} \cdots s_{\alpha_r^\vee} s_{\alpha^\vee}(\varphi) = s_{\alpha_1^\vee} \cdots s_{\alpha_r^\vee}(\varphi')$. Daraus folgt die Aussage.

(2. für W_S). Sei S' eine Basis von R. Dann gibt es $\varphi \in V^\vee$ mit $\langle \varphi, \alpha\rangle \neq 0$ für alle $\alpha \in R$ so, dass $S' = S_\varphi$. Nach 1. gibt es ein $s_{\alpha_1^\vee} \cdots s_{\alpha_r^\vee} \in W_{S^\vee}$ mit $\langle s_{\alpha_1^\vee} \cdots s_{\alpha_r^\vee}(\varphi), \alpha\rangle \geq 0$ für alle $\alpha \in S$. Es gilt also $S = S_{\langle s_{\alpha_1^\vee} \cdots s_{\alpha_r^\vee}(\varphi)\rangle}$ und $R^+ = R^+_{\langle s_{\alpha_1^\vee} \cdots s_{\alpha_r^\vee}(\varphi)\rangle}$. Wir zeigen, dass $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}(S') = S$. Sei $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$. Es gilt $w^{-1} = s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1}$.

Sei $\alpha \in R^+$. Dann gilt $\langle \varphi, w^{-1}(\alpha)\rangle = \langle \varphi, s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1}(\alpha)\rangle = \langle s_{\alpha_1^\vee} \cdots s_{\alpha_r^\vee}(\varphi), \alpha\rangle \geq 0$ *i.e.* $s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1}(\alpha) \in R^+_\varphi$. Sei $\alpha \in S'$. Wir zeigen $w(\alpha) \in S$. Es gilt

$$\langle s_{\alpha_1^\vee} \cdots s_{\alpha_r^\vee}(\varphi), w(\alpha)\rangle = \langle \varphi, s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1} s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}(\alpha)\rangle = \langle \varphi, \alpha\rangle \geq 0$$

i.e. $w(\alpha) \in R^+$. Außerdem, falls $w(\alpha) = \gamma + \gamma'$ für $\gamma, \gamma' \in R^+$ gilt, dann gilt auch $\alpha = w^{-1}(\gamma) + w^{-1}(\gamma')$ mit $w^{-1}(\gamma), w^{-1}(\gamma') \in R^+_\varphi$. in Widerspruch zu $\alpha \in S' = S_\varphi$. Daraus folgt $w(\alpha) \in S$.

(3. für W_S). Sei $\varphi \in V^\vee$ mit $\langle \varphi, \alpha \rangle \neq 0$ für alle $\alpha \in R$, mit

$$|\langle \varphi, \beta \rangle| = \min\{|\langle \varphi, \alpha \rangle| \mid \alpha \in R\}$$

und mit $\langle \varphi, \beta \rangle > 0$. Wir zeigen, dass $\beta \in S_\varphi$. Die Aussage folgt dann von 2. Angenommen es gäbe $\alpha, \gamma \in R_\varphi^+$ mit $\beta = \alpha + \gamma$. Dann gilt $\langle \varphi, \beta \rangle = \langle \varphi, \alpha \rangle + \langle \varphi, \gamma \rangle$. Es folgt $0 < \langle \varphi, \alpha \rangle = \langle \varphi, \beta \rangle - \langle \varphi, \gamma \rangle < \langle \varphi, \beta \rangle$. Ein Widerspruch.

4. Wir zeigen, dass $s_\beta \in W_S$ für alle $\beta \in R$. Nach (3. für W_S) gibt es $w \in W_S$ mit $w(\beta) = \alpha \in S$. Sei $v \in V$. Daraus folgt $w s_\beta w^{-1} = s_\alpha \in W_S$ und $s_\beta = w^{-1} s_\alpha w \in W_S$. ■

Definition 10.7.10 Die Menge

$$C_S = \{\varphi \in V^\vee \mid \langle \varphi, \alpha \rangle > 0 \text{ für alle } \alpha \in S\}$$

heißt **Weylkammer** bezüglich S.

Bemerkung 10.7.11 Die Weylkammern sind die zusammenhängenden Komponenten von

$$V^\vee \setminus \bigcup_{\alpha \in R} \alpha^\perp,$$

wobei $\alpha^\perp = \{\varphi \in V^\vee \mid \langle \varphi, \alpha \rangle = 0\}$. Theorem 10.7.9 zeigt, dass $W(R)$ transitiv auf die Weylkammern wirkt.

Es gilt sogar mehr.

Theorem 10.7.12 Die Weylgruppe $W(R)$ wirkt einfach transitiv auf den Weylkammern. □

Bemerkung 10.7.13 Wir haben gezeigt, dass die einfache Spiegelungen $(s_\alpha)_{\alpha \in S}$ die Weylgruppe $W(R)$ erzeugen. Man zeige, dass die einzige Relationen der Form

$$(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$$

sind, wobei $m(\alpha, \beta) = 2, 3, 4$ bzw. 6 für $\varphi = \pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ bzw. $5\pi/6$.

10.8. Cartan Matrizen

Definition 10.8.1 Die **Cartan Matrix** eines Wurzelsystems R bzg. der Basis S ist die Matrix $C(R, S) = (\langle \beta^\vee, \alpha \rangle)_{\alpha, \beta \in S}$.

Beispiel 10.8.2 Sei R von Rang 2 wie im Beispiel 10.1.6 und sei S die Basis gegeben im Beispiel 10.3.4. Die Cartan Matrix für Typ $A_1 \times A_1$, A_2, $B_2 = C_2$ oder G_2 sind:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lemma 10.8.3 Modulo Vertauschen, hängt die Cartan Matrix $C(R,S)$ nicht von der Basis S ab. $\square$

Beweis. Seien $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ und $S' = \{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n\}$ zwei Basen von R. Dann gibt es ein $w \in W(R)$ mit $w(S) = S'$. Modulo Vertauschen können wir annehmen, dass $\alpha'_i = w(\alpha_i)$. Es gilt also

$$\langle (\alpha'_i)^\vee, \alpha'_j \rangle = \langle w(\alpha_i)^\vee, w(\alpha_j) \rangle = \frac{2(w(\alpha_i), w(\alpha_j))}{(w(\alpha_i), w(\alpha_i))} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle.$$

Daraus folgt, dass $C(R,S) = C(R,S')$. ■

Bemerkung 10.8.4 Wir werden oft $C(R)$ statt $C(R,S)$ schreiben.

Proposition 10.8.5 Seien R und R' zwei Wurzelsysteme in V und V'. Seien S und S' Basen von R und R' und sei $\varphi : S \to S'$ eine Bijektion so, dass

$$\langle \varphi(\alpha)^\vee, \varphi(\beta) \rangle = \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \text{ für alle } \alpha, \beta \in S.$$

Dann gibt es einen eindeutig bestimmen Isomorphismus $f : V \to V'$ so, dass $f|_S = \varphi$ und $f(R) = R'$.

Beweis. Da S und S' Basen von V und V' sind, gibt es einen eindeutig bestimmen Isomorphismus $f : V \to V'$ so, dass $f|_S = \varphi$. Wir zeigen, dass $f(R) = R'$.

Wir zeigen zuerst, dass $s_{\varphi(\alpha)} \circ f = f \circ s_\alpha$ für alle $\alpha \in R$. Da S eine Basis von V ist genügt es zu zeigen, dass $s_{\varphi(\alpha)}(f(\beta)) = f(s_\alpha(\beta))$ für alle $\beta \in S$. Für $\beta \in S$ gilt

$$s_{\varphi(\alpha)}(f(\beta)) = s_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) = \varphi(\beta) - \langle \varphi(\alpha)^\vee, \varphi(\beta) \rangle \varphi(\alpha) = f(\beta) - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle f(\alpha) = f(s_\alpha(\beta)).$$

Insbesondere gilt $W(R') = fW(R)f^{-1}$. Da $W(R) \cdot S = R$ und $W(R') \cdot S' = R'$, gilt $f(R) = R'$. ■

Korollar 10.8.6 Seien R und R' zwei reduzierte Wurzelsysteme mit $C(R) = C(R')$. Dann sind R und R' isomorph.

10.9. Der Coxeter Graph

Definition 10.9.1 Ein **Coxeter Graph** ist einen Graph mit endliche viele Knoten und so, dass es 0, 1, 2 oder 3 Kanten zwischen zwei Knoten gibt.

Definition 10.9.2 Sei R ein Wurzelsystem und sei S eine Basis von R. Der **Coxeter graph $\Gamma(R,S)$ von R bzg. S** ist der Graph, dessen Knotenmenge gleich S ist und so, dass die Knoten α und β aus S mit $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \langle \beta^\vee, \alpha \rangle$ Kanten verbunden sind.

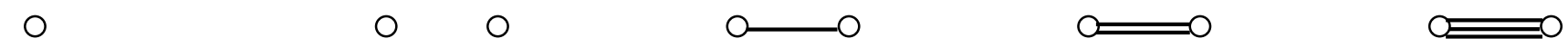
Bemerkung 10.9.3 Es gilt $\langle\alpha^\vee,\beta\rangle\langle\beta^\vee,\alpha\rangle = 4\cos^2\varphi \in \mathbb{Z}$, wobei φ der Winkel zwischen α und β ist. Für $a,\beta \in S$ mit $\alpha \neq \beta$ ist (α,β) linear unabhängig so, dass $\Gamma(R,S)$ ein Coxeter Graph ist.

Proposition 10.9.4 Seien S und S' zwei Basen von R. Dann sind $\Gamma(R,S)$ und $\Gamma(R,S')$ isomorph.

Beweis. Sei $w \in W$ mit $w(S) = S'$. Es gibt also eine Bijektion $w : S \to S', \alpha \mapsto w(\alpha)$. Im Lemma 10.8.3 haben wir gezeigt, dass gilt $\langle w(\alpha)^\vee, w(\beta)\rangle = \langle\alpha^\vee,\beta\rangle$. Daraus folgt, dass $\langle w(\alpha)^\vee, w(\beta)\rangle\langle w(\beta)^\vee, w(\alpha)\rangle = \langle\alpha^\vee,\beta\rangle\langle\beta^\vee,\alpha\rangle$ gilt und, dass $\Gamma(R,S)$ und $\Gamma(R,S')$ isomorph sind. ∎

Bemerkung 10.9.5 Wir werden oft $\Gamma(R)$ statt $\Gamma(R,S)$ schreiben.

Beispiel 10.9.6 Die Coxeter Graphen von A_1, $A_1 \times A_1$, A_2, $B_2 = C_2$ und G_2 sind wie folgt:



A_1 $\qquad$ $A_1 \times A_1$ $\qquad$ A_2 $\qquad$ $B_2 = C_2$ $\qquad$ G_2

10.10. Irreduzibel Wurzelsysteme

Proposition 10.10.1 Seien R_1 und R_2 zwei Wurzelsysteme in V_1 und V_2. Let $V = V_1 \oplus V_2$ und sei $R = R_1 \cup R_2 \subset V$. Dann ist R ein Wurzelsystem in V.

Beweis. (WS 1) Da R_1 und R_2 endlich sind, ist auch R endlich. Da $0 \notin R_1$ und $0 \notin R_2$, gilt $0 \notin R$. Da R_1 und R_2 EZS sind, ist auch R ein EZS von V.

(WS 2) Sei $\alpha \in R$. Dann gilt $\alpha \in R_1$ oder $\alpha \in R_2$. Angenommen $\alpha \in R_1$. Dann gibt es $s_\alpha \in \mathrm{GL}(V_1)$ mit $s_\alpha(R_1) = R_1$. Sei s_α^V definiert durch $s_\alpha^V(v_1 + v_2) = s_\alpha(v_1) + v_2$. Sei $\alpha^\vee \in R_1^\vee \subset V_1^\vee$ und sei $\alpha_V^\vee \in V^\vee$ definiert durch $\langle\alpha_V^\vee, v_1 + v_2\rangle = \langle\alpha^\vee, v_1\rangle$. Es gilt $s_\alpha^V(v_1+v_2) = v_1 + v_2 - \langle\alpha_V^\vee, v_1+v_2\rangle\alpha$ also ist s_α^V eine Spiegelung bzg. a. Es gilt für $\beta \in R_1$: $s_\alpha^V(\beta) = s_\alpha(\beta) \in R_1 \subset R$ und für $\beta \in R_2$ gilt $s_\alpha^V(\beta) = \beta \in R_2 \subset R$. Daraus folgt $s_\alpha^V(R) = R$.

(WS 3) Seien $\alpha,\beta \in R$. Wenn beide in R_1 oder in R_2 enthalten sind, gilt $\langle\alpha_V^\vee,\beta\rangle = \langle\alpha^\vee,\beta\rangle \in \mathbb{Z}$ Wenn $\alpha \in R_1$ und $\beta \in R_2$, gilt $\langle\alpha_V^\vee,\beta\rangle = 0 \in \mathbb{Z}$. ∎

Definition 10.10.2 Ein Wurzelsystem R in V heißt **reduzibel** falls es Wurzelsysteme R_1 in V_1 und R_2 in V_2 so, dass $V = V_1 \oplus V_2$ mit $R_1 = V_1 \cap R$ und $R_2 = V_2 \cap R$.

Ein Wurzel system heißt **irreduzbel** falls es nicht reduzibel ist.

Proposition 10.10.3 Set R ein Wurzelsystem in V so, dass $V = V_1 \oplus V_2$ mit $R \subset V_1 \cup V_2$. Sei $R_i = V \cap R$ für $i \in \{1, 2\}$.

1. Dann sind V_1 und V_2 orthogonal für jedes $W(R)$-invariante Skalarprodukt.

2. R_i ist ein Wurzelsystem in V_i für $i \in \{1, 2\}$.

Beweis. 1. Seien $\alpha \in R_1$ und $\beta \in R_2$. Es gilt $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \alpha \in R$. Also ist $s_\alpha(\beta)$ entweder in V_1 oder in V_2 enthalten. Da $\beta \in V_2 \setminus \{0\}$ gilt $s_\alpha(\beta) \notin V_1$ also $s_\alpha(\beta) \in V_2$. Daraus folgt $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \alpha \in V_1 \cap V_2 = 0$ also $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = 0$ und für jedes $W(R)$-invariante Skalarprodukt gilt $(\alpha, \beta) = 0$. Da R ein EZS von V ist, sind auch R_1 und R_2 EZS von V_1 und V_2. Daraus folgt, dass V_1 und V_2 orthogonal sind.

2. Wir überprüfen die Axiome.

(WS 1) Die Mengen R_1 und R_2 sind endlich und enthalten nicht 0 (weil es für R so ist). Wie oben sind R_1 und R_2 EZS von V_1 und V_2.

(WS 2) Sei $\alpha \in R_1$. Dann gilt $\alpha \in R$ und $s_\alpha(R_1 \cup R_2) = s_\alpha(R) = R = R_1 \cup R_2$. Da $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = 0$ für $\beta \in R_2$, gilt $s_\alpha|_{V_2} = \mathrm{Id}_{V_2}$ also $s_\alpha(R_2) = R_2$ und $s_\alpha(R_1) = R_1$. Die Spiegelung $s_\alpha^{V_1}$ bzg. α in V_1 ist also $s_\alpha|_{V_1}$. Analog für $\alpha \in R_2$.

(WS 3) Seien $\alpha, \beta \in R_1$. Sei $\alpha^\vee_{V_1} \in V_1^\vee$ die Spiegelung definiert durch $s_\alpha^{V_1}$. Von (WS 2), folgt, dass $\alpha^\vee_{V_1} = \alpha^\vee|_{V_1}$. Es gilt also $\langle \alpha^\vee_{V_1}, \beta \rangle = \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$. ∎

Korollar 10.10.4 Ein Wurzelsystem R in V ist genau dann reduzibel, wenn es eine Zerlegung $V = V_1 \oplus V_2$ gibt mit $R \subset V_1 \cup V_2$.

Proposition 10.10.5 Ein Wurzelsystem R ist genau dann irreduzibel, wenn $\Gamma(R)$ nicht leer und zusammenhängend ist.

Beweis. Sei R reduzibel. Seien R_1 und R_2 Wurzelsysteme in V_1 und V_2 so, dass $V = V_1 \oplus V_2$ und $R = R_1 \cup R_2$. Sei $S = S_1 \cup S_2$ wobei S_i eine Basis von R_i ist für $i \in \{1, 2\}$. Dann ist S eine Basis von R. Nach dem obigen Proposition ist $\Gamma(R)$ nicht zusammenhängend: die Knoten von S_1 und S_2 sind nicht verbunden.

Umgekehrt, sei R so, dass $\Gamma(R)$ nicht zusammenhängend ist. Sei $S = S_1 \cup S_2$ eine Zerlegung so, dass für jede $\alpha \in S_1$ und jede $\beta \in S_2$ gilt $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Sei $V_i = \langle S_i \rangle_\mathbb{R}$ für $i \in [1, 2]$. Wir zeigen, dass $R \subset V_1 \cup V_2$. Sei $\alpha \in R$. Dann gibt es $w \in W$ mit $w(\alpha) \in S$. Daraus folgt $w(\alpha) \in S_1$ oder S_2. Angenommen $w(a) \in S_1$. Wir zeigen, dass $\alpha \in V_1$. Da $W(R)$ von Spiegelungen der Form $(s_\beta)_{\beta \in S}$ erzeugt ist, gilt $s_\beta(V_1) \subset V_1$ und $s_\beta(V_2) \subset V_2$ (weil Elemente in $s_\beta(S_1)$ bzw. $s_\beta(S_2)$ lineare Kombinazionen von Vektoren aus S_1 bzw. S_2 sind). Es folgt $\alpha = w^{-1}(w(\alpha)) \in V_1$. ∎

11. Klassification von Coxeter Graphen

Sei C ein Coxeter Graph und seien C_0 bzw. C_1 die Menge aller Knoten bzw. aller Kanten in C. Sei V_C ein Vektorraum der Dimension $|C_0|$ und sei $(e_v)_{v\in C_0}$ eine Basis in V. Wir schreiben $m(v,v')$ für die Anzahl der Kanten zwischen v und v'. Wir definieren eine symmetrische Bilinearform durch

$$b_C(e_v, e_v) = 1 \text{ und } b_C(e_v, e_{v'}) = -\cos\frac{\pi}{m+2} \text{ fr } v \neq v',$$

wobei $m = 0, 1, 2, 4$ für $m(v,v') = 0, 1, 2, 3$. Wir schreiben $b_c(e_v, e_{v'}) = q_{v,v'}$ und $m(v,v')$ für die Anzahl der Kanten zwischen v und v'. Wir schreiben auch $q_{i,j} = b_C(e_i, e_j)$.

Definition 11.0.6 Das Paar (V_C, b_C) heißt **geometrische Darstellung des Coxeter Graphs** C.

Definition 11.0.7 Ein Coxeter Graph heißt **endlich** falls b_C positiv definit ist.

Wir wollen die endliche Coxeter Graphen classifizieren.

Definition 11.0.8 Sei C ein Coxeter Graph. Ein **Loop von** C ist eine folge von Knoten $(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ so, dass es paarweise verschiedene Kante zwischen v_i und v_{i+1} gibt für alle $i \in [0,n]$ und $v_0 = v_n$.

Lemma 11.0.9 Sei C ein endliches Coxeter Graph. Dann hat C kein Loop. □

Beweis. Sei $(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ ein Loop. Sei $x = e_{v_1} + \cdots + e_{v_n}$. Es gilt $b_C(x,x) = n + \sum_{i\neq j} q_{v_i,v_j}$ (nach Def. $q_{v_i,v_j} = b_C(e_{v_i}, e_{v_j})$). Es gilt $q_{v_i,v_j} = -\cos(\pi/(m+2)) = 0, -1/2, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{3}/2$ für $m = 0, 1, 2, 3$. Für alle i gilt $m = m(v_i, v_{i+1}) \geq 1$ also $-\cos(\pi/(m+2)) \leq -1/2$. Sonst gilt $-\cos(\pi/(m+2)) \leq 0$. Daraus folgt

$$b_C(x,x) \leq n - 2\sum_{i=0}^{n-1} q_{v_i,v_{i+1}} \leq n - 2n(1/2) = 0.$$

Daraus folgt $x = 0$, weil b_C positiv definit ist. Ein Widerspruch. ■

11.1. Kontraktion einer Kante

Sei C ein endliches Coxeter Graph und sei e eine Kante *i.e.* $e \in C_1$. Seien v und v' die Knoten, die von e verbunden sind.

Definition 11.1.1 Sei C ein Coxeter Graph. Die Kontraktion der Kante e zuordnet das folgende Graph $C(e)$ zu C:

- die Knoten Menge $C(e)_0$ ist $(C_0 \setminus \{v, v'\}) \cup \{e\}$;
- die Kanten zwischen zwei Punkte in $C_0 \setminus \{v, v'\}$ sind die selbe Kanten als in C;
- die Kanten zwischen v'' in $C_0 \setminus \{v, v'\}$ und e sind alle Kanten in C die zwischen v'' und eines von beiden Knoten v und v'.

Bemerkung 11.1.2 Sei C endlich. Dann ist es nicht möglich, im lezten Fall, dass es Kanten zwischen v und v'' und zwischen v' und v'' gibt. Sonst würde es ein loop (v, v', v'', v) in C geben.

Proposition 11.1.3 Sei C endlich und sei e eine Kante zwischen v und v' mit $m(v, v') = 1$ (*i.e.* e ist die einzige Kante zwischen v und v'). Dann ist $C(e)$ auch endlich.

Beweis. Für Knoten i und j aus $C(e)$, schreiben wir $q'_{i,j}$ für $b_{C(e)}(e_i, e_j)$. Seien $i, j \in C(e) \setminus \{e\}$. Es gilt $q'_{i,j} = q_{i,j}$. Sei $i \in C(e) \setminus \{e\}$. Es gilt $q'_{i,e} = q_{i,v} + q_{i,v'}$ (ein von beiden verschwindet). Für $x = \sum_{i \in C(e)_0, i \neq e} x_i e_i + x_e e_e \in V_{C(e)}$ setzen wir $y = \sum_{i \in C(e)_0, i \neq e} x_i e_i + x_e e_v + x_e e_{v'} \in V_C$. Es gilt

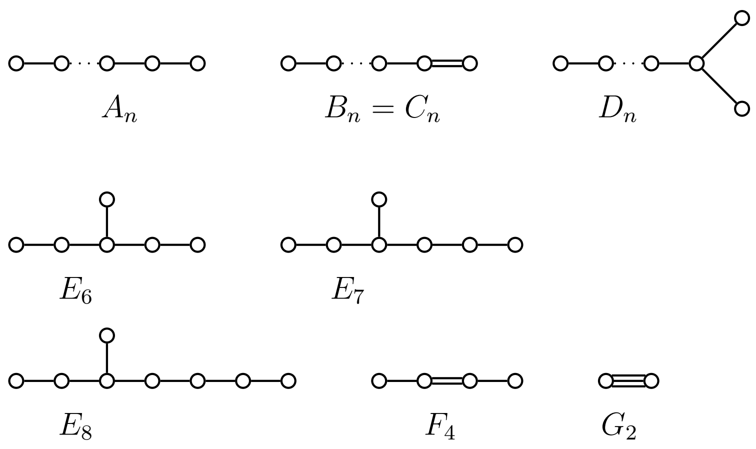
$$b_{C(e)}(x, x) = \sum_{i,j \neq e} q_{i,j} x_i x_j + 2 \sum_{i \neq e} x_e x_i (q_{i,v} + q_{i,v'}) + x_e^2 \text{ und}$$

$$b_C(y, y) = \sum_{i,j \neq e} q_{i,j} x_i x_j + 2 \sum_{i \neq e} x_e x_i q_{i,v} + 2 \sum_{i \neq e} x_e x_i q_{i,v'} + x_e^2 (2 + 2q_{v,v'}).$$

Da $q_{v,v'} = -1/2$, sind die beide Terme gleich und $b_{C(e)}(x, x) \geq 0$. Außerdem, gilt $b_C(y, y) = 0$ für $b_{C(e)}(x, x) = 0$. Daraus folgt $y = 0$ *i.e.* $x = 0$. ∎

11.2. Klassifikation

Theorem 11.2.1 Die folgende Graphen sind die zusammenhängende endliche Coxeter Graphen:



Beweis. Wir brauchen einige Lemma.

Lemma 11.2.2 Sei C ein endliches Coxetex Graph und sei v ein Knoten von C. Dann gilt $\sum_{v' \neq v} q_{v,v'}^2 < 1$. □

Beweis. Seien v' und v'' in $C_0 \setminus \{v\}$ mit $q_{v,v'} \neq 0$ und $q_{v,v''} \neq 0$. Es gilt $q_{v',v''} = 0$ (sonst ist (v, v', v'', v) ein Loop). Sei C_v die Teilmenge von C_0 aller Knoten v' mit $q_{v,v'} \neq 0$ und sei $x = -e_v + \sum_{v' \in C_v} q_{v,v'} e_{v'}$. Es gilt

$$0 < b_C(x, x) = \sum_{v',v'' \in C_v} q_{v,v'} q_{v,v''} q_{v',v''} - 2 \sum_{v' \in C_v} q_{v,v'}^2 + 1 = 1 - \sum_{v' \in C_v} q_{v,v'}^2$$

Daraus folgt die Aussage. ■

Korollar 11.2.3 Sei C ein endliches Coxetex Graph.

1. Seien $v, v_1, v_2, v_3 \in C_0$ mit $m(v, v_i) \geq 1$ für $i \in [1, 3]$. Dann gilt $m(v, v_i) = 1$ für $i \in [1, 3]$ und v ist nur zu v_1, v_2, v_3 verbunden.

2. Sei $v \in C_0$. Dann gibt es höchstens ein $v' \in C_0 \setminus \{v\}$ mit $m(v, v') \geq 2$.

3. Seien $v, v' \in C_0$ mit $m(v, v') = 3$. Dann hat C nur zwei Knoten und ist von Typ G_2.

Beweis. Wird werden das obige Lemma für v anwenden. Seien $(v_i)_{i \in [1,n]}$ die Knoten mit $m(v, v_i) \geq 1$. Sei n_k die Anzahl von Knoten v_i mit $m(v, v_i) = k$ für $k \in [1, 3]$. Für $m(v, v_i) = k$ gilt $q_{v,v_i}^2 = k/4$. Daraus folgt

$$1 > \sum_{i=1}^{n} q_{v,v_i}^2 = \frac{n_1 + 2n_2 + 3n_3}{4}.$$

Es folgt $n_1 + 2n_2 + 3n_3 \leq 3$ und

- $n_1 \leq 3$ und für $n_1 = 3$ gilt $n_2 = n_3 = 0$. Dies zeigt 1.
- $n_2 \leq 1$. Dies zeigt 2.
- $n_3 \leq 1$ und für $n_3 = 1$ gilt $n_1 = n_2 = 0$.

Um 3. zu zeigen braucht man nur zu bemerken, dass v und v' zu keinem weiteren Knoten verbunden sind. Da C zusammenhängend ist folgt, dass es nur zwei KNoten gibt und C ist von Typ G_2. ■

Lemma 11.2.4 Die folgende Alternative gilt:

1. der Graph C hat genau einen Knoten der genau zu drei verschiedenen Knoten verbunden ist und alle Paare von Knoten sind höchstens mit einer Kante verbunden, oder
2. der Graph C hat keinen Knoten der zu drei verschiedenen Knoten verbunden ist und es gibt höchstens ein Paar von Knoten die mit zwei Kanten verbunden sind. □

Beweis. Per Induktion nach $n = |C_0|$. Für $n = 1$, 2 oder 3 folgt die Aussage vom obigen Korollar. Angenommen die Aussage gilt für Coxeter Graphen mit n Knoten. Sei C ein endlisches zusammenhängendes Coxeter Graph mit $n + 1$ Knoten.

Fall 1. Es gibt $v, v_1, v_2, v_3 \in C_0$ mit $m(v, v_i) \geq 1$. Nach dem obigen Korollar gilt $m(v, v_i) = 1$ und v ist zu keinem weiteren Knoten verbunden. Falls v_1, v_2, v_3 zu keinen weiteren Knoten verbunden sind gilt $n + 1 = 4$ und C hat Typ D_4. Die Aussage folgt in diesem Fall. Sonst können wir ohne Beschränkung annehmen, dass v_1 zu einem weiteren Knoten verbunden ist. Sei e die Kante zwischen v_1 und v. Dann ist $C(e)$ endlich und erfüllt 1. Per Induktion sind alle Paare von Knoten in $C(e)$ mit höchstens eine Kante verbunden. Dies gilt also auch für C.

Fall 2. Angenommen, dass es kein v wie im Fall 1 aber, dass es ein Paar $(v, v') \in C_0^2$ gibt mit $m(v, v') \geq 2$. Falls $m(v, v') \geq 3$ sind wir dank dem obigen Korollar fertig. Wir können also annehmen, dass $m(v, v') = 2$. Falls $|C_0| = 1, 2$ sind wir fertig. Sonst ist v oder v' mit einem weiteren Knoten verbunden. Wir können annehmen, dass v zu einem weiteren v'' Knoten verbunden ist. Nach dem obigen Korollar gilt $m(v, v'') = 1$. Sei e die Kante zwischen v und v''. Dann ist $C(e)$ endlich und erfüllt 2. Die Aussage folgt nach Induktion. ■

Die Graphen die noch möglich sind, sind die Graphen von Typ G_2, die Graphen mit eine Ramifikation und die Graphen ohne Ramifikation und mit höchstens eine doppelte Kante.

Lemma 11.2.5 Sei $(v_i)_{i \in [1,n]}$ eine Kette von Knoten in C mit $m(v_i, v_{i+1}) = 1$ für $i \in [1, n-1]$. Sei $x = \sum_{i=1}^n i e_{v_i}$. Dann gilt

$$b_C(x, x) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Es gilt

$$b_C(x,x) = \sum_{i,j} ij b_C(e_{v_i}, e_{v_j}) = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i$$

und die Aussage folgt. ∎

Lemma 11.2.6 Sei C mit einer doppelten Kante und nicht von Typ $B_n = C_n$. Dann ist C von Typ F_4:

Beweis. Nach Lemma 11.2.4 ist C eine Kette. Wir schreiben v_1 und w_1 für die Knoten den doppelten Kanten. Es gibt Ketten $(v_i)_{i\in[1,n]}$ und $(w_j)_{j\in[1,m]}$ von Knoten mit einfachen Kanten zwischen v_i und v_{i+1} (und zwischen w_j und w_{j+1}) für $i \in [1, n-1]$ und $j \in [1, m-1]$. Wir setzen $x = \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)e_{v_i}$ und $y = \sum_{j=1}^{m}(m+1-j)e_{w_j}$. Es gilt $b_C(x,x) = n(n+1)/2$ und $b_C(y,y) = m(m+1)/2$. Nach Cauchy-Schwartz Ungleichung gilt $|b_C(x,y)^2| < b_C(x,x)b_C(y,y)$ *i.e.*

$$\frac{1}{2}n^2m^2 < \frac{n(n+1)}{2}\frac{m(m+1)}{2}.$$

Daraus folgt $(n-1)(m-1) \leq 1$. Nach Annahme gilt aber $n, m \geq 2$. Die Aussage folgt. ∎

Sei C mit einem Knoten r, der zu drei verschiedenen weiteren Knoten verbunden ist. Dann ist C die Vereinnigung von r und drei Ketten $(u_k)_{k\in[1,l]}$, $(v_i)_{i\in[1,n]}$ und $(w_j)_{j\in[1,m]}$ mit einfache Kanten zwischen u_k und k_{k+1}, zwischen v_i und v_{i+1} und zwischen w_j und w_{j+1}) für $k \in [1, l-1]$, $i \in [1, n-1]$ und $j \in [1, m-1]$ und mit einfache Kanten zwhischen r und u_1,v_1,w_1.

Lemma 11.2.7 Die Mögligkeiten für (l, m, n) mit $l \leq m \leq n$ sind $(1,2,2)$, $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,1,n)$. □

Beweis. Wir setzen $x = \sum_{k=1}^{l}(l+1-k)e_{u_k}$, $y = \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)e_{v_i}$ und $z = \sum_{j=1}^{m}(m+1-j)e_{w_j}$. Es gilt $b_C(x,x) = l(l+1)/2$, $b_C(y,y) = n(n+1)/2$, $b_C(z,z) = m(m+1)/2$ und $b_C(x,e_r) = -l/2$, $b_C(y,e_r) = -n/2$ und $b_C(z,e_r) = -m/2$. Set $F = \langle x, yz\rangle_{\mathbb{R}}$ und sei $||v|| = \sqrt{b_C(v,v)}$. Dann ist $(x/||x||, y/||y||, z/||z||)$ eine orthonormale Basis von F. Die Strecke (zum quadrat) von e_r zu F ist $D = b_C(e_r - p(e_r), e_r - p(e_r))$ wobei $p(e_r)$ die orthogonale Projektion auf F ist. Es gilt $p(v) = b_C(v, x/||x||)x/||x|| + b_C(v, y/||y||)y/||y|| + b_C(v, z/||z||)z/||z||$ und $v - p(v)$ und $p(v)$ sind immer senkrecht. Daraus folgt ($e_r \notin F$)

$$0 < D = b_C(e_r, e_r - p(e_r)) = b_C(e_r, e_r) - b_C(e_r, x/||x||)^2 - b_C(e_r, y/||y||)^2 - b_C(e_r, z/||z||)^2.$$

Daraus folgt
$$1 - \frac{l}{2(l+1)} - \frac{m}{2(m+1)} - \frac{n}{2(n+1)} > 0$$
und
$$\frac{1}{l+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} > 1$$
Da $l \leq m \leq n$ folgt $3 > l+1$ und $l \leq 1$ *i.e.* $l = 1$. Daraus folgt $4 > m+1$ *i.e.* $m \leq 2$. Für $m = 2$ gilt $6 > n+1$ also $n \leq 4$. ∎

Man sollte jetzt auch überprüfen, dass die Graphen C im Theorem endlich sind. Dies ist eine Übung. Man kann dies auch zeigen in dem man zeigt, dass es Wurzelsysteme mit diesen Graphen gibt (siehe nächstes Kapitel). ∎

11.3. Dynkin Diagramme und Klassifizierung der Wurzelsysteme

Sei R ein reduziertes irreduzibles Wurzelsystem in V und sei S eine Basis von R. Sei $(\ ,\ )$ ein $W(R)$-invariantes Skalarprodukt auf V.

Definition 11.3.1 Sei $\Gamma(R)$ der Coxeter Graph. Das **Dynkin Diagramm** $D(R)$ ist der Coxeter Graph $\Gamma(R)$ und eine Abbildung $\Gamma(R) \to \mathbb{R}$ die zu jedem Knotem $v_\alpha \in \Gamma(R)$ mit $\alpha \in S$ die Zahl (α, α) zuordnet.

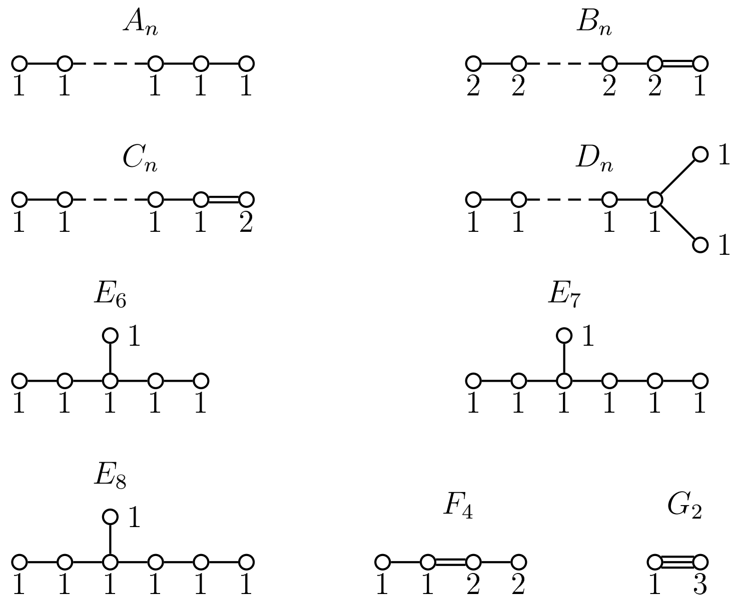
Proposition 11.3.2 Die Cartan Matrix (und also das Wurzelsystem) ist eindeutig dank dem Dynkin Diagramm bestimmt.

Beweis. Wir bestimmen die Cartan Matrix dank dem Dynkin Diagramm. Seien $\alpha, \beta \in S$. Falls es zwischen v_α und v_β in $D(R)$ keine Kante gibt, gilt $\langle \beta^\vee \rangle \alpha = 0$. Sonst betrachten die folgende Fälle:

- Falls $\beta = \alpha$, gilt $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle = 2$.
- Falls $(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$, gilt $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle = -1$.
- Falls $(\beta, \beta) < (\alpha, \alpha)$, gilt $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle = -m(v_\alpha, v_\beta)$.

Insbesondere ist die Cartan Matrix eindeutig bestimmt. ∎

Theorem 11.3.3 Die reduzierte irreduzibel Wurzelsysteme haben die folgende Dynkin Diagramme:



Beweis. Sei S eine Basis von R. Dann ist S eine Basis von V. Wir setzen $e_\alpha = \alpha/|\alpha|$. Das System $(e_\alpha)_{\alpha\in S}$ ist auch eine Basis und es gilt

$$(e_\alpha, e_\beta) = \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\cdot|\beta|} = \cos\varphi$$

wobei φ den Winkel zwischen α und β ist. Dies ist genau die geometrische Darstellung des Coxeter Graphs. Da diese Bilinearform positiv definit ist, ist $\Gamma(R)$ endlich. Daraus folgt die Aussage.

Es beibt zu zeigen, dass es ein Wurzelsystem zu jedem Dynkin Diagramme gibt. Wir geben eine explizite Konstruktion aller Wurzelsysteme. Der Nachweis, dass alle Wurzelsysteme sind, lassen wir als Übung.

Sei $(e_i)_{i\in[1,n]}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Sei $(\ ,\ )$ das standard Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ und sei

$$L_n = \{a_1e_1 + \cdots a_ne_n \in \mathbb{R}^n \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i \in [1,n]\}.$$

Typ A_n. Sei $V = (e_1 + \cdots + e_{n+1})^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und sei $R \subset V$ definiert durch

$$R = \{\alpha \in L_{n+1} \mid (\alpha,\alpha) = 2\}.$$

Es gilt $0 \notin R$ und R ist eine endliche Menge. Die Spiegelungen s_α für $\alpha \in R$ sind durch $s_\alpha(v) = v - (\alpha, v)\alpha$ definiert. Die Wurzeln in R sind die Vektoren $e_i - e_j$ für $i \neq j$. Man überprüft, dass R ein Wurzelsystem ist und, dass $(e_i - e_{i+1})_{i\in[1,n]}$ eine Basis von R ist. Daraus folgt $D(R) = A_n$. Die Weylgruppe ist die symmetrische Gruppe S_n und wirkt auf $\mathbb{R}^{n+1}$ durch Permutationen auf die Indizen der Vektoren der kanonischen Basis.

Typ B_n. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Wir setzen

$$R = \{\alpha \in L_n \mid (\alpha, \alpha) = 1 \text{ oder } (\alpha, \alpha) = 2\}.$$

Es gilt $0 \notin R$ und R ist eine endliche Menge. Die Wurzeln in R sind die Vektoren $\pm e_i$ für alle i und $\pm e_i \pm e_j$ für $i \neq j$. Man überprüft, das dies ein Wurzelsystem ist mit Basis $((e_i - e_{i+1})_{i \in [1,n-1]}, e_n)$. Daraus folgt $D(R) = B_n$. Die Weylgruppe ist $S_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ (mit $2^n n!$ Elemente) wobei S_n durch Permutation auf die Indizen der Vektoren der kanonischen Basis wirkt.

Typ C_n. Dieses Wurzelsystem ist das dual Wurzelsystem von B_n. Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $R = \{\pm 2e_i \mid \text{für alle } i\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid \text{für alle } i \neq j\}$. Man überprüft, das dies ein Wurzelsystem ist. mit Basis $((e_i - e_{i+1})_{i \in [1,n-1]}, 2e_n)$. Daraus folgt $D(R) = C_n$. Die Weylgruppe ist $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ wir für B_n.

Typ D_n. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Wir setzen

$$R = \{\alpha \in L_n \mid (\alpha, \alpha) = 2\}.$$

Es gilt $0 \notin R$ und R ist eine endliche Menge. Die Wurzeln in R sind die Vektoren $\pm e_i \pm e_j$ für $i \neq j$. Man überprüft, das dies ein Wurzelsystem ist mit Basis $((e_i - e_{i+1})_{i \in [1,n-1]}, e_{n-1} + e_n)$. Daraus folgt $D(R) = D_n$. Die Weylgruppe ist $S_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ (mit $2^{n-1} n!$ Elemente) wobei S_n durch Permutation auf die Indizen der Vektoren der kanonischen Basis wirkt.

Typ G_2. Diese Wurzelsystem wurde im Beispiel 10.1.6 gegeben.

Typ F_4. Sei $L_4' = \{v \in V \mid v = \frac{a}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + w \text{ mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } w \in L_4\}$, wobei $V = \mathbb{R}^4$. Wir setzen

$$R = \{\alpha \in L_4' \mid (\alpha, \alpha) = 1 \text{ oder } (\alpha, \alpha) = 2\}.$$

Die Wurzeln in R sind $\pm e_i$ für alle i, $\pm e_i \pm e_j$ für $i \neq j$ und $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$. Man überprüft, dass dies ein Wurzelsystem ist. Die einfache Wurzeln sind $(e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4))$ und das Dynkin Diagramm hat Typ F_4. Die Weyl-Gruppe hat $2^7 3^2$ Elemente.

Typ E_8. Sei $L_8' = \{v \in V \mid v = \frac{a}{2}(e_1 + \cdots + e_8) + w \text{mit } a \in \mathbb{Z} \text{ und } w \in L_4\}$, wobei $V = \mathbb{R}^8$. Wir setzen $L_8'' = \{v \in L_8' \mid v = \sum_i a_i e_i \text{ mit } \sum_i a_i \text{ gerade}\}$ und wir definieren

$$R = \{\alpha \in L_8'' \mid (\alpha, \alpha) = 2\}.$$

Man überprüft, dass dies ein Wurzelsystem ist. Die Wurzeln sind

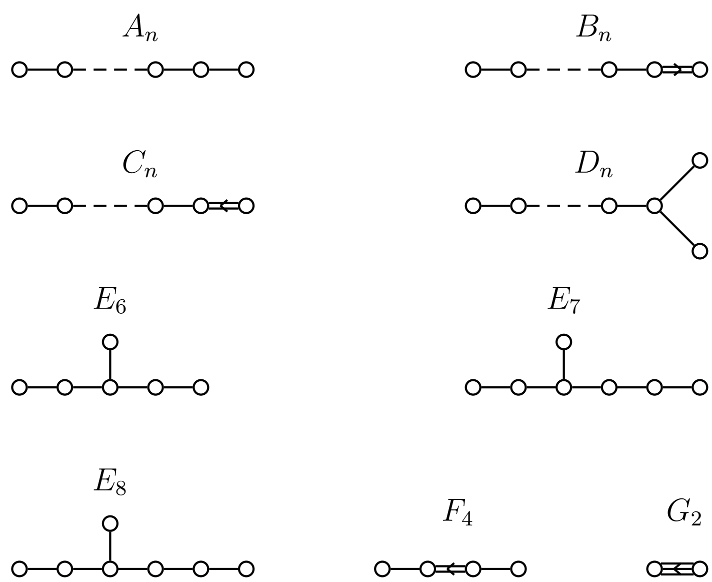
$$\pm e_i \pm e_j \text{ für } i \neq j \text{ und } \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{m(i)} e_i \text{ mit } \sum_{i=1}^{8} m(i) \text{ gerade.}$$

Ein Basis ist durch $\frac{1}{2}(e_1 + e_8 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7)$, $e_1 + e_2$, $e_2 - e_1$, $e_3 - e_2$, $e_4 - e_3$, $e_5 - e_4$, $e_6 - e_5$, $e_7 - e_6$ gegeben und man überprüft, dass $D(R)$ von Typ E_8 ist. Die Weyl-Gruppe hat $2^{14}3^5 5^2 7$ Elemente.

Typ E_7. Man betrachtet den Schnitt vom Wurszelsystem von Typ E_8 mit dem Unterraum $\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle_{\mathbb{R}}$. Wie Weylgroupe hat $2^7 3^4 5$ Elemente.

Typ E_6. Man betrachtet den Schnitt vom Wurszelsystem von Typ E_8 mit dem Unterraum $\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, \rangle_{\mathbb{R}}$. Wie Weylgroupe hat $2^{10} 3^4 5 7$ Elemente. ∎

Bemerkung 11.3.4 Da die Wurzeln nur 2 verschiedene Länge haben können wird man die Dynkin Diagramme vereinfachen in dem man die Werte der Abbildung nicht mehr schreibt sondern eine Pfeile von der Wurzel mit grosseren Länge zur Wurzel mit kleineren Länge. Die Dynkin Diagramme sehen also wie folgt aus:



12. Klassifikation halbeinfacher komplexer Lie-Algebren

12.1. Zerlegung der Lie Algebren

Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra und sei $\mathfrak{h}$ eine Cartan Unteralgebra. Die Lie Algebra $\mathfrak{h}$ ist abelsch und $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Außerdem sind alle Elemente in $\mathfrak{h}$ halbeinfach. Für $x \in \mathfrak{h}$, ist also ad_x diagonalisierbar. Da $\mathfrak{h}$ abelsch ist gilt $[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_{[x,y]} = 0$ also sind alle $(\mathrm{ad}_x)_{x\in\mathfrak{h}}$ gleichzeitig diagonalisiertbar. Sei $(e_i)_{i\in[1,n]}$ eine Basis von Eigenvektoren in $\mathfrak{g}$ mit $n = \dim \mathfrak{g}$. Für alle $x \in \mathfrak{h}$, gilt

$$\mathrm{ad}\,(x)(e_i) = [x, e_i] = \lambda_i(x)e_i$$

wobei e_i einer Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_i(x)$ für ad_x ist.

Lemma 12.1.1 Die Abbildung $\lambda_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ definiert durch $x \mapsto \lambda_i(x)$ ist eine Linearform. □

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und seien $x, y \in \mathfrak{h}$. Es gilt $\lambda_i(ax + by)e_i = [ax + by, e_i] = a[x, e_i] + b[y, e_i] = (a\lambda_i(x) + b\lambda_i(y))e_i$. ■

Korollar 12.1.2 Es gibt eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{h}^\vee\setminus\{0\}} \mathfrak{g}_\alpha$$

wobei $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \ / \ \forall y \in \mathfrak{h} \ \mathrm{ad}\,(y)(x) = \alpha(y)x\}$.

Proof. Die Zerlegung ist die Zerlegung von $\mathfrak{g}$ in Eigenräume für $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{h})$. Zu zeigen ist nur, dass $\mathfrak{h}$ der Eigenraum $\mathfrak{g}_0$ zum 0 ist. Sei also $z \in \mathfrak{g}$ mit $\mathrm{ad}_x(z) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{h}$. Es gilt also $[x, z] = 0$ für alle $x \in \mathfrak{h}$ und $z \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Daraus folgt $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{h}$. Da $\mathfrak{h}$ abelsch ist gilt auch $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. None

Definition 12.1.3 Eine Linearform $\alpha \in \mathfrak{h}^\vee$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ heißt **Wurzel der Lie Algebra $\mathfrak{g}$**. Wir schreiben R für die Menge aller Wurzeln von $\mathfrak{g}$. Dies ist eine endliche Teilmenge von $V = \langle R\rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{h}^\vee$.

Sei $\alpha \in R$ und $x \in \mathfrak{g}_\alpha$. Dann hat x Gewicht α und Elemente in $\mathfrak{h}$ haben Gewicht 0.

Proposition 12.1.4 Sei $(\ ,\ )$ eine invariante Bilinearform (z.B. die Killing Form).

1. Für $\alpha + \beta \neq 0$ sind die Unterräume $\mathfrak{g}_\alpha$ und $\mathfrak{g}_\beta$ orthogonal bzg. $(\ ,\ )$.

2. Die Einschränkungen $(\ ,\ )|_{\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ und $(\ ,\ )|_{\mathfrak{h}}$ sind nicht ausgeartet.

3. Seien $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ und $h \in \mathfrak{h}$. Es gilt $(h, [x, y]) = \alpha(h)(x, y)$.

4. Sei $\alpha \in R$ und sei $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ definiert durch $\alpha = (h_\alpha,\ )$. Es gilt $[x, y] = (x, y)h_\alpha$ für $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

Beweis. 1. Seien $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_\beta$. Für $h \in \mathfrak{h}$ gilt

$$\alpha(h)(x, y) = ([h, x], y) = -(x, [h, y]) = -\beta(h)(x, y).$$

Daraus folgt $(\alpha(h) - \beta(h))(x, y) = 0$. Für $\alpha + \beta \neq 0$ gibt es ein $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) - \beta(h) \neq 0$. Daraus folgt $(x, y) = 0$.

2. Es gibt eine direkte Summe von Unterräume die orthogonal bzg. $(\ ,\ )$ din:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \overset{\perp}{\bigoplus_{\alpha \in R}} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}).$$

Da $(\ ,\ )$ nicht ausgeartet ist sind die Einschränkungen auch nicht ausgeartet.

3. Da $(\ ,\ )$ invariant ist gilt $(h, [x, y]) = ([h, x], y) = \alpha(h)(x, y)$.

4. Wir zeigen, dass $[x, y] \in \mathfrak{h}$. Es gilt $[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha(h)[x, y] - \alpha(h)[x, y] = 0$ also $[x, y]$ hat Gewicht 0 *i.e.* $[x, y] \in \mathfrak{h}$.

Sei $h \in \mathfrak{h}$. Es gilt

$$([x, y], h) = \alpha(h)(x, y) = (h_\alpha, h)(x, y) = ((x, y)h_\alpha, h).$$

Da $(\ ,\ )|_{\mathfrak{h}}$ nicth ausgeartet ist, gilt $[x, y] = (x, y)h_\alpha$. ∎

12.2. Struktursatz für halbeinfache komplexe Lie Algebren

Theorem 12.2.1 Sei $\mathfrak{g}$ eine komplexe halbeinfache Lie Algebra.

1. R ist ein reduziertes Wurzelsystem von Rang $\mathrm{Rg}(\mathfrak{g})$.

2. Sei $\alpha \in R$ eine Wurzel und sei $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{h}$. Dann gilt $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1 = \dim \mathfrak{h}_\alpha$.

3. Es gibt ein eindeutig bestimmtes Element $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ mit $\alpha(H_\alpha) = 2$. Dieses Element ist die Dualwurzel $\alpha^\vee = H_\alpha$.

4. Sei $\alpha \in R$ und sei $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ mit $X_\alpha \neq 0$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$.

5. Es gilt $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$ und $[H_\alpha, Y_\alpha] = 2Y_\alpha$ *i.e.* $\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ isomorph zu $\mathfrak{sl}_2$.

6. Seien $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \neq 0$. Es gilt $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]$. □

Beweis. Wir zeigen die Aussagen 1.-6. zusammen in 12 Schritte. Sei (,) eine invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$.

Schritt 1. Es gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Seien $x \in \alpha_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$ und $h \in \mathfrak{h}$. Es gilt $[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y]$.

Schritt 2. R ist ein EZS von $\mathfrak{h}^\vee$.

Es genügt zu zeigen, dass für $h \in \mathfrak{h}$ gilt die Implikation: ($\alpha(h) = 0$ für alle $\alpha \in R$ $\Rightarrow h = 0$). Seien $h \in \mathfrak{h}$ und $x \in \mathfrak{g}$. Wir schreieben $x = x_\mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in R} x_\alpha$ wobei $x_\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}$ und $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ für alle $\alpha \in R$. Es gilt $[h, x] = [h, x_\mathfrak{h}] + \sum_\alpha [h, x_\alpha] = \sum_\alpha \alpha(h) x_\alpha = 0$. Insbesondere gilt $h \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$.

Schritt 3. Es gilt $\dim \mathfrak{h}_\alpha = 1$.

Folgt aus Proposition 12.1.4: $\mathfrak{h}_\alpha = \langle h_\alpha \rangle$ mit $h_\alpha \neq 0$.

Schritt 4. Es gibt ein H_α in $\mathfrak{h}_\alpha$ mit $\alpha(H_\alpha) = 2$.

Wir zeigen, dass $\alpha(h_\alpha) \neq 0$. Schritt 4 folgt daraus: Setze $H_\alpha = \frac{2}{\alpha(h_\alpha)} h_\alpha$. Es gilt $\alpha(H_\alpha) = 2$.

Angenommen $\alpha(h_\alpha) = 0$. Da $(\, , \,)|_{\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ nicht ausgeartet ist und $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$ gibt es Vektoren $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $(x, y) \neq 0$. Daraus folgt $z = [x, y] = (x, y) h_\alpha \neq 0$ und $\alpha(z) = 0$. Es gilt also $[x, y] = z$, $[z, x] = \alpha(z) x = 0$ und $[z, y] = -\alpha(z) y = 0$. Sei $\mathfrak{s} = \langle x, y, z \rangle$. Dann ist $\mathfrak{s}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Die Lie-Algebra $\mathfrak{s}$ ist nilpotent also auflösbar. Daraus folgt, dass $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ nilpotent ist und nach dem Satz von Engel gibt es eine Basis so, dass alle Elemente von $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{s})$ als obere dreieckmatrizen darstellbar sind. Da $z \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ ist $\mathrm{ad}\,(z)$ eine obere dreieck Matrix mit 0 auf der Diagonal. Also ist $\mathrm{ad}(z)$ nilpotent. Aber $z \in \mathfrak{h}$ ist halbeinfach also für jede Darstellung $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ ist $\varrho(z)$ halbeinfach. Insbesondere ist $\mathrm{ad}\,(z)$ halbeinfach. Es folgt $\mathrm{ad}\,(z) = 0$ und $z = 0$. Ein Widerspruch.

Schritt 5. Sei $\alpha \in R$ und sei $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ mit $X_\alpha \neq 0$. Dann gibt es ein $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$.

Sei $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Es gilt $[X_\alpha, y] = (X_\alpha, y)h_\alpha$ und $h_\alpha = cH_\alpha$ für $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sei $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $(X_\alpha, y) \neq 0$ (dies ist möglich, da $(\, , \,)|_{\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ nicht ausgeartet ist). Wir setzen $Y_\alpha = y/(c(X_\alpha, y))$ und es gilt $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$.

Schritt 6. Es gilt $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$ und $[H_\alpha, Y_\alpha] = 2Y_\alpha$ *i.e.* $\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ isomorph zu $\mathfrak{sl}_2$.

Es gilt $[H_\alpha, X_\alpha] = \alpha(H_\alpha)X_\alpha = 2X_\alpha$ und $[H_\alpha, Y_\alpha] = -\alpha(H_\alpha)Y_\alpha = -2Y_\alpha$. Daraus folgt die Aussage.

Wir werde jetzt $\mathfrak{g}$ als $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{s}_\alpha$-Darstellung betrachten.

Schritt 7. Es gilt $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ für alle $\alpha \in R$. Das Element Y_α ist eindeutig bestimmt und es gilt $\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha$.

Angenommen $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$. Dann gilt auch $\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} > 1$. Sei $X_\alpha^\perp = \{y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \mid (X_\alpha, y) = 0\}$. Es gilt $X_\alpha^\perp = \mathrm{Ker} f$ wobei $f : \mathfrak{g}_{-\alpha} \to \mathbb{C}$ die Linearform defniniert durch $f(y) = (X_\alpha, y)$ ist. Nach Rangsatz gilt $\dim \mathfrak{g}_\alpha^\perp \geq \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} - 1 > 0$. Daraus folgt, dass es ein $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ gibt mit $(X_\alpha, y) = 0$. Es gilt also $[X_\alpha, y] = (X_\alpha, y)h_\alpha = 0$. Außerdem gilt $[H_\alpha, y] = -\alpha(H_\alpha)y = -2y$ also ist y ein primitiver Vektor für $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{s}_\alpha$ mit Gewicht -2. Ein Widerspruch da Gweicht von primitiven Vektoren für $\mathfrak{sl}_2$ nicht negative ganze Zahlen sind. Die zwei letze Aussage folgen daraus.

Schritt 8. Sei $\alpha, \beta \in R$. Dann gilt $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ und $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in R$.

Sei $x \in \mathfrak{g}_\beta$ mit $x \neq 0$. Es gilt $[H_\alpha, x] = \beta(H_\alpha)x$ also ist $\beta(H_\alpha)$ ein Gewicht für $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{s}_\alpha$. Daraus folgt $\beta(H_a) \in \mathbb{Z}$. Wir setzen

$$y = \begin{cases} Y_\alpha^{\beta(H_\alpha)}(x) & \text{falls } \beta(H_\alpha) \geq 0 \\ X_\alpha^{-\beta(H_\alpha)}(x) & \text{falls } \beta(H_\alpha) \leq 0. \end{cases}$$

Es gilt $y \neq 0$ und $y \in \mathfrak{g}_{\beta - \beta(H_\alpha)\alpha}$. Daraus folgt, dass $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha$ eine Wurzel ist.

Schritt 9. R ist ein Wurzelsystem von Rang $\mathrm{Rg}(\mathfrak{g})$.

Wir wissen schon, dass R endlich ist und, dass $0 \notin R$ und dass R ein EZS von $\mathfrak{h}^\vee$ ist also $\mathrm{Rg}(R) = \mathrm{Rg}(\mathfrak{g})$. Sei $\alpha \in R$. Wir definieren $s_\alpha : \mathfrak{h}^\vee \to \mathfrak{h}^\vee$ durch $s_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$ also $H_\alpha = \alpha^\vee$. Da $\langle H_\alpha, \alpha \rangle = \alpha(H_\alpha) = 2$ gilt, ist s_α eine Spiegelung bzw. α. Nach Schritt 8 gilt $s_\alpha(R) = R$ und $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = \langle H_\alpha, \beta \rangle = \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Schritt 10. R ist reduziert.

Sei $\alpha \in R$ und sei $x \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$. Wir zeigen $x = 0$. Da R ein Wurzelsystem ist, gilt $3\alpha \notin R$ also $\mathfrak{g}_{3\alpha} = 0$. Es gilt $[H_\alpha, x] = 2\alpha(H_\alpha)x = 4x$. Es gilt auch $[H_\alpha, x] = [[X_\alpha, Y_\alpha], x] = [[X_\alpha, x], Y_\alpha] + [X_\alpha, [Y_\alpha, x]] = [X_\alpha, [Y_\alpha, x]]$ weil $[X_\alpha, x] \in \mathfrak{g}_{3\alpha} = 0$. Da $[Y_\alpha, x], X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ linear abhängig sind gilt $[X_\alpha, [Y_\alpha, x]] = 0$. Es folgt $4x = [H_\alpha, x] = 0$.

Schritt 11. Seien $\alpha, \beta \in R$ lineare unabhängige Wurzeln. Seien $p = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \beta - n\alpha \in R\}$ und $q = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \beta + n\alpha \in R\}$. Sei

$$E = \bigoplus_{k=-p}^{q} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}.$$

Dann ist E eine irreduzibel $\mathfrak{s}_\alpha$-Darstellung der Dimension $p + q + 1$ und für $k \in [-p, q-1]$ ist die Abbildung

$$\mathrm{ad}_{X_\alpha} : \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \to \mathfrak{g}_{\beta+(k+1)\alpha}$$

ein Isomorphismus. Es gilt $\beta(H_\alpha) = p - q$.

Nach Schritt 1 ist E eine $\mathfrak{s}_\alpha$-Darstellung. Die Gewicht von H_α in E sind $(\beta + k\alpha)(H_\alpha) = \beta(H_\alpha) + 2k$ für k so, dass $\beta + k\alpha \in R$. Da alle Gewicht Vielfachkeit 1 haben, ist E irreduzibel. Daraus folgen die Aussagen über $\dim E$ und die Abbildung ad_{X_α}. Außerdem ist $\beta(H_\alpha) - 2p$ das minimale Gewicht von E und $\beta(H_\alpha) + 2q$ ist das maximale Gewicht. Es gilt also $\beta(H_\alpha) - 2p = -(\beta(H_\alpha) + 2q)$ und $\beta(H_\alpha) = p - q$.

Schritt 12. Seien $\alpha, \beta \in R$ mit $\alpha + \beta \in R$. Es gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Mit den obigen Schreiweise gilt $q \geq 1$ und $p \geq 0$. Für $k = 0$ ist also die Abbildung $\mathrm{ad}_{X_\alpha} : \mathfrak{g}_\beta \to \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ ein Isomorphismus. Insbesondere gilt $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \subset [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]$. Nach Schritt 1 gilt auch $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. ∎

Korollar 12.2.2 Das Wurzel System R hängt von der Cartan Unteralgebra $\mathfrak{h}$ nich ab.

Beweis. Seien $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}'$ zwei Cartan Unteralgebren. Seien R und R' die dazugehörige Wurzelsysteme. Es gibt ein Automorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ mit $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$ also $\varphi|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ ist ein Isomorphismus. Sei ${}^t\varphi^{-1} : \mathfrak{h}^\vee \to (\mathfrak{h}')^\vee$ die duale Abbildung des Inverses von φ. Für $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $h \in \mathfrak{h}$ gilt

$$[\varphi(h), \varphi(x)] = \varphi([h, x]) = \alpha(h)\varphi(x).$$

Also ist $\varphi(x)$ einer Eigenvector für $h' = \varphi(h) \in \mathfrak{h}'$ zum Gewicht $\alpha(h) = \alpha(\varphi^{-1}(h')) = {}^t\varphi^{-1}(\alpha)(h')$. Daraus folgt ${}^t\varphi^{-1}(\alpha) \in R'$. Also ist ${}^t\varphi^{-1}$ ein Isomorphismus von Wurzelsysteme von R nach R' (mit inverse ${}^t\varphi$). ∎

Korollar 12.2.3 Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra mit Wurzelsystem R. Die Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann Einfach, wenn R irreduzibel ist.

Beweis. Falls $\mathfrak{g}$ nicht einfach ist gilt $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ mit $\mathfrak{g}_i$ einer halbeinfachen Lie Algebra. Seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ Cartan Unteralgebren von $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$. Mann zeigt, dass $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2$ eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist und dass das Wurzelsystem R von $\mathfrak{g}$ die Vereinnigung der WUrzelsysteme R_1, R_2 von $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ ist.

Umgekehrt, falls R reduzibel ist. Dann ist R die orthogonale dijunkte Vereinigung von Wurzelsysteme R_1 und R_2. Sei $\mathfrak{h}_i = \langle H_\alpha \mid \alpha \in R_i \rangle \subset \mathfrak{h}$ für $i \in [1, 2]$. Wir setzen

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_i} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Es gilt $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$. ∎

Korollar 12.2.4 Es gilt $\dim \mathfrak{g} = \mathrm{Rg}(\mathfrak{g}) + |R|$.

Beispiel 12.2.5 Es gilt

- $\dim \mathfrak{g} = n - 1 + n(n-1) = n^2 - 1$ für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ von Typ A_{n-1};
- $\dim \mathfrak{g} = n + 2n^2 = 2n^2 + n$ für $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ von Typ B_n;
- $\dim \mathfrak{g} = n + 2n^2 = 2n^2 + n$ für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ von Typ C_n;
- $\dim \mathfrak{g} = n * 2n(n-1) = 2n^2 - n$ für $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ von Typ D_n;
- $\dim \mathfrak{g} = 6 + 72 = 78$ für $\mathfrak{g}$ von Typ E_6;
- $\dim \mathfrak{g} = 7 + 126 = 133$ für $\mathfrak{g}$ von Typ E_7;
- $\dim \mathfrak{g} = 8 + 240 = 248$ für $\mathfrak{g}$ von Typ E_8;
- $\dim \mathfrak{g} = 4 + 48 = 52$ für $\mathfrak{g}$ von Typ F_4;
- $\dim \mathfrak{g} = 2 + 12 = 14$ für $\mathfrak{g}$ von Typ G_2.

12.3. Existenz

Es bleibt zu zeigen, dass zu jedem Wurzelsystem von Typ A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4 und G_2 es eine einfache Lie Algebra von diesem Typ gibt. Wir werden diese Aussage nicht zeigen. Es gilt aber

In this section we give a description of a semisimple Lie algebra by generators and relations. Let us denote by $\mathfrak{n}$ the sum of the $\mathfrak{g}_\alpha$ for $\alpha \in R_+$ and $\mathfrak{n}_-$ the sum of the $\mathfrak{g}_\alpha$ for $\alpha \in R_-$. Remark that because H_α is the dual root of $\alpha \in R$, we have $\alpha(H_\beta) = \langle \beta^\vee, \alpha \rangle$.

Theorem 12.3.1 Sei R ein Wurzelsystem und S eine Basis von R. Die von den Variabeln $(X_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha \in S}$ erzeugte Lie Algebra $\mathfrak{g}$ mit Relationen
Weyl Relationen

- $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ für $\alpha \in S$,
- $[X_\alpha, Y_\beta] = 0$ für $\alpha, \beta \in S$ mit $\alpha \neq \beta$,
- $[H_\alpha, X_\beta] = \langle \alpha^\vee, \beta \rangle X_\alpha$ für $\alpha, \beta \in S$,
- $[H_\alpha, Y_\beta] = -\langle \alpha^\vee, \beta \rangle Y_\alpha$ für $\alpha, \beta \in S$,

Serre Relationen

- $\mathrm{ad}\,(X_\alpha)^{1-\langle \alpha^\vee, \beta \rangle}(X_\beta) = 0$ für $\alpha, \beta \in S$ mit $\alpha \neq \beta$,
- $\mathrm{ad}\,(Y_\alpha)^{1-\langle \alpha^\vee, \beta \rangle}(Y_\beta) = 0$ für $\alpha, \beta \in S$ mit $\alpha \neq \beta$,

ist eine Einfache Lie Algebra mit Wurzelsystem R. $\square$

Index