Einführung in die algebraische Geometrie

N. Perrin

Düsseldorf
Wintersemester 2014-2015

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Algebraische Mengen

1. Algebraische Mengen

Sei k ein kommutativer Körper.

1.1. Erste Definition

Definition 1.1.1 Sei $n \in \mathbb{N}$.

1. Die Menge k^n aller n-Tupel $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{k}^n$ werden wir mit $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ bezeichnen. Sie heißt **der affine Raum der Dimension n über k**.

2. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und ein Polynom $P \in \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ schreiben wir $P(x) := P(x_1, \ldots, x_n)$.

3. Sei $S \subset \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ eine Teilmenge. Wir setzen

$$V(S) = \{x \in \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \mid P(x) = 0 \text{ für alle } P \in S\}.$$

Die Menge $V(S)$ heißt **die von S definierte algebraische Menge**.

4. Für eine endliche Menge $S = \{P_1, \ldots, P_r\}$ schreiben wir $V(S) = V(P_1, \ldots, P_r)$.

Beispiel 1.1.2 1. Die leere Menge $\emptyset$ ist eine algebraische Menge: es gilt $V(1) = \emptyset$.

2. Der affine Raum $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ ist eine algebraische Menge: es gilt $V(0) = \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$.

3. Für $n = 1$ und $S \neq \{0\}$ ist $V(S)$ eine endliche Menge.

Lemma 1.1.3 Sei $n = 1$. Die algebraischen Teilmengen von $\mathbb{A}_1(\mathsf{k})$ sind $\emptyset$, $\mathbb{A}_1(\mathsf{k})$ und alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{A}_1(\mathsf{k})$. □

Beweis. Übung. ■

Beispiel 1.1.4 1. Für $n = 2$ sind die algebraischen Teilmengen von $\mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ von der Form $\emptyset$, $\mathbb{A}_2(\mathsf{k})$, alle endliche Teilmengen von $\mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ und die "Kurven" in der Ebene. Zum Beispiel

$$V(X, Y) = \{(0,0)\},\ V(X(X-1), Y) = \{(0,0), (1,0)\},\ V(X) = \text{Gerade},$$
$$V(X^2 + Y^2 - 1) = \text{Kreis},\ V(Y^2 - X(X-1)(X+1) = \text{Elliptische Kurve}.$$

2. Ein Punkt $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) = \mathsf{k}^n$ ist eine algebraische Menge: Es gilt

$$\{(a_1, \ldots, a_n)\} = V(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n).$$

Lemma 1.1.5 Seien $S \subset S'$ zwei Teilmengen von $\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$. Dann gilt $V(S') \subset V(S)$. □

Beweis. Übung. ■

Bemerkung 1.1.6 Zur Erinnerung: Sei $S \subset \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ und $\langle S \rangle$ das von S erzeugte Ideal. Für $P \in \langle S \rangle$ gibt es Elemente $P_1, \ldots, P_r \in S$ und $Q_1, \ldots, Q_r \in \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_r]$ mit

$$P = P_1 Q_1 + \ldots + P_r Q_r.$$

Lemma 1.1.7 Sei $S \subset \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ und $\langle S \rangle$ das von S erzeugte Ideal. Dann gilt $V(S) = V(\langle S \rangle)$. □

Beweis. Es gilt $S \subset \langle S \rangle$, also gilt nach Lemma 1.1.5 $V(\langle S \rangle) \subset V(S)$. Umgekehrt, sei $x \in V(S)$ und $P \in \langle S \rangle$. Nach Bemerkung 1.1.6 gibt es Elemente $P_1, \ldots, P_r \in S$ und $Q_1, \ldots, Q_r \in \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_r]$ mit $P = P_1 Q_1 + \ldots + P_r Q_r$. Daraus folgt

$$P(x) = P_1(x) Q_1(x) + \ldots + P_r(x) Q_r(x)$$

und da $x \in V(S)$, folgt $P_1(x) = \ldots = P_r(x) = 0$ und damit $P(x) = 0$ *i.e* $x \in V(\langle S \rangle)$. ■

Bemerkung 1.1.8 Zwei Teilmengen aus $\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ können die gleiche Algebraische Menge definieren. Zum Beispiel gilt

$$V(X) = V(X^2) = V(X^k)$$

für alle $k \geq 1$. Später wollen wir diese Vielfachheit berücksichtigen. Prinzip: *die Gleichungen enthalten mehr Informationen als die algebraische Menge.*

1.2. Noethersche Ringe

Zur Erinnerung aus der Vorlesung Algebra. Alle Ringe sind kommutativ.

Definition 1.2.1 Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal.

1. I heißt **endlich erzeugt**, falls es endlich viele Elemente $a_1, \cdots, a_n \in R$ gibt mit $I = (a_1, \ldots, a_n)$.

2. Ein Ring heißt **noetherscher Ring**, falls alle Ideale endlich erzeugt sind.

Beispiel 1.2.2 1. Ein Hauptidealring ist ein noetherscher Ring (alle Ideale sind von einem Element erzeugt).

2. Insbesondere sind $\mathbb{Z}$ und $\mathsf{k}[X]$ noethersche Ringe.

Satz 1.2.3 Sei R ein kommutativer Ring. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. R ist ein noetherscher Ring.
2. Jede aufsteigende Kette $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$ von Idealen ist stationär *i.e.* es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $I_n = I_N$ für alle $n \geq N$.
3. Jede (nicht leere) Familie $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von Idealen hat ein maximales Element. □

Beweis. Siehe Vorlesung Algebra. Zur Erinnerung der Beweis.

(1. $\Rightarrow$ 2.) Sei $I = \bigcup_n I_n$. Dann ist I ein Ideal: Seien $a, b \in I$, dann gibt es n, m mit $a \in I_n$ und $b \in I_m$. Ohne Einschränkung können wir annehmen $n \leq m$. Also $a \in I_n \subset I_m$ und $a + b \in I_m \subset I$. Sei jetzt $c \in R$. Dann gilt $ac \in I_n$, also $ac \in I$.

Da R noethersch ist, gibt es Elemente $a_1, \ldots, a_k \in R$ mit $I = (a_1, \ldots, a_k)$. Per Definition von I gibt es Zahlen n_i mit $a_i \in I_{n_i}$ für jedes i. Sei $N = \max_i\{n_i\}$. Dann gilt $a_i \in I_{n_i} \subset I_N$ für jedes i. Daraus folgt $I = (a_1, \ldots, a_k) \subset I_N$ und damit $I = I_N$. Es folgt $I_n \subset I = I_N$ für alle n und $I_n = I_N$ für alle $n \geq N$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Angenommen, die Familie $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ habe kein maximales Element. Wir konstruieren per Induktion nach n ein nicht stationäre aufsteigende Kette von Idealen. Sei $I_1 := I_{\lambda_1}$ ein Element in der Familie. Da I_1 nicht maximal ist, gibt es ein $\lambda_2 \in \Lambda$ mit $I_1 \subsetneq I_2 := I_{\lambda_2}$. Sei die Kette $I_1 \subsetneq \ldots \subsetneq I_n$ konstruiert. Da I_n kein maximales Element ist, gibt es ein $\lambda_{n+1} \in \Lambda$ mit $I_n \subsetneq I_{n+1} := I_{\lambda_{n+1}}$.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Sei I ein Ideal und $E = \{J \text{ endlich erzeugtes Ideal mit } J \subset I\}$. Da $(0) \subset E$, ist E eine nicht leere Familie von Idealen und hat also ein maximales Element J. Falls $J \subsetneq I$, gibt es ein $a \in I$ mit $a \notin J$. Dann ist $J + (a)$ endlich erzeugt und es gilt $J \subsetneq J + (a) \subset I$. Ein Widerspruch zur Maximalität. ■

Beispiel 1.2.4 3. Der Ring $R = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$ mit unendlich vielen Unbekannten ist nicht noethersch: es gibt eine nicht stationäre, unendlich aufsteigende Kette von Idealen: $(0) \subsetneq (X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \ldots \subsetneq (X_1, \ldots, X_n) \subsetneq \ldots$

Theorem 1.2.5 Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist $R[X]$ auch noethersch. □

Beweis. Sei I ein Ideal von $R[X]$ und sei

$$D = \{0\} \cup \{a \in R \mid \exists\ P \in I \text{ mit Leitkoeffizient } a\}.$$

Wir zeigen, dass D ein Ideal in R ist. Seien $a, a' \in D$ mit $a + a' \neq 0$ und sei $b \in R$. Dann gibt es Polynome $P, Q \in I$ mit Leitkoeffizienten a und a'. Sei $k = \min(\deg P, \deg Q)$. Da I ein Ideal ist, gilt $T = X^{\deg Q - k} P + X^{\deg P - k} Q \in I$ (es gilt $\deg(T) = \max(\deg(P), \deg(Q)))$ und T hat Leitkoeffizient $a + a'$, also $a + a' \in D$. Es gilt auch $bP \in I$ mit Leitkoeffizient ab, also $ab \in D$ und D ist ein Ideal.

Da R noethersch ist, ist D endlich erzeugt, also gibt es Elemente $a_1, \ldots, a_r \in R$ mit $D = (a_1, \ldots, a_r)$. Für $i \in [1, r]$ sei $P_i \in I$ mit Leitkoeffizient a_i und sei $d_i = \deg P_i$. Wir setzen $d = \max(d_1, \ldots, d_r)$.

Für $m \leq d$ setzen wir

$$D_m = \{0\} \cup \{a \in R \mid \exists\ P \in I \text{ mit } \deg(P) \leq m \text{ und Leitkoeffizient } a\}.$$

Wie oben zeigt man, dass D_m ein Ideal in R ist. Das Ideal D_m ist also auch endlich erzeugt: $D_m = (b_{1,m}, \ldots, b_{r_m,m})$. Für alle $m \leq d$ und alle $i \in [1, r_m]$ seien $Q_{i,m} \in I$ mit $\deg(Q_{i,m}) \leq m$ und Leitkoeffizient $b_{i,m}$.

Wir zeigen, dass das Ideal I von $P_1, \ldots, P_r$ und allen $(Q_{i,m})_{m \leq d, i \in [1,r_m]}$ erzeugt wird. Sei I' das von diesen Elementen erzeugte Ideal. Es gilt $I' \subset I$. Angenommen, es gelte $I' \subsetneq I$, sei $P \in I \setminus I'$ mit minimalem Grad.

Falls $\deg P > d$, sei a der Leitkoeffizient von P. Es gilt $a \in D$, also $a = a_1c_1 + \ldots + a_rc_r$ mit $c_1, \ldots, c_r \in R$ und das Polynom

$$T = X^{\deg P - d_1} c_1 P_1 + \ldots + X^{\deg P - d_r} c_r P_r$$

hat a als Leitkoeffizienten. Falls $T = P$, gilt $P \in I'$; ein Widerspruch. Sonst gilt $P - T \in I \setminus I'$ mit $\deg(P - T) < \deg P$; ein Widerspruch zur Minimalität.

Falls $\deg P = m \leq d$, sei a der Leitkoeffizient von P. Es gilt $a \in D_m$, also $a = b_{1,m}c_1 + \ldots + b_{r_m,m}c_{r_m}$ mit $c_1, \ldots, c_{r_m} \in R$ und das Polynom

$$T = X^{m - \deg Q_{1,m}} c_1 Q_{1,m} + \ldots X^{m - \deg Q_{r_m,m}} c_{r_m} Q_{r_m,m}$$

hat a als Leitkoeffizienten. Falls $T = P$, gilt $P \in I'$; ein Widerspruch. Sonst gilt $P - T \in I \setminus I'$ mit $\deg(P - T) < \deg P$; ein Widerspruch zur Minimalität. ∎

Korollar 1.2.6 Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist $R[X_1, \ldots, X_n]$ auch noethersch.

Korollar 1.2.7 Der Ring $\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ ist noethersch.

Korollar 1.2.8 Sei $V(S)$ eine algebraische Menge. Dann gibt es Polynome $P_1, \ldots, P_r \in \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_r]$ so, dass

$$V(S) = V(P_1, \ldots, P_r).$$

Beweis. Es gilt $V(S) = V(\langle S \rangle)$ und da $\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch ist, ist $\langle S \rangle$ endlich erzeugt. Es gibt also $P_1, \ldots, P_r \in \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_r]$ so, dass $\langle S \rangle = (P_1, \ldots, P_r) = \langle \{P_1, \ldots, P_r\} \rangle$. Daraus folgt $V(S) = V(P_1, \ldots, P_r)$. ∎

1.3. Erste Eigenschaften

Lemma 1.3.1 Sei $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Teilmengen von $\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ und sei $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Idealen in $\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$. Dann gilt

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(S_\lambda) = V\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda\right) \text{ und } \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) = V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right).$$

Insbesondere ist der Schnitt von algebraischen Mengen eine algebraische Menge. □

Beweis. Übung. ■

Definition 1.3.2 Sei R ein kommutativer Ring und seien I, J zwei Ideale von R. **Das Produktideal** IJ von I und J ist das von allen Produkte ab erzeugte Ideal, wobei $a \in I$ und $b \in J$.

Bemerkung 1.3.3 Es gilt $IJ \subset I \cap J$: Für $a \in I$ und $b \in J$ gilt $ab \in I \cap J$.

Lemma 1.3.4 Seien I und J zwei Ideale in $\mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$. Dann gilt

$$V(I \cap J) = V(I) \cup V(I) = V(IJ).$$

Insbesondere ist die Vereinigung von algebraischen Mengen eine algebraische Menge.□

Beweis. Es gilt $IJ \subset I \cap J \subset I, J$. Daraus folgt $V(IJ) \supset V(I \cap J) \supset V(I) \cup V(J)$. Es genügt also, die Enthaltung $V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$ zu zeigen.

Sei $x \in V(IJ)$ mit $x \notin V(I)$. Es gibt also $P \in I$ mit $P(x) \neq 0$. Sei $Q \in J$, dann gilt $PQ \in IJ$, also $P(x)Q(x) = (PQ)(x) = 0$, weil $x \in V(IJ)$. Da $P(x) \neq 0$, folgt $Q(x) = 0$ für alle $Q \in J$, also $x \in V(J)$. ■

Korollar 1.3.5 Seien $I_1, \dots, I_r$ Ideale in $\mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$. Dann gilt

$$V(I_1) \cup \ldots \cup V(I_r) = V(I_1 \cdots I_r) = V(I_1 \cap \cdots \cap I_r).$$

Insbesondere ist eine endliche Vereinigung von algebraischen Mengen eine algebraische Menge.

Beweis. Folgt per Induktion nach dem obigen Lemma. ■

Korollar 1.3.6 Jede endliche Menge von $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ ist eine algebraische Menge.

Beweis. Jeder Punkt ist eine algebraische Menge nach Beispiel 1.1.4.(2). Nach dem obigen Korollar ist jede endliche Vereinigung von algebraischen Menge eine algebraische Menge. Daraus folgt die Behauptung. ■

Definition 1.3.7 Sei $P \in \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$ mit $P \neq 0$. Die **Hyperfläche von** $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ **der Gleichung** P ist die algebraische Teilmenge $V(P)$.

Proposition 1.3.8 Jede algebraische Menge ist endlicher Schnitt von Hyperflächen in $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$.

Beweis. Sei $S \subset \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$ und $V(S)$ die zugehörige algebraische Menge. Nach Korollar 1.2.8 gibt es Polynome $P_1, \dots, P_r \in \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$ mit $V(S) = V(P_1, \dots, P_r)$. Nach Lemma 1.3.1 folgt $V(S) = V(P_1) \cap \ldots \cap V(P_r)$, also ist $V(S)$ endlicher Schnitt von Hyperflächen. ■

1.4. Ideal einer Menge

Definition 1.4.1 Sei V eine Teilmenge von $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. **Das Ideal von** V ist die Menge

$$I(V) = \{P \in \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n] \mid P(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}.$$

Lemma 1.4.2 Sei $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Dann ist $I(V)$ ein Ideal von $\mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$. □

Beweis. Übung. ■

Beispiel 1.4.3 Es gilt $I(\emptyset) = \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$.

Lemma 1.4.4 Seien $V \subset W \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Dann gilt $I(V) \supset I(W)$. □

Beweis. Übung. ■

Lemma 1.4.5 Sei $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$.

1. Dann gilt $V \subset V(I(V))$.

2. Es gilt (V ist eine algebraische Menge $\Leftrightarrow V(I(V)) = V$). □

Beweis. 1. Sei $x \in V$ und $P \in I(V)$. Dann gilt $P(x) = 0$, also $x \in V(I(V))$. Daraus folgt $V \subset V(I(V))$.

2. Ist V algebraisch, so gilt $V = V(I)$ für ein Ideal $I \subset \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$. Sei $P \in I$. Dann gilt $P(x) = 0$ für alle $x \in V$, also $P \in I(V)$. Daraus folgt $I \subset I(V)$. Es folgt $V = V(I) \supset V(I(V))$.

Umgekehrt, falls $V = V(I(V))$, ist V algebraisch. ■

Beispiel 1.4.6 Ist V nicht algebraisch, ist die zweite Aussage im obigen Lemma immer falsch. Zum Beispiel sei

$$V = \{x \in \mathbb{R} = \mathbb{A}_1(\mathbb{R}) \mid 0 < x < 1\}.$$

Dann gilt $I(V) = \{0\}$: Sei $P \in I(V) \subset \mathbb{R}[X]$. Dann hat P unendlich viele Nullstellen, also $P = 0$. Es gilt aber $V(I(V)) = \mathbb{A}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \supsetneq V$.

Lemma 1.4.7 Sei $I \subset \mathsf{k}[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Dann gilt $I \subset I(V(I))$. □

Beweis. Sei $P \in I$ und $x \in V(I)$. Dann gilt $P(x) = 0$, also $P \in I(V(I))$. ■

Beispiel 1.4.8 Die umgekehrte Enthaltung ist nicht immer wahr. Es gibt zwei Hauptgründe dafür.

1. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, kann $V(I)$ sehr (zu) klein sein: Sei $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ und $I = (X^2 + Y^2 + 1)$. Es gilt $V(I) = V(X^2 + Y^2 + 1) = \emptyset$ und folglich $I \subsetneq \mathbb{R}[X, Y] = I(V(I))$.

2. Die Operation *sieht die Potenzen nicht*: für $I = (X^2) \subset \mathsf{k}[X]$ gilt $V(I) = \{0\}$ und $I(V(I)) = (X) \supsetneq (X^2) = I$.

Die Beziehung zwischen I und $I(V(I))$ ist wichtig und wird später nochmal betrachtet.

Proposition 1.4.9 Sei k unendlich und $n \geq 1$. Dann gilt $I(\mathbb{A}_n(\mathsf{k})) = (0)$.

Beweis. Wir zeigen $I(\mathbb{A}_n(\mathsf{k})) = (0)$ per Induktion nach n.

Fall $n = 1$. Sei $P \in I(\mathbb{A}_1(\mathsf{k}))$. Da k unendlich ist, hat P unendlich viele Nullstellen. Daraus folgt $P = 0$.

Induktionsschritt. Wir betrachten P als Polynom in X_n mit Koeffizienten im Ring $\mathsf{k}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$:

$$P = \sum_i r_i X_n^i,$$

wobei $r_i \in \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Sei $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathsf{k}^{n-1}$. Dann ist

$$P_{a_1,\ldots,a_{n-1}}(X_n) = P(a_1, \ldots, a_{n-1}, X_n) = \sum_i r_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) X_n^i$$

ein Polynom in $\mathsf{k}[X_n]$. Für alle $a_n \in \mathsf{k}^n$ gilt $P_{a_1,\ldots,a_{n-1}}(a_n) = P(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Also $P_{a_1,\ldots,a_{n-1}} = 0$ *i.e.* $r_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$ für alle i und alle $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathsf{k}^{n-1}$. Es folgt $r_i \in I(\mathbb{A}_{n-1}(\mathsf{k}))$ für alle i. Nach Induktion gilt $r_i = 0$ für alle i und damit $P = 0$. ∎

Beispiel 1.4.10 Die obige Proposition ist für endliche Körper falsch: Sei $\mathsf{k} = \mathbb{F}_q$, dann gilt $X^q - X \in I(\mathbb{A}_1(\mathsf{k}))$.

Beispiel 1.4.11 1. Sei $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Dann gilt

$$I(\{a\}) = (X - a_1, \ldots, X - a_n).$$

Die Enthaltung $\supset$ ist klar. Umgekehrt, sei $P \in I(\{a\})$, also $P \in \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ mit $P(a) = 0$. Wir betrachten die Restdivision von P mit $X - a_1$. Es gilt $P = (X - a_1)Q_1 + R_1$ mit $R_1 \in \mathsf{k}[X_2, \ldots, X_n]$ und $0 = P(a) = R_1(a)$. Per Induktion dank der Restdivision gilt $P = Q + r$ mit $Q \in (X - a_1, \ldots, X - a_n)$ und $r \in \mathsf{k}$. Aus $P(a) = 0$ folgt $r = 0$ und damit die Aussage.

2. Sei k unendlich und sei $I = I(V(Y^2 - X^3)) \in \mathsf{k}[X, Y]$. Es gilt $(Y^2 - X^3) \subset I$. Umgekehrt, sei $P \in I$. Wir betrachten die Restdivision von P mit $Y^2 - X^3$. Es

gibt also $Q, R \in \mathsf{k}[X,Y]$ mit $\deg_Y(R) < 2$, also $R(X,Y) = A(X)Y + B(X)$ für $A, B \in \mathsf{k}[X]$ so, dass

$$P = (Y^2 - X^3)Q(X,Y) + A(X)Y + B(X).$$

Für $t \in \mathsf{k}$ gilt $(t^3, t^2) \in V(Y^2 - X^3)$. Daraus folgt $P(t^3, t^2) = 0$ und somit $A(t^2)t^3 + B(t^2) = 0$. Wir schreiben $A(X) = \sum_k a_k X^k$ und $B(X) = \sum_j b_j X^j$. Daraus folgt

$$\sum_k a_k t^{2k+3} + \sum_j b_j t^{2j} = 0.$$

Da k unendlich ist, müssen alle Koeffizienten null sein, also $a_k = 0$ und $b_j = 0$ für alle k und j. Es folgt $A = B = 0$ und $P \in (Y^2 - X^3)$.

1.5. Reguläre Funktionen

Definition 1.5.1 Sei $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Die k-Algebra $\Gamma(V) = \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$ heißt **affine Algebra von** V oder **Algebra regulärer Funktionen auf** V.

Definition 1.5.2 Ein Ring R heißt **reduziert**, falls für alle $a \in R$ folgende Aussage gilt: (a nilpotent $\Rightarrow a = 0$).

Proposition 1.5.3 Sei $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Der Ring $\Gamma(V)$ ist reduziert.

Beweis. Sei $P \in \mathsf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ so, dass $[P] \in \Gamma(V)$ nilpotent ist. Es gilt also $P^n \in I(V)$, also $P^n(x) = 0$ für alle $x \in V$. Daraus folgt $P(x) = 0$ für alle $x \in V$ und damit $P \in I(V)$ *i.e.* $[P] = 0$. ■

Definition 1.5.4 Sei R ein Ring.

1. Sei I ein Ideal in R. **Das Radikal von** I ist

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ mit } a^k \in I\}.$$

2. **Das Nilradikal von** R ist $\sqrt{(0)}$.

Lemma 1.5.5 Sei R ein Ring und I ein Ideal in R.

1. Dann ist $\sqrt{I}$ ein Ideal in R.
2. Es gilt $I \subset \sqrt{I}$.
3. Es gilt (R/I reduziert $\Leftrightarrow I = \sqrt{I}$). □

Beweis. 1. Seien $a, b \in \sqrt{I}$. Dann gibt es k, l mit $a^k, b^l \in I$. Wir betrachten

$$(a+b)^{k+l} = \sum_{i=0}^{k+l} \binom{k+l}{i} a^i b^{k+l-i}.$$

Für $i \geq k$ gilt $a^i b^{k+l-i} = a^{i-k} a^k b^{k+l-i} \in I$ (weil $a^k \in I$). Für $i \leq k$ gilt $a^i b^{k+l-i} = a^i b^l b^{k-i} \in I$ (weil $b^l \in I$). Daraus folgt $(a+b)^{k+l} \in I$ und damit $a + b \in \sqrt{I}$.

Sei $a \in \sqrt{I}$ und $c \in R$. Dann gibt es k mit $a^k \in I$, also $(ac)^k = a^k c^k \in I$. Daraus folgt $ac \in \sqrt{I}$.

2. Klar.

3. ($\Rightarrow$) Sei $a \in \sqrt{I}$ und k mit $a^k \in I$. Dann gilt $[a]^k = 0 \in R/I$. Daraus folgt $[a] = 0$, also $a \in I$.

($\Leftarrow$) Sei $a \in R$ mit $[a]$ nilpotent. Es gibt ein k mit $[a]^k = 0$, also $a^k \in I$. Es folgt $a \in \sqrt{I} = I$, also $[a] = 0$. ∎

Bemerkung 1.5.6 Das Nilradikal ist die Menge aller nilpotenten Elementen. Diese Menge ist also ein Ideal.

Korollar 1.5.7 Sei $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Dann gilt $I(V) = \sqrt{I(V)}$.

2. Zariski Topologie

2.1. Topologie

Zur Erinnerung werden wir hier die Definition einer Topologie wiederholen.

Definition 2.1.1 Sei X eine Menge. Eine **Topologie** auf X ist ein Mengesystem $\mathcal{T}$ bestehend aus Teilmengen von X, für die die folgenden Axiome erfüllt sind:

(T1) Die leere Menge $\emptyset$ und X sind Elemente aus $\mathcal{T}$,

(T2) Der Durchschnitt endlich vieler Elementen aus $\mathcal{T}$ ist Element aus $\mathcal{T}$,

(T3) Die Vereinigung beliebig vieler Elementen aus $\mathcal{T}$ ist Element aus $\mathcal{T}$.

Die Elemente aus $\mathcal{T}$ heißen **offene Teilmengen**. Eine Teilmenge F von X heißt **abgeschlossen** falls das Komplement F^c offen ist. Eine Menge X mit einer Topologie $\mathcal{T}$ heißt **topologischer Raum**.

Lemma 2.1.2 Sei X ein topologischer Raum mit der Topologie $\mathcal{T}$. Sei Y eine Teilmenge von X. Dann definiert das Mengesystem $\mathcal{T}_\mathcal{Y} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf Y. □

Beweis. Übung. ■

Definition 2.1.3 Sei X ein topologischer Raum mit der Topologie $\mathcal{T}$. Sei Y eine Teilmenge von X. Die Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{Y} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$ auf Y heißt **induzierte Topologie**.

Definition 2.1.4 Sei X ein topologischer Raum. Eine **offene Überdeckung** von X ist eine Familie $(U)_{U \in \mathcal{U}}$ von offene Teilmengen so, dass

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Lemma 2.1.5 Sei X ein topologischer Raum und sei $(U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine offene Überdeckeung.

Eine Teilmenge $Z \subset X$ ist genau dann offen (bzw. abgeschlossen), wenn $Z \cap U$ offen (bzw. abgeschlossen) in U (mit der induzierten Topologie) ist, für alle $U \in \mathcal{U}$. □

Beweis. Wir geben einen Beweis für offene Teilmenge. Der Beweis für abgeschlossene Teilmengen ist analog.

Falls Z offen ist gilt $Z \cap U$ offen für alle $U \in \mathcal{U}$. Umgekehrt, falls $Z \cap U$ offen in U ist, für alle $U \in \mathcal{U}$. Dann ist $Z \cap U$ der Form $U \cap U'$ für eine offene Teilmenge U' von X also $U \cap Z = U \cap U'$ ist offen in X. Es gilt aber

$$Z = Z \cap X = Z \cap \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \right) = \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} Z \cap U \right).$$

Daraus folgt, dass Z offen in X ist. ∎

2.2. Die Zariski-Topologie

Bemerkung 2.2.1 Man kann auch eine Topologie $\mathcal{T}$ dank der Angabe des Mengensystems aller abgschlossenen Teilmengen definitieren: Sei $\mathcal{T}'$ ein Mengesystem bestehend aus Teilmengen von M, für die die folgenden Axiome erfüllt sind:

(T'1) Die leere Menge $\emptyset$ und M sind Elemente aus $\mathcal{T}'$,

(T'2) Die Vereinigung endlich vieler Elementen aus $\mathcal{T}'$ ist Element aus $\mathcal{T}'$,

(T'3) Der Durchschnitt beliebig vieler Elementen aus $\mathcal{T}'$ ist Element aus $\mathcal{T}'$.

Dann Definiert das System $\mathcal{T}$ aller Komplemente von Elementen aus $\mathcal{T}'$ eine Topologie auf M *i.e.* erfüllt die Axiome (T1), (T2) und (T3).

Bemerkung 2.2.2 Sei $\mathcal{T}'$ das Mengesystem aller algebraischen Mengen in $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Nach Beispiel 1.1.2, Lemma 1.3.1 und Korollar 1.3.5 erfüllt $\mathcal{T}'$ die Axiome (T'1), (T'2) und (T'3) und definiert also eine Topologie.

Definition 2.2.3 **Die Zariski-Topologie** auf $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ ist die Topologie deren abgeschlossenen Teilmengen die algebraischen Mengen sind.

Definition 2.2.4 Sei V eine Teilmenge von $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. **Die Zariski-Topologie auf** V ist die, von der Zariski-Topologie, induzierte Topologie auf V.

Bemerkung 2.2.5 Man sollte hier aufpassen: die Zariski-Topologie ist viel anders als die übliche Topologie: die offene Teilmengen sind *größer* und die abgeschlossene Teilmengen sind *kleiner*.

Zum Beispiel, nach Lemma 1.1.3 sind die Abgeschlossene Teilmengen in $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ nur $\emptyset$, $\mathbb{R}$ und die endliche Teilmegen. Ein nicht leeres offenes Intervall wie $]0, 1[$ is weder abgeschlossen noch offen.

Lemma 2.2.6 Sei $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Dann gilt (für die Zariski-Topologie)

$$\overline{V} = V(I(V)).$$

Beweis. Es gilt $V \subset V(I(V))$ und da $V(I(V))$ algebraisch ist, ist es abgeschlossen. Daraus folgt $\overline{V} \subset V(I(V))$. Sei Z abgeschlossen mit $V \subset Z$. Dann gilt $Z = V(I(Z))$ und $I(V) \supset I(Z)$. Daraus folgt $V(I(V)) \subset V(I(Z)) = Z$. Also ist $V(I(V))$ die minimale abgeschlossene Teilmenge die V enthält *i.e.* $\overline{V} = V(I(V))$. ■

Definition 2.2.7 Sei $P \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Das Komplement der Hyperfläche $V(P)$ heißt **die von P definierte standardmäßige offene Teilmenge** und ist $D(P)$ bezeichnet:

$$D(P) = \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \setminus V(P).$$

Proposition 2.2.8 Eine offene Teilmenge (in der Zariski-Topologie) ist eine endliche Vereinigung von standardmäßigen offenen Teilmengen.

Beweis. Sei U eine offene Teilmengen. Dann ist $\mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \setminus U$ abgeschlossen also eine algebraische Menge der Form $V(S)$. Nach Korollar 1.2.8 gilt es Polynome $P_1, \cdots, P_r \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ mit $V(S) = V(P_1, \cdots, P_r)$. Nach Lemma 1.3.1 folgt $V(S) = V(P_1) \cap \cdots \cap V(P_r)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \setminus V(S) = \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \setminus (V(P_1) \cap \cdots \cap V(P_r)) \\ &= (\mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \setminus V(P_1)) \cup \cdots \cup (\mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \setminus V(P_r)) = D(P_1) \cup \cdots \cup D(P_r) \end{aligned}$$

und die Aussage folgt. ■

2.3. Irreduzibilität

Lemma 2.3.1 Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

1. Falls $X = F_1 \cup F_2$ mit F_1 und F_2 abgeschlossen, gilt $X = F_1$ oder $X = F_1$.
2. Falls U_1 und U_2 offen in X sind mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, gilt $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$. □

Beweis. Setze $U_i = F_i^c$ oder $F_i = U_i^c$ für $i \in [1, 2]$. ■

Definition 2.3.2 Sei X ein topologischer Raum mit $X \neq \emptyset$.

1. Wenn X eine von den beiden äquivalenten Eigenschaften 1. oder 2. aus Lemma 2.3.1 erfüllt, heißt **irreduzibel**.

Falls X nicht irreduzibel ist heißt X **reduzibel**.

2. Sei Y eine Teilmenge von X. Dann heißt Y **irreduzibel** (bzw. **reduzibel**) falls Y so ist für die induzierte Tolopogie.

Beispiel 2.3.3 Für die klassische Topologie auf $\mathbb{R}$, eine abgeschlossene Teilmenge F von $\mathbb{R}$ mit der induzierten Topologie ist genau dann irreduzibel, wenn F nur einen Punkt enthält (Übung).

Definition 2.3.4 Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, falls gilt:

$$(U_1 \text{ und } U_2 \text{ offen mit } U_1 \cup U_2 = X \text{ und } U_1 \cap U_2 = \emptyset) \Rightarrow (U_1 = \emptyset \text{ oder } U_2 = \emptyset).$$

Lemma 2.3.5 Sei X ein irreduzibler topologischer Raum. Dann ist X zusammenhängend. □

Beweis. Seien U_1 und U_2 offene Teilmengen mit $U_1 \cup U_2 = X$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dann gilt $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$. ∎

Definition 2.3.6 Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge Y von X heißt **dicht** falls gilt $Y \cap U \neq \emptyset$ für alle nicht leere offene Teilmengen U von X.

Proposition 2.3.7 Sei X ein irreduzibler topologischer Raum und sei U eine nicht leere offene Teilmenge. Dann ist U dicht in X und irreduzibel.

Beweis. Sei U' eine weitere nicht leere offene Teilmenge. Falls $U \cap U' = \emptyset$ gilt, folgt $U = \emptyset$ oder $U' = \emptyset$. Ein Widerspruch.

Seien U_1 und U_2 offene Teilmengen von U mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dann sind auch U_1 und U_2 offene Teilmengen von X mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Es folgt $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$. ∎

Proposition 2.3.8 Sei X ein topologischer Raum und sei Y eine Teilmenge.

1. Falls Y irreduzibel ist, dann ist $\overline{Y}$ (der Abschluss) irreduzibel.

2. Sei U eine offene Teilmenge von X. Dann definieren die Abbildungen $Y \mapsto \overline{Y}$ und $Z \mapsto Z \cap U$ bijektionen zwischen $\{Y \subset U \mid Y \text{ abgeschlossen und irreduzibel in } U\}$ und $\{Z \subset X \mid Z \text{ abgeschlossen und irreduzibel in } X \text{ mit } Z \cap U \neq \emptyset\}$.

Beweis. 1. Seien F_1 und F_2 zwei abgeschlossene Teilmengen von $\overline{Y}$ mit $F_1 \cup F_2 = \overline{Y}$. Per Definition gibt es abgeschlossene Teilmengen Z_1 und Z_2 von X mit $F_i = Z_i \cap \overline{Y}$. Daraus folgt, dass F_1 und F_2 auch in X abgeschlossen sind. Also sind $F_1 \cap Y$ und $F_2 \cap Y$ in Y abgeschlossen und es gilt $Y = Y \cap \overline{Y} = Y \cap (F_1 \cup F_2) = (Y \cap F_1) \cup (Y \cap F_2)$. Da Y irreduzibel ist folgt $F_1 \cap Y = Y$ oder $F_2 \cap Y = Y$ also $Y \subset F_1$ oder $Y \subset F_2$. Daraus folgt $\overline{Y} \subset \overline{F_1} = F_1$ oder $\overline{Y} \subset \overline{F_2} = F_2$ also $\overline{Y} = F_1$ oder $\overline{Y} = F_2$.

2. Sei $Y \subset U$ abgeschlossen und irreduzibel. Dann ist $\overline{Y}$ abgeschlossen irreduzibel und $\emptyset \neq Y \subset \overline{Y} \cap U$ also nicht leer.

Sei Z abgeschlossen irreduzibel mit $Z \cap U \neq 0$. Dann ist $Y = Z \cap U$ offen in Z und abgeschlossen in U, nicht leer und nach Proposition 2.3.7 irreduzibel.

Die Abbildungen sind also wohl definiert und wir zeigen, dass sie inverse von einander sind.

Sei $Y \subset U$ abgeschlossen und irreduzibel. Es gilt $Y \subset U \cap \overline{Y}$. Umgekehrt, da Y abgeschlossen in U ist, gibt es ein F abgeschlossen in X mit $Y = F \cap U \subset F$. Es gilt also $\overline{Y} \subset F$ und $\overline{Y} \cap U \subset F \cap U = Y$. Daraus folgt $Y = \overline{Y} \cap U$.

Sei Z abgeschlossen in X, irreduzibel mit $Z \cap U \neq \emptyset$. Es gilt $Z \cap U \subset Z$ und da Z abgeschlossen ist, gilt $\overline{Z \cap U} \subset Z$. Sei $F = Z \setminus (Z \cap U)$. Dann ist F abgeschlossen in Z und es gilt $Z = F \cup \overline{Z \cap U}$. Da Z irreduzibel ist, folgt $F = \emptyset$ oder $\overline{Z \cap U} = \emptyset$. Die zweite Gleichung ist nicht möglich also $F = \emptyset$ und $Z = \overline{U \cap Z}$. ∎

Proposition 2.3.9 Sei V eine algebraische Menge mit der Zariski-Topologie. Dann gilt

$$V \text{ ist irreduzibel } \Leftrightarrow I(V) \text{ ist ein Primideal } \Leftrightarrow \Gamma(V) \text{ ist ein Integritätsring.}$$

Beweis. Die zweite Äquivalenz folgt aus der Vorlesung Algebra (Lemma 2.1.36.(1)). Angenommen V sei irreduzibel und seien $P_1, P_2 \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ mit $P_1P_2 \in I(V)$. Sei also $F_i = V(P_i)$ für $i \in \{1, 2\}$. Dann sind F_1 und F_2 abgeschlossen in V. Sei $x \in V$. Dann gilt $P_1(x)P_2(x) = (P_1P_2)(x) = 0$ also $P_1(x) = 0$ oder $P_2(x) = 0$. Daraus folgt $x \in V(P_1) = F_1$ oder $x \in V(P_2) = F_2$ *i.e.* $V = (V \cap F_1) \cup (V \cap F_2)$. Also es gilt $V \subset F_1 \cup F_2$. Da V irreduzibel ist, folgt $V \subset F_1 = V(P_1)$ oder $V \subset F_2 = V(P_2)$. Daraus folgt $P_1 \in I(V)$ oder $P_2 \in I(V)$.

Umgekehrt sei $I(V)$ prim aud seien F_1 und F_2 abgeschlossen in V mit $V = F_1 \cup F_2$. Falls $F_1 \subsetneq V$ und $F_2 \subsetneq V$ gilt $I(V) \subsetneq I(F_1)$ und $I(V) \subsetneq I(F_2)$ (sonnst gilt $V = V(I(V)) = V(I(F_i)) = F_i$ weil alle Mengen algebraische Mengen sind). Seien also $P_i \in I(F_i) \setminus I(V)$ für $i \in \{1, 2\}$. Es gilt $P_1P_2 \in I(F_1 \cup F_2) = I(V)$ aber $P_i \notin I(V)$ für $i \in \{1, 2\}$. Ein Widerspruch zu $I(V)$ Primideal. ∎

Korollar 2.3.10 Sei k unendlich. Dann ist $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ irreduzibel.

Beweis. Es gilt $I(\mathbb{A}_n(\mathsf{k})) = (0)$ und $\Gamma(\mathbb{A}_1(\mathsf{k})) = \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ ist ein Integritätsring. Daraus folgt die Aussage. ∎

Beispiel 2.3.11 Für k endlich ist $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ reduzibel: es ist die Vereinigung endlich vieler Punkten.

Korollar 2.3.12 (Fortsetzung algebraischer Gleichungen) Sei k unendlich und sei $V \subsetneq \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ eine algebraische Menge. Sei $P \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ mit $P(x) = 0$ für $x \notin V$. Dann gilt $P = 0$.

Beweis. Es gilt $\mathbb{A}_n(\mathsf{k}) = V(P) \cup V$. Da $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ irreduzibel ist und $V \subsetneq \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ gilt $V(P) = \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. ∎

Korollar 2.3.13 Seien $A, B \in M_n(\mathsf{k})$. Dann gilt $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Beweis. Sei $P(A, B) = \chi_{AB} - \chi_{BA}$. Es ist ein Polynom in den Koeffizienten von A und B. Für B invertierbar gilt $\chi_{AB} = \chi_{B(AB)B^{-1}} = \chi_{BA}$ also $P(A, B) = 0$ für B invertierbar. Da die Menge aller nicht invertierbaren Matrizen eine algebraische Menge ist (es ist $V(\det)$) folgt $P = 0$. ∎

2.4. Irreduzible Komponenten

Definition 2.4.1 Ein topologischer Raum X heißt **noethersch** falls jede absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen stationär ist *i.e.* für jede Kette

$$Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots \supset Z_r \supset \cdots$$

mit Z_r abgeschlossen, gibt es ein N so, dass $Z_r = Z_N$ für alle $r \geq N$.

Beispiel 2.4.2 Der Körper $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie ist nicht noethersch: die absteigende Kette $[0, \frac{1}{n}]$ von abgeschlossenen Teilmengen ist nicht stationär.

Lemma 2.4.3 Der Raum $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ mit der Zariski-Topologie ist noethersch. □

Beweis. Sei $Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots \supset Z_r \supset \cdots$ eine Kette von abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Dann gilt $Z_r = V(I(Z_r))$ und $I(Z_1) \subset I(Z_2) \subset \cdots \subset I(Z_r) \subset \cdots$ in eine Kette von Idealen in $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Da dieser Ring noethersch ist folgt, dass es ein N gibt mit $I(Z_r) = I(Z_N)$ für $r \geq N$. Es folgt $Z_r = V(I(Z_r)) = V(I(Z_N)) = Z_N$ für $r \geq N$. ■

Lemma 2.4.4 Sei X ein noetherscher topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist Y auch noethersch für die induzierte Topologie. □

Beweis. Sei $Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots \supset Z_r \supset \cdots$ eine Kette von abgeschlossenen Teilmengen von Y. Für jedes r, sei F_r abgeschlossen in X mit $Z_r = Y \cap F_r$. Wir setzen $Z'_r = F_1 \cap \cdots \cap F_r$. Dann ist $Z'_1 \supset Z'_2 \supset \cdots \supset Z'_r \supset \cdots$ eine Kette von abgesclossenen Teilmengen von X. Es gibt also ein N mit $Z'_r = Z'_N$ für $r \geq N$. Es gilt aber

$$Z_r = Z_1 \cap \cdots \cap Z_r = (Y \cap F_1) \cap \cdots \cap (Y \cap F_r) = Y \cap (F_1 \cap \cdots \cap F_r) = Y \cap Z'_r.$$

Daraus folgt $Z_r = Y \cap Z'_r = Y \cap Z'_N = Z_N$. ■

Korollar 2.4.5 Jede teilmenge von $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ ist für die Zariski-Topologie noethersch.

Definition 2.4.6 Sei X ein topologischer Raum. Eine **irreduzible Komponente** von X ist eine maximale (für die Enthaltung) irreduzible abgeschlossene Teilmenge von X.

Beispiel 2.4.7 1. Sei k endlich und $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Dann sind die Punkte von V die irreduzible Komponente von V.

2. Sei k unendlich und $V = V(XY) \subset \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$. Dann sind $V(X)$ und $V(Y)$ die irreduzible Komponente von V: sei Z eine irreduzible Komponente. Dann ist Z irreduzibel, abgeschlossen in V und maximal. Daraus folgt, dass $I(V) \subset I(Z)$ gilt, dass $I(Z)$ ein Primideal ist und minimal für diese Eigenschaften. Es folgt $XY \in I(Z)$ also $(X) \subset I(Z)$ oder $(Y) \subset I(Z)$, $I(Z)$ ist ein Primideal und ist minimal. Da (X) und (Y) Primidealen sind folgt $I(Z) = (X)$ oder $I(Z) = (Y)$ also $Z = V(X)$ oder $Z = V(Y)$.

Proposition 2.4.8 Sei $X \neq \emptyset$ ein noetherscher topologischer Raum. Dann hat X nur endlich viele irreduzible Komponente $X_1, \cdots, X_r$ und es gilt $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$.

Beweis. Für Y eine Teilmenge von X definieren wir die Eigenschaft (P) durch: Y erfüllt (P) falls Y eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen von Y ist. Wir Zeigen, dass X die Eigenschaft (P) erfüllt.

Sei $M = \{Y \subset X \mid Y \text{ ist nicht leer, abgeschlossen aber erfüllt nicht (P)}\}$. Wir zeigen, dass M leer ist. Daraus folgt, dass X die Eigenschaft (P) erfüllt. Angenommen M sei nicht leer. Da X noethersch ist, gibt es ein minimales Element in M: wähle $Z_1 \in M$. Falls Y minimal ist sind wir fertig. Sonnst gibt es ein $Z_2 \subsetneq Z_1$ mit $Z_2 \in M$. Dann muss ein Z_r minimal sein: sonnst ist die Kette $Z_1 \supset \cdots \supset Z_r \supset \cdots$ nicht stationär. Sei also Z minimal in M.

Es gilt $Z \neq \emptyset$ und Z ist nicht irreduzibel. Daraus folgt, dass es zwei echte nicht leere abgeschlossene Teilmengen F_1 und F_2 von Z (oder X) gibt mit $Z = F_1 \cup F_2$. Nach minimalität gilt $F_1, F_2 \notin M$ also F_1 (bzw. F_2) ist eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von F_1 (bzw. F_2). Daraus folgt aber, dass Z so eine Vereinigung ist. Ein Widerspruch.

Es gibt also endlich viele abgeschlossene irreduzible Teilmenge $X_1, \cdots, X_r$ von X so, dass $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$. Wir zeigen, dass jede irreduzible Teilmenge Y von X in einem X_i enhalten ist. Es gilt

$$Y = Y \cap Y = Y \cap (X_1 \cup \cdots \cup X_r) = (Y \cap X_1) \cup \cdots \cup (Y \cap X_r).$$

Alle $Y \cap X_i$ sind abgeschlossen und Y ist irreduzibel. Daraus folgt, dass es ein i gibt mit $Y \subset X_i$. Die maximale Elemente der Familie $(X_i)_{i \in [1,r]}$ sind die irreduzible Komponente von X. ■

Korollar 2.4.9 Jede algebraische Menge V hat endlich viele verschiedene irreduzible Komponente $V_1, \cdots, V_r$ und es gilt $V = V_1 \cup \cdots \cup V_r$.

Beweis. Da $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ noethersch ist, ist auch V noethersch. Die Aussage folgt aus dem Proposition. ■

2.5. Kompakte und Haudorff Räume

Definition 2.5.1 Ein Topologischer Raum X heißt **Hausdorff** falls gilt: für $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ gibt es offene Umgebungen U und U' von x und x' (*i.e.* offene Teilmengen U und U' mit $x \in U$ und $x' \in U'$) so, dass $U \cap U' = \emptyset$.

Lemma 2.5.2 Sei V eine algebraische Menge die unendlich viele Punkte enthält. Dann ist V nicht Hausdorff. □

Beweis. Da V nur endlich viele irreduzible Komponente hat, kann man ohne Einschänkung V irreduzibel annehmen. Seien $x, x' \in V$ mit $x \neq x'$. Die Bedingung, dass es offene Umgebungen U und U' von x und x' gibt mit $U \cap U' = \emptyset$ ist ein Widerspruch zur Irreduzibilität. ∎

Beispiel 2.5.3 Für V endlich sind die Punkte von V offen und abgeschlossen also die Punkte von V sind die zusammenhängende Komponente und V ist Hausdorf.

Definition 2.5.4 Sei X ein topologischer Raum.

1. Falls es für jede offene Überdeckung $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine endliche Teilüberdeckung $(U_{\lambda_i})_{i\in[1,r]}$ gibt, heißt X **quasi-kompakt**.

2. Falls X Hausdorff und quasi-kompakt ist, heißt X **kompakt**.

Lemma 2.5.5 Ein topologischer Raum X ist genau dann quasi-kompakt, wenn für jede Familie von abgeschlossenen Teilmengen $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ mit

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset$$

gibt es eine endliche Teilfamilie $(F_{\lambda_i})_{i\in[1,r]}$ mit

$$\bigcap_{i=1}^{r} F_{\lambda_i} = \emptyset.$$

Beweis. Setze $U_\lambda = F_\lambda^c$. ∎

Definition 2.5.6 Sei $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und sei $P \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Die offene Teilmenge $D(P) \cap V$ von V heißt **die von P definierte standardmäßige offene Teilmenge von V** und ist $D_V(P)$ berzeichnet.

Proposition 2.5.7 Sei V eine algebraische Menge.

1. Jede offene Teilmenge von V ist eine endliche Vereinigung von standardmäßigen offenen Teilmengen von V.

2. Der topologischer Raum V ist quasi-kompakt.

Beweis. 1. Sei U offen in V und U' offen in $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ mit $U = V \cap U'$. Da es endliche viele Polynome $P_1, \cdots, P_r$ gibt mit $U' = D(P_1) \cup \cdots \cup D(P_r)$ folgt die Gleichung $U = D_V(P_1) \cup \cdots \cup D_V(P_r)$.

2. Sei $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von offenen Teilmengen von V mit

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = V.$$

Nach 1. können wir annehmen, dass alle U_λ standardmäßige offene Teilmengen sind also $U_\lambda = D_V(P_\lambda)$ für ein $P_\lambda \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Sei $I = (P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$. Da $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ noethersch ist gibt es eine Teilfamilie $P_{\lambda_1}, \cdots, P_{\lambda_r}$ so, dass $I = (P_{\lambda_1}, \cdots, P_{\lambda_r})$.

Wir Zeigen, $V = D_V(P_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup D_V(P_{\lambda_r})$. Sei also $x \in V \setminus (D_V(P_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup D_V(P_{\lambda_r}))$. Es gilt also $P_{\lambda_i}(x) = 0$ für alle $i \in [1, r]$. Es gibt aber ein $\lambda \in \Lambda$ mit $P_\lambda(x) \neq 0$. Aber $P_\lambda \in I$ und es gibt Polynome $Q_1, \cdots, Q_r$ mit $P_\lambda = \sum_{i=1}^r Q_i P_{\lambda_i}$. Daraus folgt $P_\lambda(x) = 0$. Ein Widerspruch. ∎

Beispiel 2.5.8 Sei $X = \mathbb{R}$.

1. X ist Hausdorff aber nicht quasi-kompakt für die übliche Topologie.

2. X ist nicht Hausdorff aber quasi-kompakt für die Zariski Topologie.

3. Nullstellensatz

3.1. Ganze Elemente

Definition 3.1.1 Sei A ein Ring und A' ein Unterring von A.

1. Ein Element $a \in A$ heißt **ganz über** A', wenn es ein Polynom $P \in A'[X]$ gibt mit Leitkoeffizient 1 so, dass $P(a) = 0$.

2. Der Ring A heißt **endlich über** A', wenn es endlich viele Elemente $(a_1, \cdots, a_n)$ von A gibt so, dass jedes Element von A als lineare Kombination von $(a_1, \cdots, a_n)$ mit Koeffizienten in A' darstellbar ist.

Beispiel 3.1.2 1. Sei $a \in A'$. Dann ist a ganz über A': Das Polynom $P = X - a \in A'[X]$ hat Leitkoeffizient 1 und erfüllt $P(a) = 0$.

2. Eine razionale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ ist genau dann ganz über $\mathbb{Z}$, wenn $a \in \mathbb{Z}$ (Übung).

3. Für $\mathsf{k} \subset K$ eine endliche Erweiterung ist der Ring K endlich über k.

Lemma 3.1.3 Sei A ein Ring und A' ein Unterring von A so, dass jedes Element $a \in A$ ganz über A' ist. Falls A ein Körper ist, ist auch A' ein Körper. □

Beweis. Sei $a \in A'$ mit $a \neq 0$. Dann ist a in A invertierbar. Sei also $b = \frac{1}{a}$ und sei $P = X^r + \alpha_{r-1}X^{r-1} + \cdots + \alpha_0 \in A'[X]$ so, dass $P(b) = 0$. Es gilt

$$\frac{1}{a^r} + \alpha_{r-1}\frac{1}{a^{r-1}} + \cdots + \alpha_0 = 0.$$

Nach Multiplikation mit a^{r-1} gilt:

$$\frac{1}{a} = -(\alpha_{r-1} + \cdots + \alpha_0 a^{r-1}) \in A'.$$

Also ist a auch in A' invertierbar. ∎

Zur Erinnerung aus der Vorlesung LAII.

Definition 3.1.4 Sei k ein Körper.

1. Eine **k-Algebra** ist ein k-Vektorraum A mit einer Verknüpfung $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto ab$ so, dass diese Abbildung k-bilinear ist.

2. Sei A eine k-Algebra und $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen aus A. Dann gibt es eine kleinste Unteralgebra von A die diese Elemente enthählt. Diese k-Algebra heßt **die von der Familie $(x_i)_{i \in I}$ erzeugte k-Algebra**.

3. Sei A eine k-Algebra. Elemente $(x_i)_{i \in I}$ von A so, dass A die von $(x_i)_{i \in I}$ erzeugte Algebra ist, heißen **Erzeuger von A**.

4. Eine k-Algebra heißt **endlich erzeugt**, falls es eine endliche Familie von Erzeuger gibt.

Bemerkung 3.1.5 Sei A eine k-Algebra und A' eine Unteralgebra. Seien $x_1, \cdots, x_n \in A$. Die von A' und $x_1, \cdots, x_n$ erzeugte Unteralgebra von A ist oft $A'[x_1, \cdots, x_n]$ bezeichnet und es gilt

$$A'[x_1, \cdots, x_n] = \{P(x_1, \cdots, x_n) \mid P \in A'[X_1, \cdots, X_n]\}.$$

Lemma 3.1.6 Sei A eine k-Algebra und sei A' eine Unteralgebra von A. Ein Element $a \in A$ ist genau dann ganz über A', wenn die von A' und a erzeugte Untergalgebra $A'[a]$ endlich über A' ist. □

Beweis. Sei $a \in A$ ganz über A' und sei $P \in A'[X]$ mit Leitkoeffizient 1 so, dass $P(a) = 0$. Sei $n = \deg(P)$. Dann ist a^n lineare Kombination von $(1, \cdots, a^{n-1})$ mit Koeffizienten in A'. Per Induktion folgt, dass alle a^k für $k \geq 0$ lineare Kombination von $(1, \cdots, a^{n-1})$ mit Koeffizienten in A' sind. Es folgt, dass $A'[a]$ endlich über A' ist (mit Erzeuger $(1, \cdots, a^{n-1})$).

Umgekehrt, seien $x_1, \cdots, x_n \in A'[a]$ so, dass jedes Element in $A'[a]$ als lineare Kombination von $(x_1, \cdots, x_n)$ mit Koeffizienten in A' darstellbar ist. Da $ax_i \in A'[a]$, gibt es Elemente $a_{i,j} \in A'$ mit $ax_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$. Sei M die Matrix $M = (a_{i,j})_{i,j \in [1,n]}$. Für $y \in A'[a]$ gibt es Elemente $(a_1, \cdots, a_n) \in A'$ mit $y = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Sei $Y = (a_1, \cdots, a_n)$. Es folgt, dass

$$ay = a \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i a x_i = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_i a_{i,j}) x_j.$$

Also für $Z = (\sum_i a_i a_{i,1}, \cdots, \sum_{i=1}^n a_i a_{i,n})$ gilt $Z = YM$. Sei P das charakteristische Polynom der Matrix M. Es gilt $P \in A'[X]$, weil die Koeffizienten von M in A' sind und P hat Leitkoeffizient 1. Wir zeigen $P(a) = 0$.

Es gilt $P(M) = 0$ (Satz von Cayley-Hamilton). Für $y \in A'[a]$, gilt $P(a)y \in A'[a]$ also können wir schreiben $P(a)y = \sum_i b_i x_i$: Sei $B = (b_1, \cdots, b_n)$. Analog wie oben gilt

$$YP(M) = B.$$

Da $P(M) = 0$ folgt $B = 0$ und $P(a)y = 0$ für alle $y \in A'[a]$. Für $y = 1$ gilt $P(a) = 0$. ■

Korollar 3.1.7 Sei A eine k-Algebra und A' eine Unteralgebra von A. Die Menge aller Elemente, die ganz über A' sind, ist eine Unteralgebra von A, die A' enthält.

Beweis. Sei A'' die Menge aller Elemente die ganz über A' sind. Wir wissen schon, dass $A' \subset A''$ gilt. Seien $a, b \in A''$ und seien $P, Q \in A'[X]$ mit Leitkoeffizient 1 so, dass $P(a) = 0 = Q(b)$. Sei $n = \deg(P)$ und $m = \deg(Q)$. Dann ist a^n eine lineare Kombination von $(1, \cdots, a^{n-1})$ mit Koeffizienten in A'. Analog ist b^m eine lineare Kombination von $(1, \cdots, b^{m-1})$ mit Koeffizienten in A'. Sei x Element in die von a und b erzeugte k-Unteralgebra. Dann ist x lineare Kombination von $(a^i b^j)_{i,j \geq 0}$ mit Koeffizienten in A' und auch lineare Kombination von $(a^i b^j)_{i \in [0,n-1], j \in [0,m-1]}$ mit Koeffizienten in A'. Die k-Algebra $A'[a, b]$ *i.e.* die von A', a und b erzeugte Unteralgebra von A ist über A' endlich. Es gilt also $A'[a, b] \subset A''$. Da $a - b, ab \in A'[a, b]$ folgt, dass A'' eine Unteralgebra ist. ■

3.2. Algebraische Version

Satz 3.2.1 (Nullstellensatz 1) Sei k ein Körper und sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. Falls A ein Körper ist, ist A eine endliche Erweiterung von k. □

Beweis. Seien $(x_1, \cdots, x_r)$ Erzeuger von A. Wir verfahren per Induktion nach r. Für $r = 0$ gilt $A = \mathsf{k}$ und die Aussage ist klar. Sei also $r \geq 1$ und sei $K = \mathsf{k}(x_1)$. Dann ist A eine K-Algebra, ist ein Körper und $(x_2, \cdots, x_r)$ erzeugen A. Nach Induktion muss A algebraisch über K sein. Also gibt es Polynome $P_2, \cdots, P_r \in K[X]$ mit Leitkoeffizient 1 so, dass $P_i(x_i) = 0$ für alle $i \in [2, r]$. Die Koeffizienten der Polynome sind der Form $\frac{Q(x_1)}{R(x_1)}$, wobei $Q, R \in \mathsf{k}[X]$. Sei F das Produkt aller Polynome R die als Nenner von Koeffizienten eines P_i auftauchen. Sei $a' = \frac{1}{F(x_1)}$ und sei $A' = \mathsf{k}[x_1, a']$ die von x_1 und a' erzeugte k-Unteralgebra von K. Es gilt also $P_i \in A'[X]$ für alle $i \in [2, r]$ und da $P_i(x_i) = 0$, sind die Elemente x_i ganz über A'. Da $(x_2, \cdots, x_n)$ Erzeuger von A über K sind, sind alle Elemente in der Algebra A ganz über A' (Korollar 3.1.7). Da A ein Körper ist muss auch A' ein Körper sein (Lemma 3.1.3)

Damit zeigen wir jetzt, dass x_1 algebraisch über k ist. Angenommen x_1 sei transzendent. Dann gilt $A' = \mathsf{k}[x_1, a'] = \mathsf{k}[x_1, \frac{1}{F(x_1)}]$. Wir zeigen, dass $x = 1 + x_1 F(x_1)$ kein Inverse in A' hat. Sei y ein Inverse von x in A'. Dann ist y der Form

$$y = \frac{P(x_1)}{F(x_1)^m},$$

wobei $P \in \mathsf{k}[X]$ und $m \in \mathbb{N}$. Sei m minimal so, dass es eine solche Darstellung gibt. Es gilt

$$1 = xy = (1 + x_1 F(x_1)) \frac{P(x_1)}{F(x_1)^m}.$$

Nach Multiplikation mit $F(x_1)^m$ gilt $(P(X)(1+F(X))-F(X)^m)(x_1) = P(x_1)(1+x_1F(x_1)) - F(x_1)^m = 0$. Da x_1 transzendent ist gilt $P(X)(1+XF(X)) = F(X)^m$. Da $F(X)$ und $1+XF(X)$ teilerfremd sind, folgt, dass $F(X)$ das Polynom $P(X)$ teilt. Es gilt also $P(X) = F(X)Q(X)$ für $Q \in \mathsf{k}[X]$. Daraus folgt

$$y = \frac{P(x_1)}{F(x_1)^m} = \frac{F(x_1)P(x_1)}{F(x_1)^m} = \frac{Q(x_1)}{F(x_1)^{m-1}}.$$

Ein Widerspruch zur Minimalität von m.

Das Element x_1 ist also algebraisch über k. Die Erweiterung $\mathsf{k} \subset K = \mathsf{k}(x_1)$ ist algebraisch. Aber die Erweiterung $K \subset A$ ist auch algebraisch. Es folgt (siehe Vorlesung Algebra), dass $\mathsf{k} \subset A$ algebraisch ist. ∎

3.3. Geometrische Version

Satz 3.3.1 (Nulstellensatz 2) Sei k algebraisch abgeschlossen. Die maximale Ideale von $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ sind der Form $(X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$, wobei $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$.

Mit anderen Wörter sind die maximale Ideale der Form $I(x)$, wobei $x \in \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. □

Beweis. Sei $\mathfrak{M} = (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$ und sei $f : \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n] \to \mathsf{k}$ definiert durch $f(P) = P(a_1, \cdots, a_n)$. Dann ist f ein k-Algebra-Homomorphismus und f ist surjektiv. Es gilt auch $\mathfrak{M} \subset \mathrm{Ker}(f)$ also faktorisiert sich f durch $\bar{f} : \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{M} \to \mathsf{k}$ mit $\bar{f}([P]) = f(P) = P(a_1, \cdots, a_n)$. Sei Umgekehrt $P \in \mathrm{Ker}(f)$. Nach Restdivision nach $X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n$ gilt

$$P = (X_1 - a_1)Q_1(X_1, \cdots, X_n) + \cdots (X_n - a_n)Q_n(X_1, \cdots, X_n) + \lambda.$$

Da $P \in \mathrm{Ker}(f)$ folgt

$$0 = P(a_1, \cdots, a_n) = \lambda.$$

Es folgt $P \in \mathfrak{M}$ und $\mathrm{Ker}(f) = \mathfrak{M}$. Daraus folgt $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{M} \simeq \mathsf{k}$ und $\mathfrak{M}$ ist maximal.

Umgekehrt, sei $\mathfrak{M}$ ein maximales Ideal und sei $A = \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{M}$. Dann ist A endlich erzeugt über k (die Klassen von $X_1, \cdots, X_n$ sind erzeuger von A) und ist ein Körper ($\mathfrak{M}$ ist maximal). Nach dem Nullstellensatz 1 ist $\mathsf{k} \subset A$ eine algebraische Erweiterung. Da k algebraisch abgeschlossen ist gilt $\mathsf{k} = A$. Sei $a_i = [X_i] \in A = \mathsf{k}$. Dann gilt $[X_i - a_i] = [X_i] - a_i = 0$ also $X_i - a_i \in \mathfrak{M}$. Es folgt $(X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n) \subset \mathfrak{M}$. Da $(X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$ maximal ist gilt $(X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n) = \mathfrak{M}$. ∎

Beispiel 3.3.2 Für k nicht algebraisch abgeschlossen ist der Satz falsch: Es gilt $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$ also ist (X^2+1) ein maximales Ideal aber nicht der Form $(X - a) = I(a)$ für ein $a \in \mathbb{R} = \mathbb{A}_1(\mathbb{R})$.

Korollar 3.3.3 (Nulstellensatz 3) Sei k algebraisch abgeschlossen und sei $I \subsetneq \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ ein Ideal. Dann gilt $V(I) \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $I \subsetneq \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Sei $\mathfrak{M}$ ein maximales ideal mit $I \subset \mathfrak{M} \subset \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Es gilt $V(\mathfrak{M}) \subset V(I)$ also können wir ohne Einschränkung I mit $\mathfrak{M}$ ersetzen. Wir können also annehmen, dass I ein maximales Ideal ist.

Nach dem Nullstellensatz 2 gilt aber $I = (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$. Daraus folgt $V(I) = \{(a_1, \cdots, a_n)\} \neq \emptyset$. ∎

Beispiel 3.3.4 Dies ist für k nicht algebraisch abgeschlossen nicht mehr wahr. Zum Beispiel gilt für $\mathsf{k} = \mathbb{R}$: $V(X^2 + Y^2 + 1) = \emptyset$.

Korollar 3.3.5 (Nulstellensatz 4) Sei k algebraisch abgeschlossen und sei $I \subset \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ ein Ideal. Dann gilt

$$I(V(I)) = \sqrt{I}.$$

Beweis. Sei $P \in \sqrt{I}$. Es gibt ein r mit $P^r \in I$. Da $I \subset I(V(I))$ folgt $P^r \in I(V(I))$ also $P \in \sqrt{I(V(I))}$. Da $I(V(I)) = \sqrt{I(V(I))}$ folgt $P \in I(V(I))$.

Umgekehrt, da $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ noethersch ist gibt es endlich viele Polynome $P_1, \cdots, P_r$ in $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ so, dass $I = (P_1, \cdots, P_r)$. Sei $P \in I(V(I))$. Wir setzen $J = P_1, \cdots, P_r, 1 - X_{n+1}P) \subset \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}]$. Sei $V = V(J) \subset \mathbb{A}_{n+1}(\mathsf{k})$ und sei $x \in V$. Es gilt $P_1(x) = \cdots = P_r(x) = 0$. Daraus folgt $P(x) = 0$. Es gilt aber auch $1 - x_{n+1}P(x) = 0$. Es folgt $1 = 0$ ein Widerspruch. Es folgt $V = \emptyset$. Nach dem Nullstellensatz 3 folgt $J = \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}]$. Insbesondere gilt $1 \in J$ *i.e.* es gibt Polynome $Q_1, \cdots, Q_r, Q_{r+1}$ in $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}]$ so, dass

$$1 = P_1Q_1 + \cdots + P_rQ_r + (1 - X_{n+1}P)Q_{r+1}.$$

Wir setzen $X_{n+1} = \frac{1}{P}$. Es gilt also

$$1 = P_1(X_1, \cdots, X_n)Q_1(X_1, \cdots, X_n, \frac{1}{P}) + \cdots + P_r(X_1, \cdots, X_n)Q_r(X_1, \cdots, X_n, \frac{1}{P}).$$

Wir schreiben jetzt Q_i als Polynom in der Variable X_{n+1}. Es gilt $Q_i = \sum_{k=0}^{d_i} R_{i,k}X_{n+1}^k$ mit $R_{i,k} \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Es folgt

$$Q_i(X_1, \cdots, X_n, \frac{1}{P}) = \sum_{k=0}^{d_i} \frac{R_{i,k}}{P^k}.$$

Sei $d = \max(d_i)$. Dann gilt $P^dQ_i(X_1, \cdots, X_n, \frac{1}{P}) \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ für alle i. Es folgt

$$\begin{aligned} P^d = \ & P_1(X_1, \cdots, X_n)P^dQ_1(X_1, \cdots, X_n, \tfrac{1}{P}) + \cdots + \\ & + P_r(X_1, \cdots, X_n)P^dQ_r(X_1, \cdots, X_n, \tfrac{1}{P}) \in (P_1, \cdots, P_r) = I. \end{aligned}$$

Daraus folgt $P \in \sqrt{I}$. ∎

Beispiel 3.3.6 Dies ist für k nicht algebraisch abgeschlossen nicht mehr wahr. Zum Beispiel gilt für $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ und $I = (X^2 + Y^2 + 1)$: $V(I) = \emptyset$ also $I(V(I)) = \mathsf{k}[X, Y] \supsetneq \sqrt{I} = I$.

3.4. Geometrische Konsequenzen

Definition 3.4.1 Sei A ein Ring und sei I ein Ideal. Das Ideal I heißt **radikal** falls $I = \sqrt{I}$.

Proposition 3.4.2 Sei k algebraisch abgeschlossen.

Es gibt eine absteigende (kontravariante) Bijektion $V \mapsto I(V)$ mit Umkehrabbildung $I \mapsto V(I)$ zwischen die Menge $\{$algebraische Mengen in $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})\}$ und die Menge $\{I$ radikales Ideal in $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]\}$.

Außerdem gilt

1. V irreduzibel $\Leftrightarrow$ $I(V)$ Primideal $\Leftrightarrow$ $\Gamma(V)$ Integritätsring.
2. V ist einelementig $\Leftrightarrow$ $I(V)$ ist maximal $\Leftrightarrow$ $\Gamma(V) = \mathsf{k}$.

Beweis. Für V algebraisch gilt $V(I(V)) = V$. Sei I radikal. Nach dem Nullstellensatz 3 gilt $I(V(I)) = \sqrt{I} = I$.

1. Siehe Proposition 2.3.9.

2. Sei V einelementig und sei I ein Ideal mit $I(V) \subset I$. Es gilt $V(I) \subset V(I(V)) = V$. Es folgt $V(I) = V$ oder $V(I) = \emptyset$. Im ersten Fall gilt nach dem Nullstellensatz 4: $I(V) = I(V(I)) = \sqrt{I}$. Es folgt $I \subset I(V)$ und $I = I(V)$. Im zweiten Fall gilt nach dem Nullstelensatz 3: $I = \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Es folgt, dass $I(V)$ maximal ist.

Sei V mit $I(V)$ maximal. Dann ist $\Gamma(V)$ ein Körper aber auch eine endlich erzeugte k-Algebra. Nach dem Nullstellensatz 1 folgt, dass $\Gamma(V)$ algebraisch über k ist und da k algebraisch abgeschlossen ist folgt $\Gamma(V) = \mathsf{k}$.

Angenommen $\Gamma(V) = \mathsf{k}$. Dann ist $I(V)$ ein maximales Ideal und nach dem Nullstellensatz 2 gilt $I(V) = (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$ für ein $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Daraus folgt $V = V(I(V)) = \{(a_1, \cdots, a_n)\}$. ∎

Proposition 3.4.3 Sei k algebraisch abgeschlossen und $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ eine algebraische Menge. Es gilt

$$V \text{ ist eine endliche Menge} \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma(V) \text{ ist ein endlicher } \mathsf{k}\text{-Vektorraum.}$$

Beweis. ($\Rightarrow$). Sei $V = \{v_1, \cdots, v_r\}$ und sei $f : \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n] \to \mathsf{k}^r$ definiert durch $f(P) = (P(v_1), \cdots, P(v_r))$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{P \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n] \mid P(v_i) = 0 \text{ für alle } i \in [1, r]\} \\ &= I(V). \end{aligned}$$

Insbesondere faktorisiert sich f durch $\bar{f} : \Gamma(V) = \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n] \to \mathsf{k}^r$ und $\bar{f}$ ist injektiv. Daraus folgt, dass $\dim_{\mathsf{k}} \Gamma(V) \leq \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{k}^r = r$.

($\Leftarrow$). Sei $[X_i]$ die Klasse von X_i in $\Gamma(V)$. Da $\Gamma(V)$ endliche Dimension hat, ist das System $([1], [X_i], \cdots, [X_i^r], \cdots)$ linear abhängig. Daraus folgt, das es für alle $i \in [1, n]$, Skalare $a_{i,j}$ gibt mit

$$a_{i,d_i}[X_i^{d_i}] + a_{i,d_i-1}[X_i^{d_i-1}] + \cdots + a_{i,0}[1] = 0$$

und $a_{i,d_i} \neq 0$. Es folgt, dass $P_i = a_{i,d_i}X_i^{d_i} + a_{i,d_i-1}X_i^{d_i-1} + \cdots + a_{i,0}1 \in I(V)$. Seien also $x = (x_1, , \cdots, x_n) \in V$. Dann gilt $P_i(x) = 0$ also x_i ist eine Nullstelle von P_i. Es gibt also für x_i endlich viele Möglichkeiten. Dies ist für alle i wahr also gilt $|V| < \infty$. ∎

Definition 3.4.4 Sei R ein Ring.

1. Ein Element $r \in R$ heißt **idempotent** falls gilt $r^2 = r$. Ein idempotentes Element $r \in R$ heißt **trivial** falls $r = 0$ oder $r = 1$.

2. Der Ring R heißt **zusammenhängend** falls alle idempotente Elemente trivial sind.

Proposition 3.4.5 Sei k algebraisch abgeschlossen.

Eine algebraische Menge $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\Gamma(V)$ zusammenhängend ist.

Beweis. Siehe Übungblatt 4. ∎

Definition 3.4.6 Sei V eine algebraische Menge und sei $W \subset V$ abgeschlossen (für die Zariski Topologie). **Das Ideal** $I_V(W) \subset \Gamma(V)$ **von** W **in** V ist das Bild von $I(W)$ im Quotient $p_V : \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n] \to \Gamma(V)$.

Bemerkung 3.4.7 Es gilt $I(W) = p_V^{-1}(I_V(W))$. Insbesondere gilt

1. $I_V(W) = \{f \in \Gamma(V) |\ f(x) = 0 \text{ für alle } x \in W\}$.
2. $\Gamma(W) \simeq \Gamma(V)/I_V(W)$.

Daraus folgt:

3. $I_V(W)$ ist ein radikales Ideal.
4. $I_W(V)$ Primideal $\Leftrightarrow$ $I(V)$ Primideal
5. $I_W(V)$ maximales Ideal $\Leftrightarrow$ $I(V)$ maximales Ideal

Proposition 3.4.8 Sei k algebraisch abgeschlossen und $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ eine algebraische Menge.

1. Es gibt eine absteigende (kontravariante) Bijektion $V \mapsto I_V(W)$ mit Umkehrabbildung $I \mapsto V(p_V^{-1}(I))$ zwischen die Menge {algebraische Mengen in V} und die Menge $\{I$ radikales Ideal in $\Gamma(V)\}$.

Außerdem gilt

2. W irreduzibel $\Leftrightarrow I_V(W)$ Primideal $\Leftrightarrow \Gamma(W)$ Integritätsring.

3. W ist einelementig $\Leftrightarrow I_V(W)$ ist maximal $\Leftrightarrow \Gamma(W) = \mathsf{k}$.

4. W ist endlich $\Leftrightarrow \dim_{\mathsf{k}} \Gamma(W) < \infty$.

4. W ist zusammenhängend $\Leftrightarrow \Gamma(W)$ ist zusammenhängend.

Beweis. Wir haben eine Bijektion

$$\{W \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \mid W \text{ ist algebraisch}\} \leftrightarrow \{I(W) \mid I(W) \text{ ist radikal}\}.$$

Wir können diese Bijektion einschränken auf

$$\{W \subset V \mid W \text{ ist algebraisch}\} \leftrightarrow \{I(W) \supset I(V) \mid I(W) \text{ ist radikal}\}.$$

Da ($I(W)$ radikal $\Leftrightarrow I_V(W)$ radikal) gilt, haben wir auch eine Bijektion

$$\{I(W) \supset I(V) \mid I(W) \text{ ist radikal}\} \leftrightarrow \{I_V(W) \subset \Gamma(V) \mid I_V(W) \text{ ist radikal}\}.$$

Daraus folgen auch die Aussagen 2., 3., 4. und 5. ∎

Korollar 3.4.9 Sei V eine algebraische Menge. Es gibt Bijektionen

$$V \leftrightarrow \{\text{maximale Ideale von } \Gamma(V)\} \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}-\mathrm{Alg}}(\Gamma(V), \mathsf{k}).$$

Bemerkung 3.4.10 Die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathsf{k}-\mathrm{Alg}}(\Gamma(V), \mathsf{k})$ ist die Menge aller k-Algebrahomomorphismen. Insbesondere für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}-\mathrm{Alg}}(\Gamma(V), \mathsf{k})$ gilt $f(1) = 1$ und f ist nicht die Nullabbildung.

Definition 3.4.11 Sei $v \in V$. Wir schreiben $\mathfrak{M}_v$ für das maximale Ideal von $\Gamma(V)$ definiert durch $\mathfrak{M}_v = I_V(\{v\})$.

4. Morphismen

Um die geometrische Eigenschaften einer Menge V zu verstehen, ist nicht nur die Menge V wichtig sondern auch die Abbildungen die man zulässt. Z.B.

- Abbildungen = Mengenlehre,
- stetige Abbildungen = Topologie,
- C^∞-Abbildungen = Differentialgeometrie,
- holomorphe Abbildungen = komplexe Mannigfaltigkeiten, usw.

Für die algebraische Geometrie sind nur die *polynomiale Abbildungen* zugelassen.

Definition 4.0.12 Seien $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $W \subset \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ algebraische Mengen. Sei $\varphi : V \to W$ eine Abbildung.

1. Die Abbildung φ ist immer der Form $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ mit $\varphi_i : V \to \mathsf{k}$ für alle $i \in [1, m]$. Die Abbildungen φ_i sind **die Komponenten von** φ

2. Die Abbildung φ heißt **regulär**, wenn $\varphi_i \in \Gamma(V)$ für alle $i \in [1, r]$.

3. Die Menge aller regulären Abbildungen von V nach W ist mit $\mathrm{Reg}(V, W)$ bezeichnet.

4. Eine reguläre Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt **Isomorphismus**, wenn es eine reguläre Abbildung $\psi : W \to V$ gibt mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_V$.

Beispiel 4.0.13 Sei $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ eine algebraische Menge.

1. Dann definieren alle Elemente $\varphi \in \Gamma(V)$ reguläre Abbildungen $\varphi : V \to \mathsf{k} = \mathbb{A}_1(\mathsf{k})$.

2. Wir schreiben die Elemente $x \in \mathsf{k}^n = \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ als Spaltenvektoren:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Sei $M \in M_n(\mathsf{k})$ eine Matrix und sei $\varphi_M : \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \to \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ defniert durch $\varphi(x) = Mx$. Dann ist φ_M eine reguläre Abbildung. Es gilt

- φ_M Isomorphismus $\Leftrightarrow M \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{k})$
- In diesem Fall ist $\varphi_{M^{-1}}$ das Inverse.

3. Sei $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und sei $\varphi : V \to \mathsf{k}^m$ mit $m \leq n$ die Projektion definiert durch $\varphi_n) = (x_1, \cdots, x_m)$. Dann ist φ eine reguläre Abbildung.

Allgemeiner, für $\{i_1, \cdots, i_m\} \subset [1, n]$ ist die Projektion $\varphi(x) = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_m})$ auch eine reguläre Abbildung.

4. Sei $V = V(Y - X^2)$ und sei $\varphi : V \to \mathbb{A}_1(\mathsf{k})$ definiert durch $\varphi(x, y) = x$. Dann ist φ ein Isomorphismus mit Inverse $\psi : \mathbb{A}_1(\mathsf{k}) \to V$ definiert durch $\psi(x) = (x, x^2)$.

5. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{A}_1(\mathsf{k}) \to V(X^3 + Y^2 - X^2)$ definiert durch $\varphi(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ ist eine reguläre Abbildung aber kein Isomorphismus (die Abbildung ist nicht injektiv).

6. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{A}_1(\mathsf{k}) \to V(X^3 - Y^2)$ definiert durch $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ ist eine reguläre Abbildung ist bijektiv aber kein Isomorphismus (Übung oder siehe später).

4.1. Der Funktor Γ

Wir haben eine Abbildung $V \mapsto \Gamma(V)$ definiert. Dies ist mehr als eine Abbildung: es ist ein *kontravariantes Funktor*: Falls es eine regulär Abbildung $\varphi : V \to W$ gibt, gibt es auch ein k-Algebrahomomorphismus $\Gamma(\varphi) = \varphi^* : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$.

Definition 4.1.1 Sei $\varphi : V \to W$ eine reguläre Abbildung und sei $f \in \Gamma(W)$. Wir setzen $\Gamma(\varphi)(f) = \varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

Bemerkung 4.1.2 Da $f \in \Gamma(W)$ eine Funktion $f : W \to \mathsf{k}$ definiert, definiert $\Gamma(\varphi)(f) = \varphi^*(f)$ eine Funktion : $\Gamma(\varphi)(f) = \varphi^*(f) : V \to \mathsf{k}$.

Lemma 4.1.3 Sei $\varphi : V \to W$ eine reguläre Abbildung und sei $f \in \Gamma(W)$.

Es gilt $\Gamma(\varphi)(f) = \varphi^*(f) \in \Gamma(V)$. □

Beweis. Es gilt $f = [P] \in \Gamma(W)$ für ein $P \in \mathsf{k}[Y_1, \cdots, Y_m]$. Seien $P_1, \cdots, P_m \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ so, dass $\varphi_i = [P_i] \in \Gamma(V)$. Daraus folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi)(f)(v_1, \cdots, v_n) &= f(\varphi_1(v_1, \cdots, v_n), \cdots, \varphi_m(v_1, \cdots, v_n)) \\ &= P(P_1(v_1, \cdots, v_n), \cdots, P_m(v_1, \cdots, v_n)). \end{aligned}$$

Dann gilt $\Gamma(\varphi)(f) = [P(P_1, \cdots, P_m)]$, wobei $P(P_1, \cdots, P_m) \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Daraus folgt $F(\varphi)(f) \in \Gamma(V)$. ■

Korollar 4.1.4 Eine reguläre Abbildung ist stetig für die Zariski-Topologie.

Beweis. Sei $\varphi : V \to W$ eine reguläre Abbildung und sei $U \subset W$ offen. Da die standardmäßige offene Teilmenge eine Basis der Topologie bilden können wir annehmen, dass U standardmäßig ist also $U = D_W(f)$ für ein $f \in \Gamma(W)$. Es gilt also $D_W(f) = \{w \in W \mid f(w) \neq 0\}$. Sei jetzt $g = f \circ \varphi = \varphi^* f = \Gamma(\varphi)(f) : V \to \mathsf{k}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(D_W(f)) &= \{v \in V \mid \varphi(v) \in D_W(f)\}\\ &= \{v \in V \mid f(\varphi(v)) \neq 0\}\\ &= \{v \in V \mid g(v) \neq 0\}.\end{aligned}$$

Da $g \in \Gamma(V)$ gilt also $\varphi^{-1}(V) = D_V(g)$ und dies ist eine standardmäßige offene Teilmenge. ■

Beispiel 4.1.5 Nicht alle stetige Abbildungen für die Zariski Topologie sind regulär. Zum Beispiel ist: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig für die Zariski-Topologie aber nicht regulär: Für $V \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen gilt $V = \emptyset$, $V = \mathbb{R}$ oder $|V| < \infty$. Es folgt $\exp^{-1}(V) = \emptyset$, $\exp^{-1}(V) = \mathbb{R}$ oder $|\exp^{-1}(V)| < \infty$. Es folgt, dass $\exp^{-1}(V)$ abgeschlossen ist also dass exp stetig ist.

Korollar 4.1.6 Sei $\varphi : V \to W$ eine reguläre Abbildung und sei $f \in \Gamma(W)$.

Dann ist die Abbildung $\Gamma(\varphi) : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ ein k-Algebrahomomorphismus.

Beweis. Die Abbildung ist wohl definiert dank Lemma 4.1.3. Es gilt aber auch $\Gamma(\varphi)(f + f') = (f + f') \circ \varphi = f \circ \varphi + f' \circ \varphi = \Gamma(\varphi)(f) + \Gamma(\varphi)(f')$. Analog gilt $\Gamma(\varphi)(ff') = (ff')\circ\varphi = (f\circ\varphi)(f'\circ\varphi) = \Gamma(\varphi)(f)\,\Gamma(\varphi)(f')$ und $\Gamma(\varphi)(\lambda f) = (\lambda f)\circ\varphi = \lambda(f \circ \varphi) = \lambda\,\Gamma(\varphi)(f)$. ■

Beispiel 4.1.7 Sei k ein Körper.

1. Sei $V = V(P)$, wobei $P \in \mathsf{k}[X, Y]$, sei $W = \mathbb{A}_1(\mathsf{k})$ und sei $\varphi : V \to \mathsf{k} = \mathbb{A}_1(\mathsf{k})$ die erste Projektion definiert durch $\varphi(x, y) = x$. Es gilt

$$\Gamma(\varphi) : \Gamma(\mathbb{A}_1(\mathsf{k})) = \mathsf{k}[X] \to \Gamma(V) = \mathsf{k}[X, Y]/(P),\ \ Q(X) \mapsto [Q(X)].$$

1. Sei $V = \mathbb{A}_1(\mathsf{k})$, $W = V(X^3 - Y^3)$ und $\varphi : V \to W$ definiert durch $\varphi(t) = (t^2, t^3)$. Es gilt

$$\Gamma(\varphi) : \Gamma(W) = \mathsf{k}[X, Y]/(X^3 - Y^2) \to \Gamma(W) = \mathsf{k}[T],\ \ [Q(X, Y)] \mapsto Q(T^2, T^3).$$

Bemerkung 4.1.8 Γ ist ein kontravariantes Funktor von der Kategorie **Alg-Menge** zu der Kategorie **k-Alg** aller k-Algebren.

Die Sprache der Kategorien werden wir im nächsten Semester einführen. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus zwei Teilen: Objekten $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und Morphismen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ zwischen zwei Objekte $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ ist eine Familie von Menge und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ sind "Abbildungen" zwischen Objekten. Die Morphismen haben die folgende Eigenschaften:

- Für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ und $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gibt es eine Hintereinanderschaltung $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$
- Es gibt ein $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ (mit den üblichen Eigenschaften).

Hier sind ein Paar sehr bekannte Beispiele:

Kategorie	Objekten	Morphismen
Kategorie der Mengen	Alle Mengen	Abbildungen
Kategorie der Gruppen	Alle Gruppen	Gruppenhomomorphismen
Kategorie der Ringe	Alle Ringe	Ringhomomorphismen
Kategorie der Körper	Alle Körper	Körperhomomorphismen
Kategorie der k-Algebren	Alle k-Algebren	k-Algebrahomomorphismen
Kategorie der alg. Mengen	Alle alg. Menge	reguläre Morphismen

Funktoren sind "Morphismen" zwischen Kategorien. Ein Funktor $F : C \to D$ von einer Kategorie C zu einer Kategorie D besteht aus einer Zuordnung

$$F_{\mathrm{Obj}} : \mathrm{Obj}(C) \to \mathrm{Obj}(D)$$

und aus einer Zuordnung

$$\begin{array}{ll} F_{\mathrm{Mor}} : \mathrm{Mor}_C(A, A') \to \mathrm{Mor}_D(F_{\mathrm{Obj}}(A), F_{\mathrm{Obj}}(A')) & \text{kovarianter Funktor oder} \\ F_{\mathrm{Mor}} : \mathrm{Mor}_C(A, A') \to \mathrm{Mor}_D(F_{\mathrm{Obj}}(A'), F_{\mathrm{Obj}}(A)) & \text{kontravarianter Funktor.} \end{array}$$

mit Kompatibilität Eingenschaften: Es gilt immer

$$F_{\mathrm{Mor}}(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F_{\mathrm{Obj}}(A)}.$$

Für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ und $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt

$$\begin{array}{ll} F_{\mathrm{Mor}}(g \circ f) = F_{\mathrm{Mor}}(g) \circ F_{\mathrm{Mor}}(f) & \text{Für ein kovarianter Funktor oder} \\ F_{\mathrm{Mor}}(g \circ f) = F_{\mathrm{Mor}}(f) \circ F_{\mathrm{Mor}}(g) & \text{Für ein kontravarianter Funktor.} \end{array}$$

Ein Beispiel davon ist der kontravarianter Funktor Γ : **Alg-Meng** $\to$ **k-Alg**:

$$\Gamma_{\mathrm{Obj}}(V) = \Gamma(V) \text{ und } \Gamma_{\mathrm{Mor}}(\varphi : V \to W) = \Gamma(\varphi).$$

Lemma 4.1.9 Sei $\varphi \in \mathrm{Reg}(V, W)$ und $\psi \in \mathrm{Reg}(W, X)$. Dann ist $\psi \circ \varphi \in \mathrm{Reg}(V, X)$, es gilt

$$\Gamma(\psi \circ \varphi) = \Gamma(\varphi) \circ \Gamma(\psi)$$

und $\Gamma(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_{\Gamma(V)}$. □

Beweis. Die erste Aussage folgt, weil die Hintereinandershaltung von Polynome immer Polynome sind. Es gilt für $f \in \Gamma(X)$:

$$\Gamma(\psi \circ \varphi)(f) = f \circ \psi \circ \varphi = \Gamma(\psi)(f) \circ \varphi = \Gamma(\varphi)(\Gamma(\psi)(f)) = (\Gamma(\varphi) \circ \Gamma(\psi))(f).$$

Die letzte Aussage ist klar. ■

Lemma 4.1.10 Sei $\varphi : V \to W$ eine regulär Abbildung und sei $v \in V$. Dann gilt

$$\Gamma(\varphi)^{-1}(\mathfrak{M}_v) = \mathfrak{M}_{\varphi(v)}.$$

Beweis. Es gilt $\Gamma(\varphi)^{-1}(\mathfrak{M}_v) = \{f \in \Gamma(W) \mid f(\varphi(v)) = 0\} = \mathfrak{M}_{\varphi(v)}$. ∎

Bemerkung 4.1.11 Aus dem obigen Lemma folgt, dass man die reguläre Abbildung φ wiederaufbauen kann dank der Abbildung $\Gamma(\varphi)$.

Proposition 4.1.12 Die Abbildung $\Gamma : \mathrm{Reg}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}-\mathrm{Alg}}(\Gamma(W), \Gamma(V))$ ist bijektiv.

Bemerkung 4.1.13 Man sagt, dass der Funktor Γ **volltreu** ist

Beweis. Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Reg}(V, W)$ mit $\Gamma(\varphi) = \Gamma(\psi)$. Wir schreiben $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ und $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_m)$. Sei $f_j = [Y_j] \in \Gamma(W)$. Es gilt

$$\Gamma(\varphi)(f_j)(x_1, \cdots, x_n) = f_j(\varphi(x_1, \cdots, x_n)) = \varphi_j(x_1, \cdots, x_n).$$

Insbesondere gilt $\varphi_j = \Gamma(\varphi)(f_j) = \Gamma(\psi)(f_j) = \psi_j$. Es folgt $\varphi = \psi$.

Sei $\theta : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ ein k-Algebrahomomorphismus. Sei $\varphi_j = \theta([Y_j])\,\Gamma(V)$ für alle $j \in [1, m]$. Wir setzen $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$.

Wir zeigen zuerst, dass φ eine Abbildung $V \to W$ definiert *i.e.* für $v \in V$ zeigen wir, dass $\varphi(v) \in W$ gilt. Da $W = V(I(W))$, genügt es zu zeigen, dass $P(\varphi(v)) = 0$ für alle $P \in I(W)$. Es gilt aber

$$\begin{array}{rll} P(\varphi(v)) & = P(\varphi_1(v), \cdots, \varphi_m(v)) & \\ & = P(\theta([X_1]), \cdots, \theta([X_m])) & \\ & = \theta(P([X_1], \cdots, [X_m])) & \theta \text{ ist ein } \mathsf{k}\text{-Algebrahomomorphismus} \\ & = \theta([P]) & P \mapsto [P] \text{ ist ein } \mathsf{k}\text{-Algebrahomomorphismus} \\ & = \theta(0) & [P] = 0 \text{ in } \Gamma(W) \text{ da } P \in I(W) \\ & = 0. & \end{array}$$

Es folgt, dass $\varphi \in \mathrm{Reg}(V, W)$. Wir zeigen jetzt dass $\Gamma(\varphi) = \theta$ gilt. Da $\Gamma(\varphi$ und θ beide k-Algebrahomomorphismen sind genügt es zu zeigen, dass $\Gamma(\varphi)([X_j]) = \theta([X_j))$, weil die Element $[X_j]$ für $j \in [1, m]$ Erzeuger von $\Gamma(W)$ sind. Es gilt aber

$$\Gamma(\varphi)([X_j]) = [X_j](\varphi) = \varphi_j = \theta([X_j])$$

und die Aussage folgt. ∎

Korollar 4.1.14 Sei $\varphi \in \mathrm{Reg}(V, W)$. Die reguläre Abbildung φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\Gamma(\varphi)$ ein k-Algebraisomorphismus ist.

Beweis. Sei $\psi : W \to V$ eine reguläre Abbildung mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_V$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W$. Es gilt $\Gamma(\varphi) \circ \Gamma(\psi) = \Gamma(\psi \circ \varphi) = \Gamma(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_{\Gamma(V)}$ und $\Gamma(\psi) \circ \Gamma(\varphi) = \Gamma(\varphi \circ \psi) = \Gamma(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\Gamma(W)}$.

Umgekehrt, falls $\Gamma(\varphi) : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ ein Isomorphismus ist, sei $\theta = \Gamma(\varphi)^{-1} : \Gamma(V) \to \Gamma(W)$ sein Inverse. Es gibt eine (eindeutige) reguläre Abbildung $\psi : W \to V$ mit $\Gamma(\psi) = \theta$. Es folgt $\Gamma(\varphi \circ \psi) = \Gamma(\psi) \circ \Gamma(\varphi) = \mathrm{Id}_{\Gamma(W)} = \Gamma(\mathrm{Id}_W)$. Es folgt $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W$. Analog gilt $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_V$ und φ ist ein Isomorphismus. ∎

Beispiel 4.1.15 Sei k unendlich. Die reguläre Abbildung $\varphi : V = \mathbb{A}_1(\mathsf{k}) \to W = V(Y^2 - X^3)$ definiert durch $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ ist bijektiv aber kein Isomorphismus.

Falls φ ein Isomorphismus ist muss $\Gamma(\varphi) : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ ein Isomorphismus sein. Es gilt aber (weil k unendlich ist) $I(W) = (Y^2 - X^3)$ und

$$\Gamma(\varphi) : \mathsf{k}[X, Y]/(Y^2 - X^3) \to \mathsf{k}[T],\ \Gamma(\varphi)(P) = P(T^2, T^3).$$

Für P beliebig gilt $P = \sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j$ und

$$\Gamma(\varphi)(P) = P(T^2, T^3) = \sum_{i,j \geq 0} a_{i,j} T^{2i+3j}.$$

Insbesondere gilt $T \notin \mathrm{Im}(\Gamma(\varphi))$ und $\Gamma(\varphi)$ ist kein Isomorphismus.

Bemerkung 4.1.16 Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen Kategorien ist eine **Äquivalenz von Kategorie**, wenn F ein volltreuer Funktor ist und wenn F **wesentlich surjektiv** ist *i.e.* für jedes $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ gibt es ein $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ mit $F_{\mathrm{Obj}}(A) \simeq B$.

Satz 4.1.17 Sei k algebraisch abgeschlossen.

Der Funktor Γ ist eine Äquivalenz von der Kategorie **Alg-Meng** aller algebraischen Mengen und der Kategorie **red-k-Alg** aller redizierten endlich erzeugten k-Algebren. □

Beweis. Wir wissen schon (Proposition 4.1.12), dass Γ volltreu ist. Wir zeigen, dass Γ wesentlich surjektiv ist. Sei A eine reduzierte endlich erzeugte k-Algebra. Da A endlich erzeugt ist gibt es Erzeuger $(x_1, \cdots, x_n)$ von A und also ein surjektiver k-Algebrahomomorphismus $f : \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n] \to A, P \mapsto P(x_1, \cdots, x_n)$. Sei $I = \mathrm{Ker}(f)$. Es gilt $A \simeq \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]/I$ und da A reduziert ist, muss I radikal sein also $I = \sqrt{I}$. Daraus folgt (Nullstellensatz), dass $I = I(V(I))$ und also $A \simeq \Gamma(V(I))$. ∎

4.2. Weitere Eigenschaften von Morphismen

Definition 4.2.1 Seien V, W topologische Räume und sei $\varphi : V \to W$ stetig. Die Abbildung φ heißt **dominierend** falls $\varphi(V)$ dicht in W ist *i.e.* $W = \overline{\varphi(V)}$.

Proposition 4.2.2 Sei $\varphi : V \to W$ eine reguläre Abbildung. Es gilt

1. φ dominierend $\Leftrightarrow \Gamma(\varphi)$ injektiv.

2. Falls φ dominierend ist und V irreduzibel, dann ist W auch irreduzibel.

Beweis. 1. Sei φ dominierend und sei $f \in \operatorname{Ker}(\Gamma(\varphi)) \subset \Gamma(W)$. Es gilt $f \circ \varphi = \Gamma(\varphi)(f) = 0$ also für alle $v \in V$ gilt $f(\varphi(v)) = 0$. Es folgt $f(\varphi(V)) = 0$ und da $f(\varphi(V))$ dicht in W ist und f stetig ist folgt $f(W) = 0$ also $f = 0$.

Umgekehrt, sei $\Gamma(\varphi)$ injektiv. Wir setzen $X = \overline{\varphi(V)}$. Dann ist X abgeschlossen in W. Falls $X \subsetneq W$ gilt $I(W) \subsetneq I(X)$. Sei $P \in I(X) \setminus I(W)$. Es gilt $0 \neq [P] \in \Gamma(W)$ aber für $v \in V$ gilt $\varphi(v) \in X$ und also $\Gamma(\varphi)([P])(v) = [P](\varphi(v)) = P(\varphi(v)) = 0$. Es gilt also $\Gamma(\varphi)([P] = 0 \in \Gamma(V)$. Ein Widerspruch zu $\Gamma(\varphi)$ injektiv.

2. Diese Aussage ist für belibige stetige Abbildungen zwischen topologische Räume wahr. Seien F_1 und F_2 abgeschlossen in W mit $W = F_1 \cup F_2$. Sei $F_i' = \varphi^{-1}(F_i)$. Dann ist F_i' abgeschlossen und es gilt $V = F_1' \cup F_2'$. Daraus folgt $F_1' = V$ oder $F_2' = V$. Ohne Einschränkung können wir annehmen $F_1' = V$. Daraus folgt $\varphi(V) = \varphi(F_1') \subset F_1$. Es folgt

$$W = \overline{\varphi(V)} \subset \overline{F_1} = F_1 \subset W$$

und also $F_1 = W$. ∎

Definition 4.2.3 Sei V eine irreduzible algebraische Menge. Dann ist $\Gamma(V)$ ein Integritätsring. **Der Körper $\mathsf{k}(V)$ aller rationale Funktionen von V** ist der Quotientkörper von $\Gamma(V)$:

$$\mathsf{k}(V) = \operatorname{Frac}(\Gamma(V)).$$

Korollar 4.2.4 Sei $\varphi : V \to W$ eine reguläre dominierende Abbildung. Dann gibt es ein (injektiver) Körperhomomorphismus $\mathsf{k}(W) \to \mathsf{k}(V)$.

Teil II.

Projektive algebraische Mengen

5. Projektiver Raum

Seien G und G' zwei Geraden in der affinen Ebene $\mathbb{A}_2(\mathsf{k})$. Es gibt 3 Möglichkeiten:

- $G = G'$,
- G und G' treffen sich in einem Punkt oder
- G und G' sind parallel und treffen sich gar nicht.

Wie wollen die letze Möglichkeit aufräumen um den folgenden Prinzip zu haben:

Zwei Geraden in der Ebene sind gleich oder treffen sich in genau einem Punkt. Insbesondere werden sich zwei Geraden immer treffen.

5.1. Projektiver Raum

Definition 5.1.1 Sei n eine ganze Zahl und sei E ein $n+1$-dimensionaler k-Vektorraum.

Die Kollinearität ist die Relation

$$R = \{(x,y) \in (E \setminus \{0\})^2 \mid \exists \lambda \in \mathsf{k}^\times \text{ mit } y = \lambda x\}$$

oder $(x \sim y) \Leftrightarrow (\lambda \in \mathsf{k}^\times \text{ mit } y = \lambda x)$.

Lemma 5.1.2 Die Kollinearität ist eine Äquivalenzrelation. □

Beweis. Übung. ■

Definition 5.1.3 Sei E ein k-Vektorraum mit $\dim_{\mathsf{k}}(E) = n+1$.

1. **Der projektive Raum** $\mathbb{P}(E)$ ist die Quotientmenge $(E \setminus \{0\})/\sim$. Wenn $E = \mathsf{k}^{n+1}$ schreibt man $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. Die Menge $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ heißt **der projektive Raum der Dimension** n.

2. Sei $p : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ definiert durch $p(x) = [x]$ die kanonische Projektion. Für $E = \mathsf{k}^{n+1}$ und $x = (x_0, \cdots, x_n)$ setzen wir $p(x) = [x] = [x_0 : \cdots : x_n]$. Die Skalare $(x_0, \cdots, x_n)$ sind die **homogene Koordinaten von** x.

Bemerkung 5.1.4 1. Die homogene Koordinaten $[x_0 : \cdots : x_n]$ von einem Punkt $x \in \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ sind nicht eindeutig bestimmt: für jedes $\lambda \in \mathsf{k}$ sind $[\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n]$ auch homogene Koordinaten.

2. Die homogene Koordinaten $[x_0 : \cdots : x_n]$ von einem Punkt $x \in \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ sind nicht alle null.

3. Der projektive Raum ist die Menge aller Untervektorräume der Dimension 1 in E: Sei $f : \mathbb{P}(E) \to \{F \subset E \mid E\text{Unterraum mit } \dim F = 1\}$ definiert durch $f([x]) = \langle x \rangle$ und sei $g : \{F \subset E \mid E\text{Unterraum mit } \dim F = 1\} \to \mathbb{P}(E)$ definiert durch $g(F) = [x]$, wobei (x) eine Basis von F ist. Dann sind f und g wohl definiert und inverse voneinander.

4. Für $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ hat $\mathsf{k}^{n+1} \setminus \{0\}$ die übliche Topologie. Damit kann man eine Topologie auf $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ definieren indem man die Familie aller offenen Teilmengen $\mathcal{T}$ wie folgt definiert: $U \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ ist genau dann in $\mathcal{T}$ (also U ist genau dann offen), wenn $p^{-1}(U)$ offen ist. Man überprüft leicht, dass für diese topologie $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ kompakt ist (Übung).

5.2. Projektive Unterräume

Definition 5.2.1 Sei E ein k-Vektorraum der Dimension $n + 1$.

1. Sei $F \subset E$ ein k-Unterraum der Dimension $m + 1$. Das Bild $p(F \setminus \{0\}) \subset \mathbb{P}(E)$ heißt **projektiver Unterraum der Dimension** m.

2. Für $\dim_{\mathsf{k}}(F) = 1$ heißt $p(F \setminus \{0\})$ **Punkt in** $\mathbb{P}(E)$ und es gilt $p(F \setminus \{0\}) = [x]$ für alle $x \in F \setminus \{0\}$.

3. Für $\dim_{\mathsf{k}}(F) = 2$ heißt $p(F \setminus \{0\})$ **Gerade in** $\mathbb{P}(E)$.

4. Für $\dim_{\mathsf{k}}(F) = 3$ heißt $p(F \setminus \{0\})$ **Ebene in** $\mathbb{P}(E)$.

3. Für $\dim_{\mathsf{k}}(F) = \dim E - 1$ heißt $p(F \setminus \{0\})$ **Hyperebene in** $\mathbb{P}(E)$.

Lemma 5.2.2 Es gibt eine Bijektion $\mathbb{P}(F) \to p(F)$ definiert durch $[x] \mapsto p(x)$. □

Beweis. Übung. ■

Proposition 5.2.3 Sei E ein k-Vektorraum der Dimension $n + 1$.

Seien V und W zwei projektive Unterräume von $\mathbb{P}(E)$ der Dimension r und s mit $r + s \geq n$. Dann ist $V \cap W$ ein projektiver Unterraum der Dimension $d \geq r + s - n$. Insbesondere ist $V \cap W$ nicht leer.

Beweis. Seien F und F' k-Untervektorräume der Dimension $r+1$ und $s+1$ in E so, dass $\mathbb{P}(F \setminus \{0\}) = V$ und $\mathbb{P}(F' \setminus \{0\}) = W$. Es gilt $\dim_{\mathsf{k}}(F \cap F') = \dim_{\mathsf{k}}(F) + \dim_{\mathsf{k}}(F') - \dim_{\mathsf{k}}(F + F')$. Da $F + F' \subset E$ gilt, folgt $\dim_{\mathsf{k}}(F+F') \leq n$ und

$$\dim_{\mathsf{k}}(F \cap F') \geq r + s - n + 1.$$

Es gilt aber

$$\begin{aligned} p(F \cap F' \setminus \{0\}) &= \{[x] \in \mathbb{P}(E) \mid x \in F \cap F' \setminus \{0\}\} \\ &= \{[x] \in \mathbb{P}(E) \mid x \in F \setminus \{0\}\} \cap \{[x] \in \mathbb{P}(E) \mid x \in F' \setminus \{0\}\} \\ &= p(F \setminus \backslash\{0\}) \cap p(F' \setminus \{0\}) \\ &= V \cap W. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $V \cap W$ ein projektiver Unterraum der Dimension $d \geq r + s - n$ ist. ■

Beispiel 5.2.4 1. Sei $E = \mathsf{k}^3$ und $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_2(\mathsf{k})$ die projektive Ebene. Seien G und G' zwei Geraden in $\mathbb{P}_2(\mathsf{k})$ mit $G \neq G'$. Dann treffen sich G und G' in genau einem Punkt (Übung).

2. Sei $E = \mathsf{k}^4$ und $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_3(\mathsf{k})$ der (3-dimensionale) projektive Raum. Es gilt

- Sei G eine Gerade und Π eine Ebene in $\mathbb{P}_3(\mathsf{k})$. Dann treffen sich G und Π in einem Punkt. Außerdem falls $G \not\subset \Pi$ treffen sich G und Π in genau einem Punkt (Übung).
- Seien Π und Π' zwei Ebene in $\mathbb{P}_3(\mathsf{k})$. Dann enthält $\Pi \cap \Pi'$ eine Gerade. Außerdem falls $\Pi \neq \Pi'$ treffen sich Π und Π' genau in einer Gerade (Übung).
- Seien G und G' zwei Geraden in $\mathbb{P}_3(\mathsf{k})$. Im allgemein treffen sich G und G' nicht. Wenn G und G' sich treffen, gibt es eine Ebene π mit $G, G' \subset \Pi$ (Übung).

5.3. Projektivitäten

Lemma 5.3.1 Sei E ein k-Vektorraum und sei $u \in \mathrm{GL}(E)$. Dann ist $\bar{u} : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E), [x] \mapsto \bar{u}([x]) = [u(x)]$ wohl definiert und es gilt $\bar{u} \circ \bar{v} = \overline{u \circ v}$. Insbesondere ist $\bar{u}$ eine Bijektion mit Inverse $\bar{u}^{-1} = \overline{(u^{-1})}$. □

Beweis. Für alle $\lambda \in \mathsf{k}$ gilt $[u(\lambda x)] = [\lambda u(x)] = [u(x)$ also ist $\bar{u}$ wohl definiert. Es gilt auch $\overline{u \circ v}([x]) = [u(v(x))] = \bar{u}([v(x)]) = \bar{u} \circ \bar{v}([x])$. Daraus folgen die Aussagen. ■

Definition 5.3.2 Sei E ein k-Vektorraum und sei $u \in \mathrm{GL}(E)$. Die Bijektion $\bar{u}$ heißt **Projektivität** (oder Kollineation oder Homographie). Die Menge $\mathrm{PGL}(E)$ aller Projektivität heißt **die projektive lineare Gruppe**.

Lemma 5.3.3 Die Teilmenge $\mathrm{PGL}(E) \subset \mathrm{Bij}(E)$ ist eine Untergruppe. □

Beweis. Folgt aus dem obigen Lemma: es gilt $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}(E)} = \bar{\mathrm{Id}}_E \in \mathrm{PGL}(E)$ und $\bar{u} \circ (\bar{v})^{-1} \in \mathrm{PGL}(E)$. ∎

Lemma 5.3.4 Es gilt

$$\mathrm{PGL}(E) \simeq \mathrm{GL}(E)/\{\lambda \mathrm{Id}_E \in \mathrm{GL}(E) \mid \lambda \in \mathsf{k}^\times\} = \mathrm{GL}(E)/Z(\mathrm{GL}(E)).$$

Beweis. Die Abbildung $\Phi : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{PGL}(E)$ definiert durch $\Phi(u) = \bar{u}$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Daraus folgt $\mathrm{PGL}(E) \simeq \mathrm{GL}(E)/\mathrm{Ker}(\Phi)$. Sei $u = \lambda \mathrm{Id}_E$. Es gilt $\bar{u}([x]) = [u(x)] = [\lambda x] = [x]$ also $\bar{U} = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(E)}$ und $\bar{u} \in \mathrm{Ker}\Phi$. Umgekehrt, sei $u \in \mathrm{Ker}\Phi$. Es gilt $\bar{u}([x]) = [x]$ für alle $x \in E \setminus \{0\}$ also $[u(x)] = [x]$ für alle $x \in E \setminus \{0\}$. Daraus folgt, dass es ein $\lambda_x \in \mathsf{k}$ mit $u(x) = \lambda_x x$ für alle $x \in E \setminus \{0\}$. Wir zeigen, dass $\lambda_x = \lambda_y$ für alle $x, y \in E \setminus \{0\}$. Falls (x, y) linear unabhängig ist gilt

$$\lambda_{x+y}(x + y) = u(x + y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Daraus folgt $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$. Falls (x, y) linear abhängig ist können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $y = \mu x$ für ein $\mu \in \mathsf{k}^\times$. Daraus folgt

$$\lambda_y y = u(y) = u(\mu x) = \mu u(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y$$

und da $y \neq 0$ folgt $\lambda_y = \lambda_x$. Sei also $\lambda = \lambda_x$ für ein $x \in E \setminus \{0\}$. Es gilt $u(y) = \lambda y$ für alle $y \in E$ und also $u = \lambda \mathrm{Id}_E$. Daraus folgt die Aussage (zur Erinnerung gilt $Z(\mathrm{GL}(E)) = \{\lambda \mathrm{Id}_E \in \mathrm{GL}(E) \mid \lambda \in \mathsf{k}^\times\}$). ∎

Lemma 5.3.5 Sei $V \subset \mathbb{P}(E)$ ein projektiver Unterraum der Dimension r und sei $\bar{u} \in \mathrm{PGL}(E)$ eine Projektivität. Dann ist $\bar{u}(V)$ projektiver Unterraum der Dimension r. □

Beweis. Übung. ∎

5.4. Affiner Raum und projektiver Raum

In diesem Abschnitt werden wir den Zusammenhang zwischen dem affinen Raum $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und dem projektiven Raum $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ betrachten.

Sei $E = \mathsf{k}^{n+1}$ mit Koordinaten $x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in E$. Sei H der Hyperebene $H = V(X_0) = \{x \in E \mid x_0 = 0\}$ und sei $\bar{H} = p(H) \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ der zugehörige projektive Ebene. Wir setzen $U = \mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \setminus \bar{H}$. Die Hyperebene heißt **Fernhyperebene** oder **unendlich ferne Hyperebene**.

Lemma 5.4.1 Es gibt eine Bijektion $\varphi : U \to \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ definiert durch

$$\varphi([x]) = \varphi([x_0 : x_1 : \cdots : x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \cdots \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung φ wohl definiert ist. Da $[x] \in U$ gilt $x_0 \neq 0$ und $\frac{x_i}{x_0}$ ist für jedes $i \in [1,n]$ wohl definiert. Außerdem, für $\lambda \in \mathsf{k}^\times$ gilt

$$\varphi([\lambda x]) = \left(\frac{\lambda x_1}{\lambda x_0}, \cdots \frac{\lambda x_n}{\lambda x_0}\right) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \cdots \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Sei $\psi : \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \to U$ definiert durch $\psi(x_1, \cdots, x_n) = [1 : x_1 : \cdots : x_n]$. Wir zeigen, dass φ und ψ inverse voneinander sind. Es gilt $\varphi(\psi(x_1, \cdots, x_n) = \varphi([1 : x_1 : \cdots : x_n]) = (x_1, \cdots, x_n)$ und $\psi(\varphi([x_0 : x_1 : \cdots : x_n])) = \psi(x_1/x_0, \cdots, x_n/x_0) = [1 : x_1/x_0 : \cdots : x_n/x_0] = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$. ∎

Korollar 5.4.2 Es gilt

$$\mathbb{P}_n(\mathsf{k}) = \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \coprod \mathbb{P}_{n-1}(\mathsf{k}).$$

Beispiel 5.4.3 Sei k ein Körper.

1. *Die projektive Gerade.* Für $n = 2$, seien (x,t) die Koordinaten in k^2 und sei $H = V(t = 0)$ die Hyperebene. Es gilt $\bar{H} = \{[x, 0] \in \mathbb{P}_1(\mathsf{k})\ x \neq 0\} = \{[1, 0]\} = \{\infty\}$. Es gibt also eine Bijektion $\mathsf{k} = \mathbb{A}_1(\mathsf{k}) \to \mathbb{P}_1(\mathsf{k}) \setminus \{\infty\}$ definiert durch $x \mapsto [x : 1]$. Die projektive Gerade ist also die affine Gerade $k = \mathbb{A}_1(\mathsf{k})$ mit einem zusätzlichen Punkt im Unendliche.

Damit gilt für $\mathsf{k} = \mathbb{F}_q$: $|\mathbb{P}_1(\mathsf{k})| = |\mathbb{A}_1(\mathsf{k})| + 1 = |\mathsf{k}| + 1 = q + 1$.

Für $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ bekommt man damit eine topologische Beschreibung von $\mathbb{P}_1(\mathsf{k})$: die projektive Gerade $\mathbb{P}_1(\mathsf{k})$ ist **die Alexandrov Kompazifizierung von** $\mathbb{A}_1(\mathsf{k})$. Für $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ ist also $\mathbb{P}_1(\mathsf{k})$ ein Kreis und für $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ ist $\mathbb{P}_1(\mathsf{k})$ eine Späre.

Mit der Identifizierung $\mathbb{P}_1(\mathsf{k}) = \mathsf{k} \cup \{\infty\}$ ist eine Projektivität $\bar{u}$ mit

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

der Form

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{cx+d} & \text{für } x \in \mathsf{k} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{für } x = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{für } x = \infty. \end{cases}$$

2. *Die projektive Ebene.* Für $n = 3$, seien (x, y, t) die Koordinaten in k^3 und sei $H = V(t = 0)$ die Hyperebene. Es gilt $\bar{H} = \{[x, y, 0] \in \mathbb{P}_2(\mathsf{k})\} \simeq \mathbb{P}_1(\mathsf{k})$. Die Hyperebene $\bar{H}$ heißt in diesem Fall **die Ferngerade**. Wir schreiben $G_\infty = \bar{H}$. Es gibt also eine Bijektion $\mathsf{k}^2 = \mathbb{A}_2(\mathsf{k}) \to \mathbb{P}_2(\mathsf{k}) \setminus G_\infty$ definiert durch $(x, y) \mapsto [x : y : 1]$.

3. *Geraden in der projektiven Ebene.* Wir beschreiben alle Geraden in $\mathbb{P}_2(\mathsf{k})$. Eine Gerade G ist Dank einem Unterraum $\hat{G}$ der dimension 2 in k^3 definiert. Ein solcher Unterraum $\hat{G}$ ist dank einer Gleichung $ax+by+ct = 0$ definiert mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Es gibt zwei Möglichkeiten:

(a). Für $(a, b, c) = (0, 0, c)$ mit $c \neq 0$ ist die Gleichung der Form $t = 0$ und $G = G_\infty$.

(b). Sonst wird G das Komplement von G_∞ treffen: ein Punkt $[x : y : 1] \in G \cap \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ erfüllt die Gleichung $ax + by + c = 0$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Also ist $G \cap \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ genau eine Gerade in der affinen Ebene $\mathbb{A}_2(\mathsf{k})$. Außerdem enthält der Schnitt $G \cap G_\infty$ genau einem Punkt:

$$\begin{aligned}
[x : y : t] \in G \cap G_\infty &\Leftrightarrow ax + by + ct = 0 \text{ und } t = 0 \\
&\Leftrightarrow ax + by = 0 \text{ und } t = 0 \\
&\Leftrightarrow [x : y : t] = [b, -a : 0].
\end{aligned}$$

Der Punkt $G \cap G_\infty$ ist **die Richtung der Gerade** G. Eine weitere Gerade G' mit der selben Richtung hat eine Gleichung der Form $ax + by + c't = 0$. Die Geraden $G \cap \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ und $G' \cap \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ sind parallel aber die Geraden G und G' treffen sich im Unendlichen:

$$G \cap G_\infty = \text{Richtung}(G) = \text{Richtung}(G') = G' \cap G_\infty = G \cap G'.$$

In der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(\mathsf{k})$ gibt es also eine Gerade mehr als in der affinen Ebene $\mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ die Ferngerade G_∞. Alle weitere Geraden G in $\mathbb{P}_2(\mathsf{k})$ treffen G_∞ in ihre Richtung.

3. *Kegelschnitte.* Sei $C = \{[x : y : t] \in \mathbb{P}_2(\mathsf{k}) \mid xy - t^2 = 0\}$. Dies ist wohl definiert, weil für $\lambda \in \mathsf{k}^\times$ gilt

$$\begin{aligned}
[x : y : t] \in C &\Leftrightarrow xy - t^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^2(xy - t^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda x)(\lambda y) - (\lambda t)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow [\lambda x : \lambda y : \lambda t] \in C.
\end{aligned}$$

Wir werden verschiedene Geraden als G_∞ betrachten.

(a). Für G_∞ definiert durch $t = 0$ gilt $\mathbb{A}_2(\mathsf{k}) \cap C = \{(x, y) \in \mathbb{A}_2(\mathsf{k}) \mid xy - 1 = 0\}$ und dies ist eine Hyperbola. Es gilt $G_\infty \cap C = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0]\}$ und diese Punkte sind die Richtungen der Asymptote von $C \cap \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$. Sei G die Gerade definiert durch $x - t = 0$. Dann ist $G \cap \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ parallel zu einer Asymptote von $C \cap \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ und es gilt

$$C \cap \mathbb{A}_2(\mathsf{k}) \cap G = \{[1 : 1 : 1]\} \text{ und } C \cap G_\infty \cap G = \{[0 : 1 : 0]\}.$$

Sei G' die Gerade definiert durch $x = 0$. Dann ist $G' \cap \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ die Asymptote von $C \cap \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ und es gilt

$$C \cap \mathbb{A}_2(\mathsf{k}) \cap G' = \emptyset \text{ und } C \cap G_\infty \cap G = \{[0 : 1 : 0]\}.$$

Der letze Punkte ist ein "Doppelpunkt" im Schnitt.

(b). Sei G_∞ definiert durch $x = 0$. Dann gilt $\mathbb{A}_2(\mathsf{k}) \cap C = \{(y, t) \in \mathbb{A}_2(\mathsf{k}) \mid y - t^2 = 0\}$ und dies ist eine Parabola. Es gilt $G_\infty \cap C = \{[0 : 1 : 0]\}$ und dies ist ein Doppelpunkt (die Gerade G_∞ ist eine Tangente der Parabola im Punkt $[0 : 1 : 0]$).

(c). Sei G_∞ definiert durch $x+y=0$. Wir betrachten ein Variabelwechsel $t'=x+y$, $x'=x$ und $y'=t$ (und also $x=x'$, $y=t'-x'$ und $t=y'$). Dann ist C definiert durch $x'(t'-x')-(y')^2=0$ also

$$(x')^2+(y')^2-x't'=0.$$

Es gilt $\mathbb{A}_2(\mathsf{k})\cap C=\{(x',y')\in\mathbb{A}_2(\mathsf{k})\mid (x')^2+(y')^2-x'=0\}$ und dies ist eine Ellipse. Es gilt für $\mathsf{k}=\mathbb{R}$: $G_\infty\cap C=\emptyset$.

Also sind Hyperbola, Parabola und Ellipse nur drei affine Darstellungen einer projektiven Kurve: ein Kegelschnitt.

6. Projektive algebraische Mengen

Sei k ein Körper. In diesem Kapitel setzen wir $R = \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$. Wir wollen projektive algebraische Mengen in $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ definieren. Das erste Problem kommt von folgender Bemerkung.

Bemerkung 6.0.4 Ein Element $f \in R = \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ definiert keine Funktion auf $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$: für $[x_0 : \cdots : x_n]$ hängt $P(x_0, \cdots, x_n)$ auf der Wahl von projektive Koordinaten. Zum Beispiel für $P = X_0$, $\lambda \in \mathsf{k}^\times$ mit $\lambda \neq 1$ und $[x_0 : \cdots : x_n] = [\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n]$ gilt

$$P(x_0, \cdots, x_n) = x_0 \neq \lambda x_0 = P(\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n).$$

6.1. Homogene Polynome

Dieses Problem werden wir dank homogenen Polynome lösen.

Definition 6.1.1 Ein Monom M in R ist ein Polynom der Form $M = X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}$. Der Grad von M ist $\deg M = i_0 + \cdots + i_n$.

2. Ein Polynom $P \in R$ heißt **homogen von Grad** d falls P endliche Summe von Monome von Grad d ist.

Lemma 6.1.2 Sei $P \in R$ ein homogenes Polynom von Grad d, sei $x \in \mathsf{k}^{n+1}$ und sei $\lambda \in \mathsf{k}$. Es gilt

$$P(\lambda x) = \lambda^d P(x).$$

Beweis. Übung. ∎

Lemma 6.1.3 Sei $P \in R$. Dann gibt es ein $r \geq 0$ und eindeutig bestimmte homogene Polynome $P_0, \cdots, P_r$ mit $\deg P_i = i$ so, dass

$$P = P_0 + \cdots + P_r.$$

Beweis. Übung. ∎

Beispiel 6.1.4 Die Zerlegung von $P = X_0^5 - X_0^2 X_1 + X_2 X_4 + X_5 + X_3^3 + X_2 X_5^2$ ist

$$P_0 = 0,\ P_1 = X_5,\ P_2 = X_2 X_4,\ P_3 = X_3^3 + X_2 X_5^2 - X_0^2 X_1,\ P_4 = 0 \text{ und } P_5 = X_0^5.$$

Definition 6.1.5 Sei $P \in R$. Die homogene Polynome $P_0, \cdots, P_r$ mit $\deg P_i = i$ so, dass $P = P_0 + \cdots + P_r$ heißen **homogene Komponente von** P.

Lemma 6.1.6 Seien $P, Q \in R$ und seien $P = P_0 + \cdots + P_r$ und $Q = Q_0 + \cdots + Q_s$ die Zerlegungen von P und Q in irreduzible Komponenten. Es gilt

1. $(P+Q)_i = P_i + Q_i$ für alle i.
1. $(PQ)_i = \sum_{k=0}^{i} P_k Q_{i-k}$ für alle i.
1. $(\lambda P)_i = \lambda P_i$ für alle i und $\lambda \in \mathsf{k}$. □

Lemma 6.1.7 Sei $P \in R$ und sei $P = P_0 + \cdots + P_r$ seine Zerlegung in homogene Komponente. Sei $x \in \mathsf{k}^{n+1}$ mit $P_i(x) = 0$ für alle $i \in [1, r]$.

Dann gilt $P_i(\lambda x) = 0$ für alle $i \in [1, r]$ und $\lambda \in \mathsf{k}$. Insbesondere gilt $P(\lambda x) = 0$ für alle $\lambda \in \mathsf{k}$. □

Beweis. Sei $\lambda \in \mathsf{k}$. Es gilt $P_i(\lambda x) = \lambda^i P_i(x) = 0$. ■

Definition 6.1.8 Sei $P \in R$ und sei $P = P_0 + \cdots + P_r$ seine Zerlegung in homogene Komponente. Ein Element $[x] \in \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ heißt **(projektive) Nullstelle** von P falls gilt $P_i(x) = 0$ für alle homogene Komponente P_i von P. Wir schreiben $P(x) = 0$.

Lemma 6.1.9 Sei k unendlich. Sei $P \in R$ und sei $P = P_0 + \cdots + P_r$ seine Zerlegung in homogene Komponente.

Sei $x \in \mathsf{k}^{n+1}$ mit $P(\lambda x) = 0$ für alle $\lambda \in \mathsf{k}$. Dann gilt $P_i(x) = 0$ für alle $i \in [1, r]$ also x ist eine projektive Nullstelle von P. □

Beweis. Es gilt $P = P_0 + \cdots + P_r$. Daraus folgt

$$P(\lambda x) = P_0(x) + \cdots + \lambda^r P_r(x).$$

Wir betrachten dies als Polynom $Q(\lambda)$ in λ. Es gilt $Q(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathsf{k}$ und da k unendlich ist folgt $Q = 0$. Es folgt $P_0(x) = 0 = \cdots = P_r(x)$. ■

6.2. projektive algebraische Mengen

Definition 6.2.1 Sei $S \subset \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$. Wir setzen

$$V_{\mathbb{P}}(S) = \{[x] \in \mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \mid P(x) = 0 \text{ für alle } P \in S\}.$$

Eine solche Menge heißt die von S definierte **projektive algebraische Menge**.

Bemerkung 6.2.2 1. Wenn es klar ist, dass $V_{\mathbb{P}}(S)$ eine **projektive** algebraische Menge ist, schreiben wir $V(S)$.

2. Sei $I = \langle S \rangle$ das von S erzeugte Ideal. Es gilt $V_{\mathbb{P}}(S) = V_{\mathbb{P}}(I)$.

3. Da R noethersch ist gibt es Polynome $Q_1, \cdots, Q_s$ mit $V_{\mathbb{P}}(S) = V_{\mathbb{P}}(Q_1, \cdots, Q_s)$.

4. Sei $Q_i = Q_{i,1} + \cdots + Q_{i,r_i}$ die Zerlegung von Q_i in homogene Komponente für alle $i \in [1, s]$. Per Definition gilt

$$Q_i = 0 \Leftrightarrow Q_{i,1}(x) = \cdots = Q_{i,r_i}(x) = 0.$$

Daraus folgt

$$V_{\mathbb{P}}(Q_1, \cdots, Q_r) = V_{\mathbb{P}}(Q_{i,j}, i \in [1, r], j \in [1, r_i]).$$

5. Jede projektive algebraische Menge ist also die Nullstellenmenge von endlich vielen homogenen Polynome.

Beispiel 6.2.3 1. Es gilt $V_{\mathbb{P}}((0)) = \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$.

2. Es gilt $V = V_{\mathbb{P}}(X_0, \cdots, X_n) = \emptyset$: falls $[x] = [x_0 : \cdots : x_n] \in V$ gilt $x_i = 0$ für alle i. Dies ist nicht mglich, da $x \in \mathsf{k}^{n+1} \setminus \{0\}$.

3. Sei $[x] = [x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. Es gilt (Übung)

$$V_{\mathbb{P}}(x_i X_j - x_j X_i, i, j \in [0, n]) = \{[x]\}.$$

Lemma 6.2.4 Seien $S \subset S' \in R$, sei $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Teilmengen von R und sei $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Ideale von R. Seien $I_1, \cdots I_r$ Ideale von R. Es gilt

1. $V_{\mathbb{P}}(S') \subset V_{\mathbb{P}}(S)$.

2. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_{\mathbb{P}}(S_\lambda) = V_{\mathbb{P}}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda)$.

3. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_{\mathbb{P}}(I_\lambda) = V_{\mathbb{P}}(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)$.

4. $V_{\mathbb{P}}(I_1) \cup \cdots \cup V_{\mathbb{P}}(I_r) = V_{\mathbb{P}}(I_1 \cap \cdots \cap I_r) = V_{\mathbb{P}}(I_1 \cdots I_r)$. □

Beweis. Übung. ■

Bemerkung 6.2.5 Insbesondere ist ein beliebiger Durschnitt von projektiven algebraischen Mengen eine projektive algebraische Menge und ist eine endliche Vereinigung von projektiven algebraischen Mengen eine projektive algebraische Menge.

Daraus folgt, dass die projektive algebraische Menge die Familie aller abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie sind.

Definition 6.2.6 Die **Zariski-Topologie** auf $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ ist die Topologie auf $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$, die die projektive algebraische Mengen als abgeschlossene Mengen hat.

Sei $V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. Die Zariski-Topologie auf V ist die von der Zariski-Topologie induzierte Topologie auf V.

Definition 6.2.7 Sei $V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. **Der Kegel von** V ist die Teilmenge

$$C(V) = p^{-1}(V) \cup \{0\} \subset \mathbb{A}_{n+1}(\mathsf{k}),$$

wobei $p : \mathsf{k}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ die kanonische Projektion ist.

6.3. Ideal einer projektiven algebraischen Menge

Definition 6.3.1 Sei $V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. **Das Ideal** $I(V)$ **von** V ist

$$I_{\mathbb{P}}(V) = \{P \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n] \mid P(x) = 0 \text{ für alle } x \in V\}.$$

Lemma 6.3.2 Es gilt

1. $I_{\mathbb{P}}(V)$ ist ein graduiertes Ideal von R.
2. Für $V \subset W$ gilt $I_{\mathbb{P}}(W) \subset I_{\mathbb{P}}(V)$.
3. Es gilt $V \subset V_{\mathbb{P}}(I_{\mathbb{P}}(V))$.
4. Es gilt V algebraisch $\Leftrightarrow V = V_{\mathbb{P}}(I_{\mathbb{P}}(V))$
5. Für $I \subset R$ ein Ideal gilt $I \subset I_{\mathbb{P}}(V_{\mathbb{P}}(I))$.
6. Es gilt $I_{\mathbb{P}}(\emptyset) = R$.
7. Für k unendlich gilt $I_{\mathbb{P}}(\mathbb{P}_n(\mathsf{k})) = (0)$.
8. Das Ideal $I_{\mathbb{P}}(V)$ ist radikal also $I_{\mathbb{P}}(V) = \sqrt{I_{\mathbb{P}}(V)}$. □

Beweis. Übung. ■

Lemma 6.3.3 Sei $V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. Für die Zariski-Topologie gilt

1. $\overline{V} = V_{\mathbb{P}}(I_{\mathbb{P}}(V))$.
2. V ist noethersch. □

Beweis. Übung. ■

Korollar 6.3.4 Eine Teilmenge $V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ hat eine endliche Zerlegung in irreduzible Komponente.

Proposition 6.3.5 Sei $V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ eine projektive algebraische Menge. Es gilt

$$V \text{ irreduzibel } \Leftrightarrow I_{\mathbb{P}}(V) \text{ ist ein Primideal.}$$

Beweis. Übung. ■

6.4. Graduierte Ideale und Ringe

Zur Erinnerung aus der Vorlesung LAII.

Definition 6.4.1 Sei A eine k-Algebra und seien U und V zwei Teilmengen von A. Dann schreiben wir

$$UV = \{uv \in A \mid u \in U,\ v \in V\}.$$

Definition 6.4.2 Sei A eine k-Algebra. Eine **Graduierung** von A ist eine Familie $(A_n)_{n\geq 0}$ von Unterräume von A so, dass

$$A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n \text{ und } A_i A_j \subset A_{i+j}$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Eine k-Algebra mit einer Graduierung heißt **graduierte k-Algebra**.

Beispiel 6.4.3 1. Sei A eine k-Algebra und sei $A_0 = A$ und $A_n = 0$ für alle $n > 0$. Dann ist A eine graduierte k-Algebra. Diese Graduierung heißt die **triviale Graduierung**.

2. Sei $A = \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ und $A_d = \{P \in A \mid \deg(P) = d\} \cup \{0\}$. Dann ist $(A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ eine Graduierung von A.

Definition 6.4.4 Seien A und B zwei graduierte Algebren. Ein Algebrahomomorphismus $f : A \to B$ heißt **graduiert** falls $f(A_n) \subset B_n$ für alle $n \geq 0$.

Definition 6.4.5 Sei A eine Graduierte k-Algebra.

(i) Eine Unteralgebra B von A heißt **graduierte Unteralgebra** falls

$$B = \bigoplus_{n\geq 0} (B \cap A_n).$$

(ii) Ein Ideal I von A heißt **graduiertes Ideal** falls

$$I = \bigoplus_{n\geq 0} (I \cap A_n).$$

Lemma 6.4.6 Sei A eine graduierte k-Algebra und I ein graduietes Ideal. Dann ist A/I eine graduierte Algebra und $p : A \to A/I$ ein graduierter Algebrahomomorphismus. □

Beweis. Übung. ■

Lemma 6.4.7 Sei $f : A \to B$ ein graduierter Algebrahomomorphismus. Dann ist $I = \mathrm{Ker} f$ ein graduiertes Ideal. □

Beweis. Übung. ■

Definition 6.4.8 1. Sei A eine graduierte k-Algebra. Ein Element $a \in A_n$ heißt homogen von Grad n.

2. Sei $a \in A$. Es gilt

$$a = \sum_{n \neq 0} a_n$$

wobei $a_n \in A_n$ und a_n eindeutig bestimmt ist. Das Element a_n heißt **Komponente von Grad n von a**.

Lemma 6.4.9 Sei A eine graduierte k-Algebra und sei I ein Ideal. Dann ist I genau dann graduiert, wenn für alle $a \in I$ gilt $a_n \in I$ (wobei a_n die Komponente von Grad n von a ist). □

Beweis. Übung. ■

Lemma 6.4.10 Sei A eine graduierte k-Algebra.

1. Sei E eine Teilmenge von A welche aus homogene Elemente besteht. Dann ist (E) ein graduiertes Ideal.

2. Sei I ein graduiertes Ideal. Dann gibt es eine Teilmenge E welche aus homogene Elemente besteht mit $I = (E)$. □

Beweis. Übung. ■

Lemma 6.4.11 Sei R eine graduierte k-Algebra. Dann ist

$$R_+ = \bigoplus_{n>0} R_n$$

ein graduiertes Ideal und es gilt $R/R_+ \simeq R_0$. □

Beweis. Übung. ■

Beispiel 6.4.12 Sei $R = \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ mit der Graduierung dank dem Grad. Dann ist gilt $R_0 = \mathsf{k}$ und

$$R_+ = (X_0, \cdots, X_n) = \oplus_{n>0} R_n.$$

Es gilt $R/R_+ \simeq R_0 = \mathsf{k}$.

6.5. Projektiver Nullstellensatz

In diesem Abschnitt ist k algebraisch abgeschlossen.

Satz 6.5.1 (Projektiver Nullstellensatz) Sei k algebraisch abgeschlossen. Sei I ein homogenes Ideal von $\mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ und sei $V = V_{\mathbb{P}}(I)$.

1. Es gilt

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{P}}(I) = \emptyset \quad &\Leftrightarrow \exists N \geq 0 \text{ mit } (X_0, \cdots, X_n)^N \subset I \\ &\Leftrightarrow (X_0, \cdots, X_n) = R_+ \subset \sqrt{I}. \end{aligned}$$

2. Falls $V_p(I) \neq \emptyset$ gilt $I_{\mathbb{P}}(V_{\mathbb{P}}(I)) = \sqrt{I}$. □

Beweis. Für $I = R$ sind alle Aussagen klar. Wir können also $I \subsetneq R$ annehmen.

Es folgt $I \subset R_+ = (X_0, \cdots, X_n)$: falls es ein $P \in I \setminus R_+$ gibt, folgt $0 \neq P_0 \subset I$ (weil I graduiert ist). Aber $0 \neq P_0 \in \mathsf{k}$ ist ein konstantes Polynom und es folgt $1 \in I$ also $I = R$. Ein Widerspruch.

Sei $C(V) = p^{-1}(V) \cup \{0\} \subset \mathbb{A}_{n+1}(\mathsf{k})$ der Kegel über V. Es gilt (k algebraisch abgeschlossen also unendlich und I ist dank homogene Polynome erzeugt)

$$\begin{aligned} I(C(V)) &= \{P \in R \mid P(0) = 0 \text{ und } P(\lambda x) = 0 \text{ für alle } [x] \in V \text{ und alle } \lambda \in \mathsf{k}\} \\ &= \{P \in R \mid P(0) = 0 \text{ und } P([x]) = 0 \text{ für alle } [x] \in V\} \\ &= I_{\mathbb{P}}(V) \cap I(\{0\}). \end{aligned}$$

Daraus folgt $I(C(V)) \subset I_{\mathbb{P}}(V)$. Es gilt auch

$$\begin{aligned} C(V) &= p^{-1}(V) \cup \{0\} \\ &= \{x \in \mathbb{A}_{n+1}(\mathsf{k}) \setminus \{0\} \mid [x] \in V\} \cup \{0\} \\ &= \{x \in \mathbb{A}_{n+1}(\mathsf{k}) \setminus \{0\} \mid P([x]) = 0 \text{ für alle } P \in I\} \cup \{0\} \\ &= \{x \in \mathbb{A}_{n+1}(\mathsf{k}) \setminus \{0\} \mid P(x) = 0 \text{ für alle } P \in I\} \cup \{0\} \ (\mathsf{k} = \bar{\mathsf{k}} \text{ und } I \text{ graduiert}) \\ &= V(I) \setminus \{0\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

Es gilt also $V(I) \subset C(V)$.

1. Wir zeigen

$$V_{\mathbb{P}}(I) = \emptyset \Leftrightarrow (X_0, \cdots, X_n) = R_+ \subset \sqrt{I}.$$

Falls $I = R$ gilt $V_{\mathbb{P}}(I) = \emptyset$. Wir können also annehmen, dass $I \subsetneq R$.

Angenommen $V = \emptyset$. Es gilt $C(V) = \{0\}$ und also $R_+ = (X_0, \cdots, X_n) = I(C(V)) \subset I(V(I)) = \sqrt{I}$ (Nullstellensätze 2 und 4).

Umgekehrt nehmen wir an, dass $R_+ \subset \sqrt{I}$. Für jedes $i \in [0, n]$ gibt es also ein N_i mit $X_i^{N_i} \in I$. Für $[x_0 : \cdots : x_n] \in V = V(I)$ gilt also $X_i^{N_i}([x_0 : \cdots : x_n]) = 0$ also $x_i^{N_i} = 0$ und $x_i = 0$. Ein Widerspruch also $V = \emptyset$.

Wir zeigen

$$(\exists N \geq 0 \text{ mit } (X_0, \cdots, X_n)^N \subset I) \Leftrightarrow (X_0, \cdots, X_n) = R_+ \subset \sqrt{I}.$$

Wenn $R_+ \subset \sqrt{I}$ folgt, dass es für jedes $i \in [0, n]$ ein $N_i \geq 0$ gibt mit $X_i^{N_i} \in I$. Sei $N = N_0 + \cdots + N_n$. Es folgt $(X_0, \cdots, X_n)^N \subset I$.

Umgekehrt, falls $(X_0, \cdots, X_n)^N \subset I$ gilt, gilt auch $X_i^N \in I$ und also $X_i \in \sqrt{I}$ für alle i also $R_+ \subset \sqrt{I}$.

2. Wir zeigen, dass $0 \in V(I)$ gilt für $V \neq \emptyset$. Sei $[x] \in V$ und sei $P \in I$. Es gilt $P([x]) = 0$ also ($\bar{\mathsf{k}} = \mathsf{k}$) $P(\lambda x) = 0$ für alle $\lambda \in \mathsf{k}$ und insbesondere $P(0) = 0$. Es folgt $0 \in V(I)$.

Für $V \neq \emptyset$ zeigen wir $I_{\mathbb{P}}(V) \subset R_+ = (X_0, \cdots, X_n)$: falls es ein $P \in I_{\mathbb{P}}(V) \setminus R_+$ gibt, folgt $0 \neq P_0 \subset I_{\mathbb{P}}(V)$ (weil $I_{\mathbb{P}}(V)$ graduiert ist). Aber $0 \neq P_0 \in \mathsf{k}$ ist ein konstantes Polynom und es folgt $1 \in I_{\mathbb{P}}(V)$ also $I_{\mathbb{P}}(V) = R$. Es folgt $V = V_{\mathbb{P}}(I_{\mathbb{P}}(V)) = V_{\mathbb{P}}(R) = \emptyset$. Ein Widerspruch.

Daraus folgt, $I(C(V)) = I_{\mathbb{P}}(V)$ und $C(V) = V(I)$. Es gilt also $I_{\mathbb{P}}(V_{\mathbb{P}}(I)) = I_{\mathbb{P}}(V) = I(C(V)) = I(V(I)) = \sqrt{I}$ (Nullstellensatz 4). ∎

Korollar 6.5.2 Sei k algebraisch abgeschlossen.

1. Es gibt eine Bijektion $V \mapsto I_{\mathbb{P}}(V)$ mit Umkehrabbildung $I \mapsto V_{\mathbb{P}}(I)$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{nicht leere projektive} \\ \text{algebraische Menge} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{homogene radikale von } R, \\ \text{die } R_+ \text{ nicht enthalten} \end{array} \right\}$$

2. Es gilt V irreduzibel $\Leftrightarrow I_{\mathbb{P}}(V)$ Primideal.

Bemerkung 6.5.3 Das Ideal $I_{\mathbb{P}}(\{P\}$ eines Punktes ist nicht mehr maximal in R.

6.6. Graduierte Ringe

Definition 6.6.1 Sei $V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. **Der graduierte Ring von** V ist

$$\Gamma_{\mathbb{P}}(V) = \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]/I_{\mathbb{P}}(V).$$

Bemerkung 6.6.2 Da $I_{\mathbb{P}}(V)$ ein radikales graduiertes Ideal ist, ist $\Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ eine reduzierte graduierte k-Algebra.

Bemerkung 6.6.3 Ein Element $f \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ definiert keine Funktion auf V: es gilt $f = [P] \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]/I_{\mathbb{P}}(V)$ für ein $P \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ und für $x \in V$ und $\lambda \in \mathsf{k}^\times$ gilt $P(x) \neq P(\lambda x)$.

Die Bedigung $P(x) = 0$ ist aber wohl definiert.

Definition 6.6.4 Sei $V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ und $W \subset V$. **Das Ideal von** W **in** V ist

$$I_{\mathbb{P},V}(W) = \{[P] \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V) \mid P(x) = 0 \text{ für alle } x \in W\}.$$

Bemerkung 6.6.5 Sei $W \subset V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$.

1. Es gilt $I_{\mathbb{P},V}(W) = \pi(I_{\mathbb{P}}(W))$ und $\pi^{-1}(I_{\mathbb{P},V}(W)) = I_{\mathbb{P}}(W)$, wobei $\pi : \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n] \to \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ die kanonische Projektion ist.

2. Es folgt $\Gamma_{\mathbb{P}}(W) = \Gamma_{\mathbb{P}}(V)/I_{\mathbb{P},V}(W)$,

3. $I_{\mathbb{P},V}(W)$ ist ein radikales Ideal,

4. (W irreduzibel $\Leftrightarrow$ $I_{\mathbb{P},V}(W)$ Primideal)

Proposition 6.6.6 Sei k algebraisch abgeschlossen und $V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ eine projektive algebraische Menge.

Es gibt eine absteigende Bijektion $V \mapsto I_{\mathbb{P},V}(W)$ mit Umkehrabbildung $I \mapsto V_{\mathbb{P}}(\pi^{-1}(I))$ zwischen die Menge {nicht leere projektive algebraische Mengen in V} und die Menge {radikale Ideale in $\Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ die $\pi(R_+)$ nicht enthalten}.

Diese Bijektion bildet irreduzible Mengen auf Primideale.

6.7. Standardmäßige offene Teilmengen

Definition 6.7.1 Sei $V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ eine projektive algebraische Menge und sei $f \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ ein homogenes Element (*i.e.* $f = [P]$ mit $P \in R$ ein homogenes Polynom). **Die von** f **definierte offene Teilmenge von** V ist

$$D_V^+(f) = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}.$$

Lemma 6.7.2 $D_V^+(f)$ ist eine offene Teilmenge für die Zariski-Topologie. □

Beweis. Sei $f = [P]$ mit $P \in R$. Das Komplement ist $V \cap V_{\mathbb{P}}(P)$ also abgeschlossen. ■

Proposition 6.7.3 Seu $V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ eine projektive algebraische Menge. Jede offene Teilmenge $U \subset V$ hat eine endliche Überdeckung mit standardmäßigen offenen Teilmengen.

Beweis. Sei $W = V \setminus U$. Dann ist W abgeschlossen also eine projektive algebraische Menge. Sei $I = I_{\mathbb{P},V}(W)$ und $J = I_{\mathbb{P}}(W)$. Da R noethersch ist und J ein graduiertes Ideal ist, folgt, dass es homogene Polynome $P_1, \cdots, P_r$ gibt mit $J(P_1, \cdots, P_r)$. Es gilt also $W = V \cap (V_{\mathbb{P}}(P_1) \cap \cdots \cap V_{\mathbb{P}}(P_r))$. Daraus folgt $U = V \setminus W = D_V^+(P_1) \cup \cdots \cup D_V^+(P_r)$. ■

Beispiel 6.7.4 Die standardmäßige offene Teilmengen $D^+(X_i) = D^+_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}(X_i)$ für alle $i \in [0, n]$ bilden eine endliche offene Überdeckung von $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. Diese offene Teilmengen sind auch isomorph to $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$.

Bemerkung 6.7.5 Für f homogen von Grad 0 ist f eine Konstante und also

$$D^+_V(f) = \begin{cases} \emptyset \text{ für } f \neq 0 \\ V \text{ für } f = 0 \end{cases}$$

Wir werden also nur $D^+_V(f)$ für $\deg(f) > 0$ betrachten.

Bemerkung 6.7.6 Hier sind die Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen (affine) algebraische Menge und projektive algebraische Mengen:

- Polynome $\mapsto$ homogene Polynome,
- k-Algebren $\mapsto$ graduierte k-Algebren,
- Elemente in $\Gamma_h(V)$ sind keine Funktionen mehr,
- Das Ideal $R_+ = (X_0, \cdots, X_n)$ spielt eine besondere Rolle,
- Dank dem Schnitt mit $D^+(X_i)$ erzetzt man projektive Geometrie mit affine Geometrie.
- Sei V eine Projektive algebraische Menge.

  Abgesehen von Konstanten hat eine irredutible projektive Menge keine polynomiale Funktion: Elemente in $\Gamma_h(V)$ definieren keine Funktion. Die offene Teilmenge $V \cap D^+(X_i) \subset D^+(X_i) = \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ ist aber eine affine algebraische Menge und hat also polynomiale Funktionen.

Teil III.

Algebraische Varietäten

7. Garben

Wir wollen jetzt (affine) algebraische Mengen und projektive algebraische Mengen als Objekte von *einer* Kategorie betrachten: die Kategorie aller algebraischen Varietäten. Dafür brauchen wir eine gemeinsame Definition. Dies werden wir dank geringte Räume erreichen und dafür brauchen wir *Garben*.

Ein Unterschied zwischen $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ ist, dass $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ viele polynomiale Funktionen hat aber $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ nur die konstante polynomiale Funktionen besitzt. Andererseits sind $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ und $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ lokal isomorph also haben lokal viele Funktionen. Wir wollen also Funktionen nicht nur golbal sondern auch lokal betrachten.

7.1. Garben von Funktionen

Definition 7.1.1 Sei X ein topologischer Raum und set $\mathbf{M}$ eine Menge. **Eine Garbe von M-wertigen Funktionen $\mathcal{F}$ über X** ist eine Zuordnung $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ für jede offene Teilenge $U \subset X$, wobei $\mathcal{F}(U)$ eine Teilmenge von $\mathbf{Abb}(U, \mathbf{M})$ aller Abbildungen von U nach $\mathbf{M}$ so, dass die folgende zwei Axiome erfüllt sind:

(E) **Einschränkung.** Für $V \subset U$ zwei offene Teilmengen bildet die Einschränkung $r_{V,U}(f) = f|_V$ die Menge $\mathcal{F}(U)$ auf $\mathcal{F}(U)$ (*i.e.* für $f \in \mathcal{F}(U)$ gilt $f|_V \in \mathcal{F}(V)$).

(V) **Verkleben.** Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von einer offenen Teilmenge U. Für jede Familie $(f_i)_{i\in I}$ mit $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ für alle $i \in I$ so, dass $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_i|_{U_i\cap U_j}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f_i = f|_{U_i}$ für alle $i \in I$.

Bemerkung 7.1.2 Im Axiom (V) ist es immer wahr, dass es eine Funktion $f : U \to \mathbf{M}$ gibt mit $f|_{U_i} = f_i$: Man setze $f(x) = f_i(x)$ für $x \in U_i$ und dies ist wohl definiert, weil falls $x \in U_i$ und $x \in U_j$ dann gilt $f(x) = f_i(x) = f_j(x) = f(x)$. Die Aussage ist hier, dass f in $\mathcal{F}(U)$ enthalten ist.

Was das zweite Axiome besagt ist, dass mann die Eigenschaft $f \in \mathcal{F}(U)$ lokal überprüfen kann: falls es eine Überdeckung gibt so, dass $f|_{U_i}$ in $\mathcal{F}(U_i)$, dann auch $f \in \mathcal{F}(U)$.

Beispiel 7.1.3 Es gibt viele Beispiel von solche Garben.

1. Für $U \mapsto \mathcal{F}(U) = \mathbf{Abb}(U, \mathbf{M})$ sind beide Axiome erfüllt. Dies ist die **Garbe aller M-wertigen Funktionen**.

2. Die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{F}(U) = C^0(U, \mathbb{R})$ ist auch eine Garbe: die Einschränkung einer stetigen Funktion ist immer noch stetig (Axiom (E)) und eine Funktion die lokal stetig ist eine stetige Funktion (Axiom (V)).

3. Analog ist die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{F}(U) = C^0(U, \mathbb{C})$ auch eine Garbe.

4. Für $X \subset \mathbb{R}^n$ ist die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{F}(U) = C^k(U, \mathbb{C})$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ auch eine Garbe.

5. Für $X \subset \mathbb{C}^n$ ist die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{F}(U) = \mathbf{Hol}(U, \mathbb{C})$ auch eine Garbe: die Garbe aller holomorphen Funktionen.

Definition 7.1.4 Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von Funktionen über X. Wir setzen

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U).$$

Die Elemente in $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F})$ heißen **Schnitte von $\mathcal{F}$ über** U. Die Elemente aus $\mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ heißen **globale Schnitten von** $\mathcal{F}$.

Bemerkung 7.1.5 Die Einschränkung $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ hat die folgende Eigenschaften:

- Es gilt $r_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$.
- Für $W \subset V \subset U$ offene Teilmengen gilt $r_{W,U} = r_{W,V} \circ r_{V,U}$.

7.2. Prägarben und Garben

Wir arbeiten jetzt ohne Funktionen. Die Existenz der Abbildung $r_{V,U}$ mussen wir also als Axiom hinzufügen.

Definition 7.2.1 Sei X ein topologischer Raum.

1. **Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ über** X ist

- eine Zuordnung $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ für jede offene Teilenge $U \subset X$, wobei $\mathcal{F}(U)$ eine Menge ist,
- für jede offene Teilmengen $U \subset V$ eine Abbildung $r_{U,V} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V)$

so, dass gilt

(a) Für $W \subset V \subset U$ offene Teilmengen gilt $r_{W,U} = r_{W,V} \circ r_{V,U}$ und

(b) $r_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$.

Für $f \in \mathcal{F}(U)$ und $V \subset U$ offen, setzen wir $f|_V = r_{V,U}(f)$.

2. Eine Prägarbe heißt **Garbe** falls das Verkleben Axiom (V) gilt:

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von einer offenen Teilmenge U. Für jede Familie $(f_i)_{i\in I}$ mit $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ für alle $i \in I$ so, dass $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_i|_{U_i\cap U_j}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Elemente $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f_i = f|_{U_i}$ für alle $i \in I$.

Beispiel 7.2.2 1. Sei X ein topologischer Raum. Die Prägarbe

$$\mathcal{F}(U) = \{\text{konstante Abbildungen } f : U \to \mathbf{M}\}$$

ist nicht immer eine Garbe.

Zum Beispiel für $\mathbf{M} = \mathbb{R}$ und $X =]0,1[\cup]2,3[$ mit der üblichen Topologie gilt (V) nicht: Sei $U_1 =]0,1[$ und $U_2 =]2,3[$. Dann ist (U_1, U_2) eine Überdeckung von X. Seien

- $f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ definiert durch $f_1(x) = 0$ für $x \in U_1$ und
- $f_2 \in \mathcal{F}(U_2)$ definiert durch $f_2(x) = 1$ für $x \in U_2$.

Es gibt keine Funktion $f \in \mathcal{F}(X)$ mit $f|_{U_1} = f_1$ und $f|_{U_2} = f_2$: die einzige Funktion f mit $f|_{U_1} = f_1$ und $f|_{U_2} = f_2$ ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in U_1 \\ 1 & \text{für } x \in U_2. \end{cases}$$

Diese Funktion ist aber nicht konstant also $f \notin \mathcal{F}(U)$.

Definition 7.2.3 1. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe. Eine **Unterprägarbe** $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$ ist eine Zuordnung $U \mapsto \mathcal{G}(U)$, wobei $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ für alle U mit $r_{V,U}(\mathcal{G}(U)) = \mathcal{G}(V)$ für alle $V \subset U$ offen *i.e.* für alle $V \subset U$ offen gilt

$$(f \in \mathcal{G}(U) \Rightarrow f|_V \in \mathcal{G}(V)).$$

2. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe und sei $\mathcal{G}$ eine Unterprägarbe von $\mathcal{F}$. Falls $\mathcal{G}$ eine Garbe ist heißt $\mathcal{G}$ eine **Untergarbe** von $\mathcal{F}$.

Beispiel 7.2.4 Sei $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}_P$ die Garbe aller Abbildungen mit der Eigenschaft P. Dann sind die Enthaltungen Untergarben:

$$\mathcal{F}_{\text{Polynomial}} \subset \mathcal{F}_{\text{Holomorph}} \subset \mathcal{F}_{C^\infty} \subset \mathcal{F}_{C^k} \subset \mathcal{F}_{\text{Stetig}} \subset \mathcal{F}_{\emptyset}.$$

Bemerkung 7.2.5 Wenn Sie die Garben von Funktionen bevorzügen ist es kein Problem:

Proposition 7.2.6 Sei $\mathcal{F}$ eine (Prä)garbe. Dann gibt es eine Menge $\mathbf{M}$ so, dass $\mathcal{F}$ als (Prä)garbe von $\mathbf{M}$-wertigen Funktionen über X darstellbar ist.

Beweis. Übung (schwer ohne Hinweis).

Definition 7.2.7 Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe über X. Sei U eine offene Teilmenge von X. Dann können wir die **Einschränkung** $\mathcal{F}|_U$ von $\mathcal{F}$ auf U als $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ für jede offene Teilmenge $V \subset U$ definieren.

Lemma 7.2.8 Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe über X. Dann ist die Einschränkung $\mathcal{F}|_U$ eine Garbe über U. □

Beweis. Übung. ■

7.3. Vergarbung und Konstruktion von Garben

Proposition 7.3.1 Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe. Dann gibt es eine kleinste Garbe $\mathcal{F}^+$ so, dass $\mathcal{F}$ eine Untergarbe von $\mathcal{F}^+$ ist.

Beweis. Wir geben einen Beweis falls $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von $\mathbf{M}$-wertigen Funktionen ist. Wir setzen für jede offene Teilmenge U:

$$\mathcal{F}^+(U) = \left\{ f : U \to \mathbf{M} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{für alle } x \in U, \text{ gibt es ein } V \text{ offen mit} \\ x \in V \subset U \text{ und } f|_V \in \mathcal{F}(V) \end{array} \right\}.$$

Dies ist eine Prägarbe mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^+$. Außerdem gilt (V): Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von U und seien $f_i \in \mathcal{F}^+(U_i)$ mit $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$. Dann gibt es eine eindeutige Funktion $f : U \to \mathbf{M}$ mit $f|_{U_i} = f_i$. Per Definition gilt aber $f \in \mathcal{F}^+(U)$. Diese Garbe ist offensichtlich die kleinste Garbe von $\mathbf{M}$-wertigen Funktionen die $\mathcal{F}$ enthält. ■

Definition 7.3.2 Die Operation $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$ heißt **Vergarbung**. Die Garbe $\mathcal{F}^+$ heißt **die zu $\mathcal{F}$ assozierte Garbe oder die Vergarbung von $\mathcal{F}$**.

Bemerkung 7.3.3 Die Vergarbung ist einfach die Eigenschaft $f \in \mathcal{F}(U)$ lokal zu beschreiben. Dies ist ein sehr übliches Verfahren: eine funktion ist stetig, wenn diese Funktion auf eine Umgebung stetig ist, usw.

Lemma 7.3.4 Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe. Dann gilt $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}$. □

Beweis. Übung. ■

Lemma 7.3.5 Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{U}$ eine Basis der Topologie. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe und $\mathcal{G}$ eine Prägarbe mit $\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U)$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Dann gilt $\mathcal{F} = \mathcal{G}^+$. □

Beweis. Sei V eine offene Teilmenge. Wir zeigen

$$\mathcal{F}(V) = \mathcal{G}^+(V) = \left\{ f : V \to \mathbf{M} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{für alle } x \in V, \text{ gibt es ein } W \text{ offen mit} \\ x \in W \subset V \text{ und } f|_W \in \mathcal{G}(W) \end{array} \right\}.$$

Sei $f \in \mathcal{G}^+(V)$, sei $x \in V$ und sei $W \subset V$ offen mit $x \in W$ so, dass $f|_W \in \mathcal{G}(W) = \mathcal{F}(W)$. Dann ist die Familie aller $W \in \mathcal{U}$ mit $W \subset V$ eine Überdeckung von V und nach (V) gilt $f \in \mathcal{F}(V)$.

Umgekehrt, sei $f \in \mathcal{F}(V)$ und sei $x \in V$. Sei $W \in \mathcal{U}$ mit $x \in W \subset V$. Dann gilt nach (E): $f|_W \in \mathcal{F}(W) = \mathcal{G}(W)$. Nach der Definition von $\mathcal{G}^=$ folgt $f \in \mathcal{G}^+(V)$. ■

Lemma 7.3.6 Sei $\mathbf{M}$ eine Menge und sei X ein topologischer Raum. Sei $(U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine Basis der Topologie und sei $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ eine Zuordnung definiert für jedes $U \in \mathcal{U}$ und so, dass $\mathcal{F}(U)$ eine Menge von $\mathbf{M}$-wertigen Abbildungen ist (*i.e.* $\mathcal{F}(U) \subset \mathbf{Abb}(U, \mathbf{M})$) und

(A) Für $U, V \in \mathcal{U}$ mit $V \subset U$ gilt $(f \in \mathcal{F}(U) \Rightarrow f|_V \in \mathcal{F}(V))$.

(B) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von einer offenen Teilmenge U, wobei $U, U_i \in \mathcal{U}$ für alle $i \in I$. Für jede Funktion $f : U \to \mathbf{M}$ mit $f|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ gilt $f \in \mathcal{F}(U)$.

Dann gibt es eine eindeutige Garbe von $\mathbf{M}$-wertigen Funktionen $\overline{\mathcal{F}}$ mit $\overline{\mathcal{F}}(U) = \mathcal{F}(U)$ für jedes $U \in \mathcal{U}$. □

Beispiel 7.3.7 Sei $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie und $\mathcal{U}$ die Familie aller Intervalle $]a, b[$ in $\mathbb{R}$ (mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Damit kann man die Garbe aller stetige Funktionen definieren: sei

$$]a, b[\mapsto \mathcal{F}(]a, b[) = \{f :]a, b[\to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}.$$

Dann wird $\overline{\mathcal{F}}$ die Garbe aller stetigen Abbildungen sein.

Beweis. Sei W eine offene Teilmenge. Wir setzen

$$\overline{\mathcal{F}}(W) = \{f : W \to \mathbf{M} \mid f|_U \in \mathcal{F}(U) \text{ für alle } U \in \mathcal{U} \text{ mit } U \subset W\}.$$

Für $W \in \mathcal{U}$ zeigen wir $\overline{\mathcal{F}}(W) = \mathcal{F}(W)$. Sei $f \in \mathcal{F}(W)$ und sei $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset W$. Nach (A) gilt $f|_U \in \mathcal{F}(U)$ und also $f \in \overline{\mathcal{F}}(W)$. Umgekehrt, sei $f \in \overline{\mathcal{F}}(W)$ und sei $(W_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von W, wobei $W_i \in \mathcal{U}$ für alle $i \in I$. Es gilt $f|_{W_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ (nach der Definition von $\overline{\mathcal{F}}$ und also nach (B) gilt $f \in \mathcal{F}(W)$.

Wir zeigen, dass $\overline{F}$ eine Garbe ist: sei $V \subset W$ offen und sei $f \in \overline{\mathcal{F}}(W)$. Sei $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset V$. Dann gilt $U \subset V \subset W$ und $(f|_V)|_U = f|_U \in \mathcal{F}(U)$. Daraus folgt $f|_V \in \overline{\mathcal{F}}(V)$.

Sei $(W_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von W und seien $f_i \in \overline{\mathcal{F}}(W_i)$ mit $f_i|_{W_i \cap W_j} = f_j|_{W_i \cap W_j}$. Sei $f : W \to \mathbf{M}$ die eindeutige Funktion definiert durch $f|_{W_i} = f_i$. Wir zeigen, dass $f \in \overline{\mathcal{F}}(W)$. Sei also $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset W$ es genügt zu zeigen, dass $f|_U \in \mathcal{F}(U)$. Die Familie $(W_i)_{i \in I}$ ist eine Überdeckung von W also ist die Familie $(W_i \cap U)_{i \in I}$

eine Überdeckung von U und die Familie aller $V \in \mathcal{U}$ so, dass es ein $i \in I$ gibt mit $V \subset U \cap W_i$ ist eine verfeinerte Überdeckung von U. Für so ein $V \in \mathcal{U}$ mit $V \subset U \cap W_i$ gilt $(f|_U)|_V = f|_V = (f|_{W_i})|_V \in \mathcal{F}(V)$, weil $f|_{W_i} = f_i \in \overline{\mathcal{F}}(W_i)$. Daraus folgt $f|_U \in \overline{\mathcal{F}}(U) = \mathcal{F}(U)$ und die Aussage. ■

7.4. Morphismen von Garben

Definition 7.4.1 Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben. Ein **Morphismus von (Prä)garben** $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine Zuordnung $U \mapsto \psi_U$, wobei $\psi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ eine Abbildung ist mit $\psi_U \circ r^{\mathcal{F}}_{V,U} = r^{\mathcal{G}}_{V,U} \circ \psi_U$ für alle $V \subset U$ offen *i.e.* das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "r^{\mathcal{F}}_{V,U}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r^{\mathcal{G}}_{V,U}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\psi_V"'] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beispiel 7.4.2 Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Dann ist die Einbettung $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{G}(U)$ ein Morphismus von Prägarben.

Definition 7.4.3 Seien X und Y topologische Räume, sei $\varphi : X \to Y$ eine stetige Abbildung und sei $\mathcal{F}$ eine Garben über X. **Das Direktbild $\varphi_*\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$** ist die Zuordnung

$$U \mapsto \varphi_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U)),$$

wobei U eine offene Teilmenge von Y ist mit der Abbildungen $r_{V,U} : \varphi_*\mathcal{F}(U) \to \varphi_*\mathcal{F}(V)$ definiert durch $r_{V,U}(f) = f|_{\varphi^{-1}(V)}$ für alle $V \subset U \subset Y$ offen.

Lemma 7.4.4 Das Direktbild ist eine Garbe über Y. □

Beweis. Seien $W \subset V \subset U$ offen und sei $f \in \varphi_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$. Dann gilt $r_{U,U}(f) = f|_{\varphi^{-1}(U)} = f$ und $r_{W,V}(r_{V,U}(f)) = (f|_{\varphi^{-1}(V)})|_{\varphi^{-1}(W)} = f|_{\varphi^{-1}(W)} = r_{W,U}(f)$.

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von U und sei $f_i \in \varphi_*\mathcal{F}(U_i)$ für alle $i \in I$ mit $r_{U_i \cap U_j, U_i}(f_i) = r_{U_i \cap U_j, U_j}(f_j)$. Dann gilt $f_i \in \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U_i))$ für alle $i \in I$. Es gilt auch $f_i|_{\varphi^{-1}(U_i) \cap \varphi^{-1}(U_j)} = f|_{\varphi^{-1}(U_i) \cap \varphi^{-1}(U_j)}$. Da $(\varphi^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine Überdeckung von $\varphi^{-1}(U)$ ist folgt, nach (V) für $\mathcal{F}$, dass es ein $f \in \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$ gibt mit $f|_{\varphi^{-1}(U_i)} = f_i$. Es folgt $r_{U_i,U}(f) = f_i \in \varphi_*(U_i)$ also (V) gilt für $\varphi_*\mathcal{F}$. ■

7.5. Ringgarben

Definition 7.5.1 Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe über X.

1. Die Garbe $\mathcal{F}$ heißt **Gruppengarbe** falls gilt

- $\mathcal{F}(U)$ ist eine Gruppe für alle $U \subset X$ offen und
- $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ ist ein Gruppenhomomorphismus für alle $V \subset U \subset X$ offen.

Wenn $\mathcal{F}(U)$ abelsch für alle U ist, heißt $\mathcal{F}$ **Garbe abelscher Gruppen**.

2. Die Garbe $\mathcal{F}$ heißt **Ringgarbe** falls gilt

- $\mathcal{F}(U)$ ist ein Ring für alle $U \subset X$ offen und
- $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ ist ein Ringhomomorphismus für alle $V \subset U \subset X$ offen.

2. Sei k ein Körper. Die Garbe $\mathcal{F}$ heißt **Garbe von k-Algebren** falls gilt

- $\mathcal{F}(U)$ ist eine k-Algebra für alle $U \subset X$ offen und
- $r_{V,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ ist ein k-Algebrahomomorphismus für alle $V \subset U \subset X$ offen.

Beispiel 7.5.2 Wir haben schon viele Beispiele von Ringgarben gesehen.

1. Sei X ein topologischer Raum und k ein Körper. Dann ist $\mathcal{F}(U) = \mathbf{Abb}(U, \mathsf{k})$ eine Garbe von k-Algebra (und also auch eine Ringgarbe): für U offen und $f, g \in \mathcal{F}(U)$ definieren

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \text{ und } (fg)(x) = f(x)g(x)$$

eine k-Algebrastruktur auf $\mathcal{F}(U)$. Außerdem gilt für $V \subset U$ offen

$$(f+g)|_V = f|_V + g|_V,\ (\lambda f)|_V = \lambda f|_V \text{ und } (fg)|_V = (f|_V)(g|_V).$$

2. Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $\mathcal{F}_{\text{stet}}(U) = C^0(U, \mathbb{R})$ eine Ringgarbe: Summe und Produkte von stetige Funktionen sind stetig.

3. Sei X eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathcal{F}_{C^r}(U) = C^r(U, \mathbb{R})$ eine Ringgarbe.

4. Sei X eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathcal{F}(U)_{C^\infty} = C^\infty(U, \mathbb{R})$ eine Ringgarbe.

5. Sei X eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathcal{F}_{\text{hol}}(U) = \text{Holomorph}(U, \mathbb{R})$ eine Ringgarbe.

Bemerkung 7.5.3 Jede *Geometrie* hat eine zugehörige Ringgarbe.

Definition 7.5.4 Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Gruppengarben, Ringgarben oder Garben von k-Algebren. Ein **Morphismus** $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist eine Zuordnung $U \mapsto \psi_U$, wobei $\psi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ein Gruppenhomomorphismus, ein Ringhomomorphismus oder ein k-Algebrahomomorphismus ist mit $\psi_U \circ r^{\mathcal{F}}_{V,U} = r^{\mathcal{G}}_{V,U} \circ \psi_U$ für alle $V \subset U$ offen *i.e.* das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, "r^{\mathcal{F}}_{V,U}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r^{\mathcal{G}}_{V,U}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\psi_V"'] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

7.6. Geringte Räume

Definition 7.6.1 Ein **geringter Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$, wobei X ein topologischer Raum ist und $\mathcal{O}_X$ eine Ringgarbe über X. Die Garbe $\mathcal{O}_X$ heißt **Strukturgarbe**.

Bemerkung 7.6.2 Sei $U \subset X$ eine offene Teilmengen. Die Funktionen $f \in \mathcal{O}_X(U)$ sind die "zugelassene" oder "gute" funktionen. Wenn man Topologie als Geometrie betrachtet werden alle stetige funktionen zugelassen also $\mathcal{O}_X = \mathcal{F}_{\text{stet}}$ Für Differentialgeometrie betrachtet man $\mathcal{O}_X = \mathcal{F}_{C^\infty}$ für komplexe Mannigfaltigkeiten $\mathcal{O}_X = \mathcal{F}_{\text{hol}}$. Wir wollen polynomiale Funktionen betrachten.

Definition 7.6.3 Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei geringte Räume. Ein Morphismus $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von geringte Räume ist eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ so, dass gilt

$$f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U)) \text{ für alle } U \subset Y \text{ offen und } f \in \mathcal{O}_Y(U).$$

Dies definiert die Abbildung $\varphi^*_U : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$, $f \mapsto \varphi^*(f) = f \circ \varphi$ für alle offene Teilmengen $U \subset Y$.

Beispiel 7.6.4 Seien X, Y offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

1. Topologie. Für $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$ die Garben aller $\mathbb{R}$-wertigen topologischen Funktionen ist jede stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus geringter Räume.

2. Differentialgeometrie. Für $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$ die Garben aller $\mathbb{R}$-wertigen C^∞-Funktionen und für $\varphi : X \to Y$ gilt

$$\varphi \text{ Morphismus geringter Räume } \Leftrightarrow \varphi \text{ differenzierbar.}$$

Bemerkung 7.6.5 1. Die Abbildung φ_U^* ist ein Ringhomomorphismus für alle $U \subset Y$ offen: es gilt

$$\varphi_U^*(f+g) = (f+g)\circ\varphi = \varphi_U^*(f) + \varphi_U^*(g) \text{ und } \varphi_U^*(fg) = (fg)\circ\varphi = \varphi_U^*(f)\varphi_U^*(g).$$

2. Für $V \subset U \subset Y$ offene Teilmengen $x \in \varphi^{-1}(V)$ und $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ gilt auch

$$r_{\varphi^{-1}(V),\varphi^{-1}(U)}(\varphi_U^*(f))(x) = (f\circ\varphi)|_{f^{-1}(V)}(x) = f(\varphi(x)) = f|_V(\varphi(x)) = \varphi_{\varphi^{-1}(V)}(r_{V,U}(f))(x).$$

Insesondere gilt $r_{\varphi^{-1}(V),\varphi^{-1}(U)} \circ \varphi_U^* = \varphi_{\varphi^{-1}(V)} \circ r_{V,U}$ also ist das Diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "\varphi_U^*"] \arrow[d, "r_{V,U}"'] & \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U)) \arrow[d, "r_{\varphi^{-1}(V),\varphi^{-1}(U)}"] \\
\mathcal{O}_Y(V) \arrow[r, "\varphi_V^*"'] & \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U)).
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

3. Wenn man mit allgemeinen Garben (und nicht mehre funktionwertige Garben) arbeitet ist ein Morphismus von geringte Räume wie folgt definiert: es ist ein Paar (φ, φ^*), wobei $\varphi : X \to Y$ eine stetige Abbildung ist und φ^* ist ein Zuordnung $U \mapsto \varphi_U^*$ für jede offene Teilmenge $U \subset Y$ mit

- $\varphi_U^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ ist ein Ringhomomorphismus und
- $r_{\varphi^{-1}(V),\varphi^{-1}(U)} \circ \varphi_U^* = \varphi_{\varphi^{-1}(V)} \circ r_{V,U}$.

4. Ein morphismus $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von geringte Räume ist also ein Paar (φ, φ^*) so, dass $\varphi : X \to Y$ eine stetige Abbildung ist und $\varphi^* : \mathcal{O}_Y \to \varphi_*\mathcal{O}_X$ ein Morphismus von Garben ist.

Lemma 7.6.6 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ein geringter Raum. □

Beweis. Übung. ■

Definition 7.6.7 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Der geringter Raum $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ heißt **induzierter geringter Raum**.

8. Algebraische Varietäten

8.1. Strukturgarbe einer (affinen) algebraischen Menge

Wir wollen die Garbe $\mathcal{O}_V$ aller polynomialen Funktionen über eine (affine) algebraische Menge V definieren. Nach Lemma 7.3.6 genügt es diese Garbe für eine Basis $\mathcal{U}$ der Topologie zu definieren und dann zu zeigen, dass die folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(A) Für $U, W \in \mathcal{U}$ mit $W \subset U$ gilt $(f \in \mathcal{O}_V(U) \Rightarrow f|_W \in \mathcal{O}_V(W))$.

(B) Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von einer offenen Teilmenge U, wobei $U, U_i \in \mathcal{U}$ für alle $i \in I$. Für jede Funktion $f : U \to \mathbf{M}$ mit $f|_{U_i} \in \mathcal{O}_V(U_i)$ gilt $f \in \mathcal{O}_V(U)$.

Für eine algebraische Menge steht eine Basis der Topologie zur Verfügung: die Familie aller standardmäßigen offenen Teilmengen. Zur Erinnerung sind diese Menge wie folgt definiert: Sei $f \in \Gamma(V) = \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]/I(V)$. Dann ist die von f definierte standardmäßige offene Teilmenge $D_V(f)$ definiert durch

$$D_V(f) = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}.$$

Wir werden immer $f \neq 0$ annehmen so, dass $D_V(f) \neq \emptyset$.

Definition 8.1.1 Wir setzen $\Gamma(D_V(f)) = \Gamma(V)[X_{n+1}]/(1 - X_{n+1}f)$.

Bemerkung 8.1.2 Die standardmäßige offene Teilmenge $D_V(f)$ ist eine algebraische Menge von $\mathbb{A}_{n+1}(\mathsf{k})$: Sei $P \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ mit $[P] = f$ in $\Gamma(V)$. Es gibt ein Isomorphismus

$$\varphi : D_V(f) \to V(I(V) + (1 - X_{n+1}P))$$

definiert durch $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n, \frac{1}{f(x_1,\cdots,x_n)})$. Die Umkehrabbildung $\psi : V(I(V) + (1 - X_{n+1}P)) \to D_V(f)$ ist dann durch $\psi(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_n)$ definiert. Beide Abbildungen sind regulär (weil beide dank Polynome definiert sind) und man überprüft leicht, dass φ und ψ inverse voneinander sind.

Lemma 8.1.3 Sei $P \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ mit $[P] = f \in \Gamma(V)$. Dann gilt

$$\Gamma(D_V(f)) \simeq \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_{n+1}]/(I(V) + (1 - X_{n+1}P)).$$

Beweis. Sei $\Phi : \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_{n+1}] \to \Gamma(V)[X_{n+1}]$ definiert durch $\Phi(\sum_k A_k X_{n+1}^k) = \sum_k [A_k] X_{n+1}^k$, wobei $A_k \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ und $[A_k] \in \Gamma(V)$ seine Klasse ist. Sei $\pi : \Gamma(V)[X_{n+1}] \to \Gamma(V)[X_{n+1}]/(1 - X_{n+1}f)$ die kanonische Projektion.

Es genügt zu zeigen, dass $\Phi = \pi \circ \Psi$ ein surjektiver k-Algebrahomomorphismus ist mit $\mathrm{Ker}\Phi = I(V) + (1 - X_{n+1}P)$.

Da beide Ψ und π surjetive k-Algebrahomomorphismen sind folgt, dass Φ ein surjektiver k-Algebrahomomorphismus ist.

Es gilt auch $I(V) \subset \mathrm{Ker}\Psi$ und $\Phi(1 - X_{n+1}P) = \pi(1 - X_{n+1}f) = 0$. Daraus folgt $I(V) + (1 - X_{n+1}P) \subset \mathrm{Ker}\Phi$

Umgekehrt, sei $Q \in \mathrm{Ker}\Phi$. Dann gilt $\pi(\Psi(Q)) = 0$ und also $\Psi(Q) \in \mathrm{Ker}\pi = (1 - X_{n+1}f)$. Es gibt also ein $r \in \Gamma(V)[X_{n+1}]$ mit $[Q] = (1 - X_{n+1}f)r$. Sei $R \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_{n+1}]$ mit $[R] = r$. Es gilt $[Q] = (1 - X_{n+1}[P])[R]$ in $\Gamma(V)[X_{n+1}]$. Daraus folgt $Q - (1 - X_{n+1}P)R \in I(V)$ (als Ideal in $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_{n+1}]$ und $Q \in I(V) + (1 - X_{n+1}P)$. ∎

Lemma 8.1.4 Es gilt

$$\Gamma(D_V(f)) = \Gamma(V(I(V) + (1 - X_{n+1}P))).$$

Mit anderen Wörter gilt

$$I(V(I(V) + (1 - X_{n+1}P))) = I(V) + (1 - X_{n+1}P).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $I(V(I(V) + (1 - X_{n+1}P))) = I(V) + (1 - X_{n+1}P)$. Es genügt also zu zeigen, dass $I(V(I(V) + (1 - X_{n+1}P))) \subset I(V) + (1 - X_{n+1}P)$. Sei $Q \in I(V(I(V) + (1 - X_{n+1}P)))$.

Sei A der von $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ und $\frac{1}{P}$ erzeugte Unterring. Wir betrachten in $A[X_{n+1}]$ die Restdivision von Q nach $\frac{1}{P} - X_{n+1}$. Es gilt $Q = (\frac{1}{P} - X_{n+1})R + S$ mit $\deg_{X_{n+1}}(S) < \deg_{X_{n+1}}(\frac{1}{P} - X_{n+1}) = 1$ also $S \in A$. Dank Multiplikation mit den Nennern gibt es Polynome $C \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ und $B \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_{n+1}]$ mit

$$P^r Q = (1 - X_{n+1}P)B + C.$$

Für $(x_1, \cdots, x_n) \in D_V(f)$ gilt $Q(x_1, \cdots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \cdots, x_n)}) = 0$. Es folgt $C(x_1, \cdots, x_n) = 0$. Es folgt also $P(x_1, \cdots, x_n)C(x_1, \cdots, x_n) = 0$ für alle $(x_1, \cdots, x_n) \in V$ und also $PC \in I(V)$. Daraus folgt $P^{r+1}Q \in I(V) + (1 - X_{n+1}P)$. Aber $(1 - X_{n+1}P)P^r Q \in I(V) + (1 - X_{n+1}P)$ also $P^r Q = (1 - X_{n+1}P)P^r Q + P^{r+1}Q \in I(V) + (1 - X_{n+1}P)$. Per Induktion folgt $Q \in I(V) + (1 - X_{n+1}P)$. ∎

Lemma 8.1.5 Ein Element $g = [Q] \in \Gamma(D_V(f))$, wobei $Q \in \Gamma(V)[X_{n+1}]$ definiert eine polynomiale Funktion $\bar{g} : D_V(f) \to \mathsf{k}$ durch

$$\bar{g}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=0}^{r} \frac{a_k(x_1, \cdots, x_n)}{f(x_1, \cdots, x_n)^k},$$

wobei $Q = \sum_{k=0}^{r} a_k X_{n+1}^k$ und $a_k \in \Gamma(V)$. □

Beweis. Sei $g \in \Gamma(D_V(f))$ und sei $(x_1, \cdots, x_n) \in D_V(f)$. Dann gilt $g = [Q] \in \Gamma(V)[X_{n+1}]/(1 - X_{n+1}f)$, wobei $Q \in \Gamma(V)[X_{n+1}]$. Wir setzen

$$\bar{g}(x_1, \cdots, x_n) = Q(x_1, \cdots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \cdots, x_n)}).$$

Dies hängt von der Wahl von Q nicht ab, weil $(1-X_{n+1}f)(x_1, \cdots, x_n, \frac{1}{f(x_1,\cdots,x_n)}) = 0$. ■

Bemerkung 8.1.6 1. Für $\psi : D_V(f) \to \mathsf{k}$ eine Polynomiale funktion definiert wie im obigen Lemma. Dann gibt es ein eindeutiges Element $g \in \Gamma(D_V(f))$ mit $\psi = \bar{g}$. Mit anderen Worten ist der Ringhomomorphismus $g \mapsto \bar{g}$ injektiv:

Sei g mit $\bar{g} = 0$ und sei $Q \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_{n+1}]$ mit $[Q] = g$. Es gilt also $Q \in I(V(I(V)+(1 - X_{n+1}P))) = I(V) + (1 - X_{n+1}P)$ und daraus folgt $g = [Q] = 0$.

2. Wir können also entweder mit Elementen $g \in \Gamma(D_V(f))$ arbeiten oder mit polynomiale Funktionen $\bar{g} : D_V(f) \to \mathsf{k}$. Wir könne und werden also g und $\bar{g}$ verwechseln und wir werden nur die Notation g benutzen.

Definition 8.1.7 Sei $r_{D_V(f),V} : \Gamma(V) \to \Gamma(D_V(f))$ die Abbildung definiert durch $g \mapsto [g] \in \Gamma(V)[X_{n+1}]/(1 - X_{n+1}f)$.

Lemma 8.1.8 Sei $f \in \Gamma(V) \setminus \{0\}$.

1. Die Abbildung $r_{D_V(f),V} : \Gamma(V) \to \Gamma(D_V(f))$ ist ein Ringhomomorphismus.

2. Wenn wir Elemente von $\Gamma(V)$ und $\Gamma(D_V(f))$ als k-wertige Funktionen betrachten gilt $r_{D_V(f),V}(g) = g|_{D_V(f)}$.

3. Für V irreduzibel ist $r_{D_V(f),V}$ injektiv und $\Gamma(D_V(f))$ ist der von $\Gamma(V)$ und $\frac{1}{f}$ erzeugte Unterring von $\mathsf{k}(V)$. □

Beweis. 1. Klar.

2. Folgt aus dem obigen Lemma.

3. Sei g im Kern. Es gilt $g|_{D_V(f)} = 0$. Aber da V irreduzibel ist und $D_V(f)$ ein nicht leere offene Teilmenge ist muss $D_V(f)$ dicht in V sein. Daraus folgt $g = 0$.

Wir haben eine Abbildung $\Phi : \Gamma(D_V(f)) \to \mathsf{k}(V)$ definiert wie folgt. Sei $Q \in \Gamma(V)[X_{n+1}]$. Wir schreiben $Q = a_r X_{n+1}^r + \cdots + a_0$, wobei $a_i \in \Gamma(V)$ für alle $i \in [0, r]$

und setzen $\Psi(Q) = \frac{a_r}{f^r} + \cdots + a_0$. Dies ist ein Ringhomomorphismus $\Gamma(V)[X_{n+1}] \to \mathsf{k}(V)$. Da $\Psi(1 - X_{n+1}f) = 0$ faktorisiert sich Ψ in einem Ringhomomorphismus $\Phi : \Gamma(D_V(f)) \to \mathsf{k}(V)$ definiert durch $\Phi([Q]) = \frac{a_r}{f^r} + \cdots + a_0$. Das Bild von Φ ist der von $\Gamma(V)$ und $\frac{1}{f}$ erzeugte Unterring von $\mathsf{k}(V)$. Es genügt also zu zeigen, dass Φ injektiv ist. Sei $Q \in \Gamma(V)[X_{n+1}]$ mit $\Psi(Q) = 0$. Es folgt $\frac{a_r}{f^r} + \cdots + a_0 = 0$.Es gilt aber in $\Gamma(D_V(f))$:

$$[Q] = a_r[X_{n+1}]^r + \cdots + a_0 = \frac{a_r}{f^r} + \cdots + a_0 = 0.$$

Daraus folgt $[Q] = 0$ und Φ injektiv. ∎

Beispiel 8.1.9 Die Abbildung $r_{D_V(f),V}$ ist nicht immer injektiv. Zum Beispiel sei $V = V(XY) \subset \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ (mit k unendlich). Dann gilt $I(V) = (XY)$ aber V ist nicht irreduzibel. Es gilt $V = V(XY) = V(X) \cup V(Y)$ und dies ist die Zerlegung in irreduziblen Komponenten von V. Der Ring $\Gamma(V)$ ist kein Integritätsring.

Sei jetzt $f = [Y] \in \Gamma(V) \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\Gamma(D_V(f)) = \Gamma(V)[Z]/(1 - YZ) \simeq \mathsf{k}[X, Y, Z]/(XY, 1 - YZ).$$

Es gilt aber $(XY, 1 - YZ) = (X, 1 - YZ)$. Daraus folgt also $[X]_{\Gamma(D_V(f))} = 0$ auch wenn $[X]_{\Gamma(V)} \neq 0$. Die Abbildung

$$\Gamma(V) \to \Gamma(D_V(f))$$

ist in diesem Fall nicht injektiv. Dies kann man auch geometrisch erklären: die offene Teilmenge $D_V(f)$ "sieht" die zweite irreduzible Komponent $V(Y)$ nicht, weil $D_V(f) \cap V(Y) = \emptyset$. Also können wir die Funktionen die nul auf $V(X)$ sind aber nicht auf $V(Y)$ im Ring $\Gamma(D_V(f))$ "nicht sehen".

Für V nicht irreduzibel ist $\mathsf{k}(V)$ *a priori* nicht definiert (wir werden nächstes Semester sehen wie man dieses Problem lösen kann).

Eine standardmäßige offene Teilmenge kann dank mehrere Elemente aus $\Gamma(V)$ definiert sein. Wir zeigen, dass $\Gamma(V)$ von dieser Wahl nicht abhängt. Dafür brauchen wir aber, dass k algebraisch abgeschlossen ist.

Lemma 8.1.10 Sei k algebraisch abgeschlossen. Seien $f, g \in \Gamma(V)$ mit $D_V(f) = D_V(g)$. Dann gibt es ein isomorphismus

$$\Phi : \Gamma(D_V(f)) \simeq \Gamma(D_V(g))$$

so, dass Φ kompatibel mit der Einschränkungen $r_{D_V(f),V}$ und $r_{D_V(g),V}$ ist *i.e.* $r_{D_V(g),V} = \Phi \circ r_{D_V(f),V}$. Seien $P, Q \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ mit $[P] = f$ und $[Q] = g$ in $\Gamma(V)$. Dann ist auch Φ kompatibel mit den Isomorphismen

$$\Gamma(D_V(f)) \simeq \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_{n+1}]/(I(V) + (1 - X_{n+1}P)) \text{ und}$$
$$\Gamma(D_V(g)) \simeq \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_{n+1}]/(I(V) + (1 - X_{n+1}Q)).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass es ein Φ kompatibel mit den zwei letzten Isomorphismen gibt.

Seien $P, Q \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ mit $[P] = f$ und $[Q] = g$ in $\Gamma(V)$. Es gilt $V \cap V(P) = V \cap V(Q)$. Daraus folgt (Nullstellensatz), dass $\sqrt{I(V) + (P)} = \sqrt{I(V) + (Q)}$ und also gibt es ein r mit $Q^r \in I(V) + (P)$. Es folgt $g^r \in (f)$ in $\Gamma(V)$ also gibt es ein $h \in \Gamma(V)$ mit $g^r = fh$. Wir definieren $\Phi : \Gamma(D_V(f)) \to \Gamma(D_V(g))$ wie folgt:

$$\Phi(\sum_k a_k [X_{n+1}]_f^k) = \sum_k a_k h^k [X_{n+1}]_g^{kr}.$$

Dies bedeutet $\Phi(\frac{1}{f}) = \frac{h}{g^r}$. Analog gibt es ein $s \geq 1$ und $b \in \Gamma(V)$ mit $f^s = gb$. Wir definieren $\Psi : \Gamma(D_V(g)) \simeq \Gamma(D_V(f))$ wie folgt:

$$\Psi(\sum_k a_k [X_{n+1}]_g^k) = \sum_k a_k b^k [X_{n+1}]_f^{ks}.$$

Wir überprüfen, dass Φ und Ψ inverse von einander sind. Es gilt aber $[X_{n+1}]_f f = 1$ also $[X_{n+1}]_f = \frac{1}{f}$ und f ist invertierbar in $\Gamma(D_V(f))$. Es gilt auch $gb = f^s$ also sind g und b invertierbar in $\Gamma(D_V(f))$. Da $fh = g^r$ ist h auch invertierbar in $\Gamma(D_V(f))$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\Psi(\Phi(\textstyle\sum_k a_k [X_{n+1}]_f^k)) &= \Psi(\textstyle\sum_k a_k h^k [X_{n+1}]_g^{kr}) \\
&= \textstyle\sum_k a_k h^k b^{kr} [X_{n+1}]_f^{krs} \\
&= \textstyle\sum_k a_k \frac{h^k b^{kr}}{f^{krs}} \\
&= \textstyle\sum_k a_k \frac{h^k b^{kr}}{g^{kr} b^{kr}} \\
&= \textstyle\sum_k a_k \frac{h^k}{f^k h^k} \\
&= \textstyle\sum_k a_k \frac{1}{f^k} = \sum_k a_k [X_{n+1}]_f^k.
\end{aligned}$$

Analog gilt $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$.

Wenn wir jetzt Funktionen betrachten gilt: Eine Funktion $\psi : D_V(f) \to \mathsf{k}$ ist der Form $\psi = \frac{a}{f^k}$ für $a \in \Gamma(V)$. Dann gilt $\Phi(\psi) = \Phi(\frac{a}{f^k}) = \frac{ah^k}{g^{rk}}$. Die Funktionen ψ und $\Phi(\psi)$ stimmen übereinander, weil $\frac{1}{f} = \frac{h}{g^r}$. ∎

Beispiel 8.1.11 Für k nicht algebraisch abgeschlossen ist die Aussage im obigen Lemma falsch. Zum Beispiel für $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ gilt $D_V(f) = D_V(g)$ für $V = \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$, $f = Y$ und $g = Y(X^2 + Y^2 + 1)$. Wir haben aber

$$\Gamma(D_V(f)) \simeq \mathsf{k}[X, Y, Z]/(1 - YZ) \not\simeq \mathsf{k}[X, Y, Z]/(1 - Y(X^2 + Y^2 + 1)Z) \simeq \Gamma(D_V(g)).$$

Dass die beide Ringe nicht isomorph sind kann man leicht überprüfen in dem man mit $\mathbb{C}$ tensoriert: die offene Teilmengen $D_V(f)$ und $D_V(g)$ sind dann nicht mehr gleich.

Dies ist ein Problem, dass man später (in einer Mastervorlegung Algebraische Geometrie z.B.) lösen kann in dem man allgemeinere Objekte betrachtet: *Schemata.*

Da der Ring $\Gamma(U)$ von einer standardmäßigen offenen Teilmenge von einer Darstellung $U = D_V(f)$ nicht abhängt nur für k algebraisch abgeschlossen, **werden wir ab hier annehmen, dass k algebraisch abgeschlossen ist**.

Proposition 8.1.12 Sei V eine algebraische Menge.

Die Zuordnung $D_V(f) \mapsto \mathcal{O}_V(D_V(f)) = \Gamma(D_V(f))$ erfüllt die Eingenschaften (A) und (B) vom Lemma 7.3.6.

Insbesondere gibt es eine eindeutig bestimmte Garbe $\mathcal{O}_V$ über V mit

$$\Gamma(D_V(f), \mathcal{O}_V(D_V(f))) = \mathcal{O}_V(D_V(f)) = \Gamma(D_V(f)).$$

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ die Familie aller stadardmäßigen offenen Teilmengen. Wir zeigen (A): Für $U, W \in \mathcal{U}$ mit $W \subset U$ gilt $(f \in \mathcal{O}_V(U) \Rightarrow f|_W \in \mathcal{O}_V(W))$.

Seien also $f, g \in \Gamma(V)$ mit $W = D_V(g) \subset U = D_V(f)$. Daraus folgt $V(I(V) + (f)) = V \cap V(f) \subset V \cap V(g) = V(I(V) + (g))$. Seien $P, Q \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ mit $[P] = f$ und $[Q] = g$ in $\Gamma(V)$. Es gilt (Nullstellensatz) $\sqrt{I(V) + (P)} \supset \sqrt{I(V) + (Q)}$. Insbesondere gibt es ein $r \geq 1$ mit $Q^r \in I(V) + (P)$ also gibt es ein $h \in \Gamma(V)$ mit $g^r = fh$. Wir definieren $r_{D_V(f),D_V(g)} = \Phi : \Gamma(D_V(f) \to \Gamma(D_V(g))$ oder

$$\Phi : \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_{n+1}]/(I(V) + (1 - X_{n+1}P)) \to \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_{n+1}]/(I(V) + (1 - X_{n+1}Q))$$

durch

$$\Phi(\sum_k a_k [X_{n+1}]_f) = \sum_k a_k h^k [X_{n+1}]_g^{kr}.$$

Dies ist wohl definiert, weil $\Phi(1 - [X_{n+1}P]_f) = \Phi(1 - [X_{n+1}]_f f) = 1 - h[X_{n+1}]_g^r f = 1 - \frac{hf}{g^r} = 1 - 1 = 0$. Für $\sum_k a_k [X_{n+1}]_f^k = S \in \Gamma(V)[X_{n+1}]/(1 - X_{n+1}f)$ und $(x_1, \cdots, x_n) \in D_V(f)$ gilt

$$\begin{aligned} S(x_1, \cdots, x_n, \tfrac{1}{f(x_1,\cdots,x_n)}) &= \sum_k \tfrac{a_k(x_1,\cdots,x_n)}{f(x_1,\cdots,x_n)^k} \\ &= \sum_k \tfrac{a_k(x_1,\cdots,x_n)h(x_1,\cdots,x_n)^k}{g(x_1,\cdots,x_n)^{rk}} \in \Gamma(D_V(g)). \end{aligned}$$

Wenn wir mit Funktionen arbeiten, haben wir eine Funktion $\psi : D_V(f) \to \mathsf{k}$ der Form $\psi = \frac{a}{f^k}$ für ein $a \in \Gamma(V)$. Da $\frac{1}{f} = \frac{h}{g^r}$ folgt $\psi = \frac{ah^k}{g^{rk}}$ und die Einschränkung auf $D_V(g)$ ist eine Polynomiale Funktion.

Wir zeigen jetzt (B): Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von einer offenen Teilmenge U, wobei $U, U_i \in \mathcal{U}$ für alle $i \in I$. Für jede Funktion $\psi : U \to \mathbf{M}$ mit $\psi|_{U_i} \in \mathcal{O}_V(U_i)$ gilt $\psi \in \mathcal{O}_V(U)$. Um die Schreibweise zu erleichtern, werden in diesem Fall nur mit Funktionen arbeiten. Sei $U = D_V(f)$ und seien $U_i = D_V(f_i)$ so, dass $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von U ist. Da U quasi-kompakt ist durfen wir annehmen, dass I endlich ist. Sei $\psi : D_V(f) \to \mathsf{k}$ eine Funktion so, dass $\psi|_{U_i} \in \mathcal{O}_V(U_i)$. Es gibt also $a_i \in \Gamma(V)$

und $r \geq 0$ mit $\psi|_{U_i} = \frac{a_i}{f_i^r}$ (da es nur endlich viele $i \in I$ gibt können wir, die gleiche Zahl r für alle $\psi|_{U_i}$ nehmen). Da $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von U ist folgt

$$V \cap \bigcap_{i\in I} V(f_i) \subset V \cap V(f) \subset V \cap V(f_i).$$

Es folgt

$$\sqrt{I(V)+(f_i)} \subset \sqrt{I(V)+(f)} \subset \sqrt{I(V)+\sum_{i\in I}(f_i)}.$$

Da I endlich ist, gilt

$$\sqrt{I(V)+\sum_{i\in I}(f_i)} = \sqrt{I(V)+\sum_{i\in I}(f_i^{r+1})}$$

und es folgt, dass es ein N gibt mit $f^N \in \sum_{i\in I}(f_i^{r+1})$ also

$$f^N = \sum_{i\in I} b_i f_i^{r+1},$$

wobei $b_i \in \Gamma(V)$. Sei

$$\varphi = \frac{\sum_{i\in I} a_i b_i f_i}{f^N} \in \Gamma(D_V(f)) = \mathcal{O}_V(U).$$

Wir zeigen, dass $\varphi|_{U_i} = \psi|_{U_i}$. Daraus folgt $\psi = \varphi$ und die Aussage. Es gilt $\frac{a_i}{f_i^r}|_{U_i\cap U_j} = \frac{a_j}{f_j^r}|_{U_i\cap U_j}$. Es folgt $(a_i f_j^r - a_j f_i^r)|_{U_i\cap U_j} = 0$. Daraus folgt $f_i f_j (a_i f_j^r - a_j f_i^r) = 0$ als Funktion über U also $a_j f_i^{r+1} f_j = a_i f_j^{r+1} f_i$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\varphi|_{U_i} - \psi|_{U_i} &= \tfrac{\sum_{j\in I} a_j b_j f_j}{f^N} - \tfrac{a_i}{f_i^r} \\
&= \tfrac{\sum_{j\in I} a_j b_j f_j f_i^{r+1} - a_i f_i f^N}{f^N f_i^{r+1}} \\
&= \tfrac{\sum_{j\in I} a_i b_j f_i f_j^{r+1} - a_i f_i f^N}{f^N f_i^{r+1}} \\
&= \tfrac{a_i f_i \sum_{j\in I} b_j f_j^{r+1} - a_i f_i f^N}{f^N f_i^{r+1}} \\
&= \tfrac{a_i f_i f^N - a_i f_i f^N}{f^N f_i^{r+1}} = 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Aussage. ■

Korollar 8.1.13 Sei V eine algebraische Menge. Dann gibt es eine eindeutige Ringgarbe $\mathcal{O}_V$ mit

$$\mathcal{O}_V(D_V(f)) = \Gamma(D_V(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma(D_V(f)).$$

Definition 8.1.14 Sei V eine algebraische Menge. Die Garbe $\mathcal{O}_V$ definiert im obigen Korollar heißt **Strukturgarbe von** V.

8.2. Affine algebraische Varietäten

Definition 8.2.1 1. Eine **affine algebraische Varietät** ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ der isomorph zu einem geringten Raum $(V, \mathcal{O}_V)$ ist, wobei V eine algebraische Menge ist und $\mathcal{O}_V$ deren Strukturegarbe.

2. Ein **Morphismus von affinen algebraischen Varietäten** ist ein Morphismus von geringten Räumen.

Proposition 8.2.2 Sei V eine algebraische Menge und $f \in \Gamma(V)$. Die standardmäßige offene Teilmenge $(D_V(f), \mathcal{O}_V|_{D_V(f)})$ mit der Einschränkung der Strukturgarbe von V ist eine affine algebraische Varietät.

Beweis. Wir haben schon ein Homöomorphismus

$$D_V(f) \to V(I(V) + (1 - X_{n+1}P)) = V_f,$$

wobei $P \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ mit $[P] = f \in \Gamma(V)$. Die stetige Abbildungen sind gegeben durch

$$\Phi(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \cdots, x_n)}) \text{ und } \Psi(y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}) = (y_1, \cdots, y_n).$$

Es bleibt zu zeigen, dass Φ und Ψ Morphismen von geringten Räumen sind. Wir zeigen, dass $\Phi^*(h) = h \circ \Phi \in \mathcal{O}_{D_V(f)}(\Phi^{-1}(D_{V_f}(b)))$ für $h \in \mathcal{O}_{V_f}(D_{V_f}(b))$ mit $b \in \Gamma(V_f)$ und $\Psi^*(g) = g \circ \Psi \in \mathcal{O}_{D_V(f)}(\Psi^{-1}(D_{D_V(f)}(a)))$ für $g \in \mathcal{O}_{D_V(f)}(D_{D_V(f)}(a))$ mit $a \in \Gamma(D_V(f))$.

Zur Erinnerung gilt $V_f \subset \mathbb{A}_{n+1}(\mathsf{k})$. Sei also $b \in \Gamma(V_f)$ und $h \in \mathcal{O}_{V_f}(D_{V_f}(b))$. Es gilt

$$\Phi^{-1}(D_{V_f}(b)) = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in V \mid \begin{array}{l} f(x_1, \cdots, x_n) \neq 0 \text{ und} \\ b(x_1, \cdots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \cdots, x_n)}) \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Da $h \in \Gamma(D_{V_f}(b))$ gilt, gibt es ein Polynom $Q \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}]$ mit

$$h(y_1, \cdots, y_{n+1}) = Q(y_1, \cdots, y_{n+1}, \frac{1}{b(y_1, \cdots, y_{n+1})}).$$

Es folgt $\Phi^*(h)(x_1, \cdots, x_n) = h(x_1, \cdots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \cdots, x_n)})$ also

$$\Phi^*(h)(x_1, \cdots, x_n) = Q(x_1, \cdots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \cdots, x_n)}, \frac{1}{b(x_1, \cdots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \cdots, x_n)})}).$$

Daraus folgt $\Phi^* h \in \mathcal{O}_{D_V(f)}(\Phi^{-1}(D_{V_f}(b)))$.

Umgekehrt sei $a \in \Gamma(D_V(f))$ und $g \in \mathcal{O}_{D_V(f)}(D_{D_V(f)}(a))$. Es gilt

$$\Psi^{-1}(D_{D_V(f)}(a)) = \{(y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}) \in V_f \mid a(y_1, \cdots, y_n) \neq 0\}.$$

Da $g \in \mathcal{O}_{D_V(f)}(D_{D_V(f)}(a))$ gilt, gibt es ein Polynom $Q \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}]$ mit

$$g(x_1, \cdots, x_n) = Q(x_1, \cdots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \cdots, x_n)}, \frac{1}{a(x_1, \cdots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \cdots, x_n)})})$$

Es folgt $\Psi^* g(y_1, \cdots, y_{n+1}) = Q(y_1, \cdots, y_n, \frac{1}{f(y_1, \cdots, y_n)}, \frac{1}{a(y_1, \cdots, y_n, \frac{1}{f(y_1, \cdots, y_n)})})$ also

$$\Psi^* g(y_1, \cdots, y_{n+1}) = Q(y_1, \cdots, y_n, y_{n+1}, \frac{1}{a(y_1, \cdots, y_n, y_{n+1})}).$$

Daraus folgt $\Psi^* g \in \mathcal{O}_{D_V(f)}(\Psi^{-1}(D_{D_V(f)}(a)))$.

Die Aussage, dass Φ und Ψ beide Morphismen von geringten Räumen folgt aus dem folgenden Satz. ∎

Proposition 8.2.3 Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei geringte Räume (wobei die Garben Garben von Funktionen sind) und sei $\varphi : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y und für jedes $i \in I$, sei $(U_{i,j})_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von $\varphi^{-1}(V_i)$.

Falls $\varphi|_{U_{i,j}} : (U_{i,j}, \mathcal{O}_X|_{U_{i,j}}) \to (V_i, \mathcal{O}_Y|_{V_i})$ ein Morphismus geringter Räume ist, ist φ ein Morphismus von geringten Räumen.

Beweis. Sei $V \subset Y$ offen. Wir zeigen, dass $\varphi_V^*(f) \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$ für $f \in \mathcal{O}_Y(V)$. Es gilt aber $f|_{V \cap V_i} \in \mathcal{O}_X(V \cap V_i)$ für jedes $i \in I$. Daraus folgt $\varphi_V^*(f)|_{U_{i,j}} \in \mathcal{O}_X(U_{i,j} \cap \varphi^{-1}(V))$ für alle i, j. Aus dem Vekleben-Axiom folgt $\varphi_V^*(f) \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$. ∎

Bemerkung 8.2.4 Der obige Satz ist auch für beliebige geringte Räume wahr: die lokale Schnitte $\varphi_V^*(f)|_{U_{i,j}} \in \mathcal{O}_X(U_{i,j} \cap \varphi^{-1}(V))$ kann man zusammen kleben (Verkleben-Axiom) in einem Element $\varphi_V^*(f) \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$.

Beispiel 8.2.5 1. Jede standardmäßige offene Teilmenge $D_V(f) \subset V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ ist eine affine algebraische Varietät auch wenn $D_V(f)$ keine algebraische Menge in $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ ist.

2. Sei $M_n(\mathsf{k}) \simeq \mathsf{k}^{n^2}$ der Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen. Die standardmäßige offene Teilmenge

$$D(\det) = \{M \in M_n(\mathsf{k}) \mid \det(M) \neq 0\} = \mathrm{GL}_n(\mathsf{k})$$

ist eine affine algebraische Varietät.

Wir wollen jetzt reguläre Abbildungen und Morphismen zwischen affinen algebraischen Varietäten vergleichen.

Proposition 8.2.6 Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei affine algebraische Mengen mit ihren Strukturgarben. Dann gibt es Bijektionen

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Var}}(X, Y) \simeq \mathrm{Reg}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}-\mathrm{Alg}}(\Gamma(Y), \Gamma(X)),$$

wobei $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Var}}(X, Y)$ die Menge aller Morphismen von geringten Räumen von $(X, \mathcal{O}_X)$ nach $(Y, \mathcal{O}_Y)$ sind.

Beweis. Der zweite Isomorphismus haben wir schon bewiesen.

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $X \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $Y \subset \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$. Sei $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus algebraischer Varietäten. Wir schreiben $\varphi : X \to Y$ als $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$. Da die Projektion $p_i : Y \to \mathsf{k}$ definiert durch $p_i(y_1, \cdots, y_m) = y_i$ eine Polynomialefunktion ist also $p_i \in \Gamma(Y) = \mathcal{O}_Y(Y)$ folgt $\varphi_i = p_i \circ \varphi = \varphi^* p_i \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(Y)) = \mathcal{O}_X(X) = \Gamma(X)$. Daraus folgt $\varphi \in \mathrm{Reg}(X, Y)$.

Umgekehrt, sei $\varphi \in \mathrm{Reg}(X, Y)$. Sei $f \in \Gamma(Y)$. Es gilt $\varphi^{-1}(D_Y(f)) = D_X(f \circ \varphi) = D_X(\varphi^* f)$, wobei $\varphi^* f \in \Gamma(X)$. Sei $g \in \mathcal{O}_Y(D_Y(f))$. Dann ist g der Form $g = \frac{a}{f^k}$ mit $a \in \Gamma(Y)$. Es folgt

$$\varphi^* g = \frac{\varphi^* a}{(\varphi^* f)^k} \in \mathcal{O}_X(D_X(\varphi^* f)),$$

weil $\varphi^* a \in \Gamma(X)$. Daraus folgt, dass φ ein Morphismus von algebraischen Varietäten ist. ∎

Bemerkung 8.2.7 Dieser Satz zeigt, dass es eine Äquivalenz von Kategorien

$$\textbf{Alg-Meng} \simeq \textbf{Aff-alg-Var}$$

definiert durch $V \mapsto (V, \mathcal{O}_V)$.

Die zweite Kategorie hat jedoch mehr Objekte: eine standardmäßige offene Teilmenge $D_V(f)$ ist keine algebraische Menge aber eine affine Varietät. Es gilt trotzdem, dass es eine affine algebraische Menge V_f gibt mit $D_V(f) \simeq V_f$ als Varietäten.

8.3. Algebraische Varietäten

Definition 8.3.1 1. Eine **algebraische Varietät** ist ein quasi-kompakter geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ so, dass $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal-isomorph zu einer affinen algebraischen Varietät ist *i.e* für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x so, dass $(U_x, \mathcal{O}_X|_{U_x})$ isomorph zu einer affinen algebraischen Varietät ist.

2. Ein **Morphismus von algebraischen Varietäten** $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Morphismus geringter Räume.

3. Ein **Isomorphismus von algebraischen Varietäten** $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein bjektiver Morphismus geringter Räume so, dass φ^{-1} ein Morphismus von algebraischen Varietäten ist.

Beispiel 8.3.2 Eine affine algebraische Varietät $(X, \mathcal{O}_X)$ ist immer quasi-kompakt (jede algebraische Menge ist quasi-kompakt) und hat eine offene Überdeckung (mit einem Element: X) von induzierten geringten Räumen isomorph zu einer affinen algebraischen Varietät.

Definition 8.3.3 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine algebraische Varietät. Die offene Teilmengen von X die isomorph zu einer affinen algebraischen Varietät sind, heißen **affine offene Teilmengen**.

Lemma 8.3.4 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine algebraische Varietät. Dann ist die Familie aller affinen offenen Teilmengen eine Basis der Topologie. $\square$

Beweis. Sei $U \subset X$ eine nicht leere offene Teilmenge und sei $x \in U$. Sei U_x eine affine offene Teilmenge mit $x \in U_x$. Sei V eine algebraische Menge mit $(U_x, \mathcal{O}_X|_{U_x}) \simeq (V, \mathcal{O}_V)$. Dann ist $U_x \cap U$ offen in U_x. Da die standardmäßige offene Teilmengen eine Basis der Topologie von V (und also von U_x) sind gibt es eine standardmäßige offene Teilmenge $D_V(f)$ mit $x \in D_V(f) \subset U_x \cap U$. Da $D_V(f)$ eine affine algebraische Varietät also eine affine offene Teilmenge ist, folgt die Aussage. $\blacksquare$

Korollar 8.3.5 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine algebraische Varietät und sei U eine offene Teilmenge. Dann sind die Schnitte $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ stetige k-wertige Funktionen auf U.

Beweis. Sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Sei $x \in U$ und sei U_x eine affine offene Teilmenge mit $x \in U_x \subset U$. Dann gilt $f|_{U_x} \in \mathcal{O}_X(U_x)$ und da U_x affine ist, ist $(U_x, \mathcal{O}_X|_{U_x})$ isomorph zu $(V, \mathcal{O}_V)$ für eine algebraische Menge V. Alle Elemente aus $\mathcal{O}_V(V)$ sind aber stetig. Daraus folgt, dass alle Elemente aus $\mathcal{O}_X|_{U_x}(U_x)$ stetig sind und insbesondere $f|_{U_x}$. Es folgt, dass f stetig in x für alle $x \in U$ ist und also stetig. $\blacksquare$

Korollar 8.3.6 Eine algebraische Varietät X ist noethersch. Insbesondere hat X endlich viele irreduzible Komponenten.

Beweis. Sei $X \supset Z_1 \supset \cdots \supset Z_r \supset \cdots$ eine absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen. Sei $U_1, \cdots, U_k$ eine Überdeckung von X, wobei U_i eine affine offene Teilmenge ist (eine solche endliche überdeckung existiert, weil X quasi-kompakt ist). Sei $Z_{i,r} = Z_r \cap U_i$ für alle r und $i \in [1, k]$. Dann ist $(Z_{i,z})_r$ eine absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen von U_i. Aber da U_i affine ist, ist U_i homöomorph zu einer algebraischen Menge als noethersch. Es gibt also ein N_i mir $Z_{i,r} = Z_{N_i,i}$ für alle $r \geq N_i$. Sei jetzt $N = \max_i(N_i)$. Dann gilt $Z_{i,r} = Z_{N,i}$ für alle $i \in [1, r]$. Da $(U_i)_{i \in [1,r]}$ eine Überdeckung von X ist folgt $Z_r = Z_N$ für alle $\geq N$. Es folgt X noethsch. $\blacksquare$

Beispiel 8.3.7 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine algebraische Varietät. Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ auch eine algebraische Varietät (Übung).

Insbesondere ist jede offene Teilmenge einer (affinen) algebraischen Menge auch eine algebraische Varietät. Diese Varietät ist aber nicht immer affine. Zum Beispiel ist die offene Teilmenge $\mathbb{A}_2(\mathsf{k}) \setminus \{0\}$ eine algebraische Varietät aber keine *affine* algebraische Varietät (Übung).

8.4. Untervarietäten

Wir wollen jetzt die Struktur einer algebraischen Varietät auf einer abgeschlossenen Teilmenge einer algebraischen Varietät definieren. Die naive Definition könnte die folgende Defintion sein.

Sei X eine algebraische Varietät und sei $Y \subset X$ abgeschlossen. Wir definieren eine Zuordnung $V \mapsto \mathcal{F}(V)$ für jede offene Teilmenge $V \subset Y$ durch

$$\mathcal{F}(V) = \{f : V \to \mathsf{k} \mid \exists U \subset X \text{ offen mit } V = Y \cap U \text{ und } \exists g \in \mathcal{O}_X(U) \text{ mit } f = g|_V\}.$$

Diese Zuordnung ist aber keine Garbe (auch wenn es nicht so einfach ist einen Gegenbeispiel zu geben).

Definition 8.4.1 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine algebraische Varietät und sei $Y \subset X$ abgeschlossen. Wir setzen $\mathcal{O}_Y = \mathcal{F}^+$ die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe.

Für $V \subset Y$ offen gilt

$$\mathcal{O}_Y(V) = \left\{ f : V \to \mathsf{k} \mid \begin{array}{l} \forall x \in V, \ \exists U \subset X \text{ offen mit } x \in U \text{ und} \\ \exists g \in \mathcal{O}_X(U) \text{ mit } f|_{U\cap V} = g|_{U \cap V} \end{array} \right\}.$$

Proposition 8.4.2 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine algebraische Varietät und sei $Y \subset X$ abgeschlossen. Dann ist $(Y, \mathcal{O}_Y)$ eine algebraische Varietät.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass X affine ist. Da $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorph zu $(V, \mathcal{O}_V)$ für eine algebraische Menge ist, können wir annehmen, dass X eine algebraische Menge ist. Dann ist Y auch eine algebraische Menge und wir zeigen, dass die obige Garbe $\mathcal{O}_Y$ mit der Garbe $\mathcal{R}_Y$ aller regulären Abbildungen übereinstimmt, wobei $\mathcal{R}_Y$ die eindeutige Garbe über Y ist mit

$$\mathcal{R}_Y(D_Y(f)) = \Gamma(D_Y(f))$$

für alle $f \in \Gamma(Y)$. Sobald $\mathcal{O}_Y = \mathcal{R}_Y$ gilt ist $(Y, \mathcal{O}_Y)$ eine algebraische Varietät per Definition. Nach Lemma 7.3.5 genügt es zu zeigen, dass

$$\mathcal{F}(D_Y(f)) = \Gamma(D_Y(f)) = \mathcal{R}_Y(D_Y(f))$$

für alle $f \in \Gamma(Y)$.

Enthaltung "$\supset$": Der Ring $\Gamma(Y)$ ist der Quotient $\Gamma(Y) = \Gamma(X)/I_X(Y)$. Es gibt also ein $F \in \Gamma(X)$ mit $[F] = f \in \Gamma(Y)$. Es gilt $D_X(F) \cap Y = D_Y(f)$. Wir haben der Einschränkung-Ringhomomorphismus

$$\Gamma(D_X(F)) = \Gamma(X)[X_{n+1}]/(1 - X_{n+1}F) \to \Gamma(D_Y(f)) = \Gamma(Y)[X_{n+1}]/(1 - X_{n+1}f)$$

und da $\Gamma(X) \to \Gamma(Y)$ surjektiv ist, ist der Einschränkung-Ringhomomorphismus auch surjektiv. Für $g \in \mathcal{R}_Y(D_Y(f)) = \Gamma(D_Y(f))$ gibt es also ein $G \in \Gamma(D_X(F))$ mit $G|_{D_Y(f)} = g$. Per Definition folgt $g \in \mathcal{F}(D_Y(f))$.

Enthaltung "$\subset$": Sei $g \in \mathcal{F}(D_Y(f))$. Dann gibt es eine offene Teilmenge $U \subset X$ und $G \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $D_Y(f) = U \cap Y$ und $G|_{D_Y(f)} = g$. Sei $(F_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen aus $\Gamma(X)$ so, dass $(D_X(F_i))_{i\in I}$ eine Überdeckung von U ist. Sei $f_i = [F_i] \in \Gamma(Y)$ für $i \in I$. Dann ist $(D_Y(f_i))_{i\in I} = (Y \cap D_X(F_i))_{i\in I}$ eine Überdeckung von $U \cap Y$ und es gilt $G|_{D_X(F_i)} \in \mathcal{O}_X(D_X(F_i)) = \Gamma(D_X(F_i))$. Es folgt, dank dem Einschränkung-Ringhomomorphismus

$$\Gamma(D_X(F_i)) = \Gamma(X)[X_{n+1}]/(1 - X_{n+1}F_i) \to \Gamma(D_Y(f_i)) = \Gamma(Y)[X_{n+1}]/(1 - X_{n+1}f_i),$$

dass $g|_{D_Y(f_i)} = G|_{D_Y(f_i)} = (G|_{D_X(F_i)})_{|}D_Y(f_i) \in \Gamma(D_Y(f_i)) = \mathcal{R}_Y(D_Y(f_i))$. Daraus folgt die Aussage für X affine.

Sei jetzt X eine algemeine algebraische Varietät und sei $(U_i)_{i\in I}$ eine überdeckung von X mit affinen offenen Teilmengen. Dann ist Y quasi-kompakt (Übung) und $(Y \cap U_i)_{i\in I}$ ist eine Überdeckung von Y. Wir haben aber gezeigt, dass $(Y \cap U_i, \mathcal{O}_Y|_{Y\cap U_i}$ isomorph zu $(V, \mathcal{O}_V)$, wobei V eine algebraische Menge ist. Daraus folgt die Aussage. ■

Definition 8.4.3 Sei X ein topologischer Raum. EIne Teilmenge $Y \subset X$ heißt **lokal-abgeschlossen** falls $Y = U \cap Z$, wobei U eine offene Teilmenge und $Z \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge sind.

Korollar 8.4.4 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine algebraische Varietät und sei Y eine lokal-abgeschlossene Teilmenge von X der Form $Y = U \cap Z$ mit U offen und Z abgeschlossen.

Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ eine algebraische Varietät und da $Y = U \cap Z$ abgeschlossen in U ist gibt es eine Garbe $\mathcal{O}8Y$ über Y so, dass $(Y, \mathcal{O}_Y)$ eine algebraische Varietät ist.

Außerdem hängt die Garbe $\mathcal{O}_Y$ von der Darstellung $Y = U \cap Z$ nicht.

Definition 8.4.5 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine algebraische Varietät. Eine **Untervarietät von** X ist das Paar $(Y, \mathcal{O}_Y)$, wobei Y eine lokal-abgeschlossene Teilmenge von X ist und $\mathcal{O}_Y$ ist wie im obigen Korollar definiert.

8.5. Lokale Ringe

Definition 8.5.1 Ein Ring R heißt **lokal** falls R nur ein maximales Ideal $\mathfrak{M}$ hat.

Proposition 8.5.2 Sei R ein Ring. Die folgende Aussagen sind äquivalent:

1. Der Ring R ist lokal.
2. Die Menge aller nicht invertierbaren Elemente ist ein Ideal.

Wenn die obige Aussagen gelten, gilt auch

$$R \setminus \mathfrak{M} = \{r \in R \mid r \text{ ist invertierbar}\},$$

wobei $\mathfrak{M}$ das maximale Ideal von R ist.

Beweis. (1. $\Rightarrow$ 2.) Sei $\mathfrak{M}$ das maximale Ideal. Wir zeigen die Gleichung

$$R \setminus \mathfrak{M} = \{r \in R \mid r \text{ ist invertierbar}\}.$$

Sei r invertierbar. Dann gilt $(r) = R$ und es folgt $r \notin \mathfrak{M}$. Umgekehrt, sei $r \in R \setminus \mathfrak{M}$. Dann ist (r) ein Ideal. Falls $(r) \subsetneq R$ folgt, dass es ein maximales Ideal gibt das (r) enthält also $(r) \subset \mathfrak{M}$. Ein Widerspruch. Daraus folgt $(r) = R$ und $1 \in (r)$. Es gibt also ein $a \in R$ mit $1 = ar$ und r ist invertierbar.

(2. $\Rightarrow$ 1.) Sei I das Komplement der Menge aller invertierbaren Elemente. Dann ist I ein Ideal. Wir zeigen, dass I ein maximales Ideal ist. Sei $J \supsetneq I$ ein Ideal und set $r \in J \setminus I$. Dann ist r invertierbar und es folgt $R = (r) \subset J$ also $J = R$. ∎

Definition 8.5.3 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine algebraische Varietät und sei $x \in X$.

1. Wir betrachten die Menge M aller Paaren (U, f), wobei $U \subset X$ offen ist mit $x \in U$ und $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

2. Auf M definieren wir eine Äquivalenzrelation $(U, f) \sim (V, g)$ falls $x \in U \cap V$ und $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$.

3. Das Quotient $\mathcal{O}_{X,x} = M/\sim$ heißt **Menge aller Keime**. Die Klasse von (U, f) heißt **Keime** von f bei x und wir f_x bezeichnet.

Proposition 8.5.4 Die Menge $\mathcal{O}_x$ hat eine k-Algebra-Struktur. Als Ring ist $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{M}_{X,x} = \{f_x \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f_x(x) = 0\}.$$

Die Operationen sind wie folgt definiert

$$\begin{aligned}
&(U, f) + (V, g) = (U \cap V, f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}),\\
&(U, f) \cdot (V, g) = (U \cap V, f|_{U\cap V} \cdot g|_{U\cap V}) \text{ und}\\
&\lambda(U, f) = (U, \lambda f).
\end{aligned}$$

Beweis. Die erste Aussage werden wir nicht überprüfen (Übung). Man sollte da insbesondere überprüfen, dass die Definition von den Operationen von der Wahl eines Repräsentants nicht abhängt. Man überprüft auch, dass $f_x(x) = f(x)$ für $[(U, f)] = f_x$ hängt vom Repräsentant (U, f) von f_x nicht ab.

Es gibt also ein surjektiver Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathsf{k}$ definiert durch $f_x \mapsto f_x(x)$. Der Kern ist $\mathfrak{M}_{X,x}$ also ist diese Menge ein Maximales Ideal. Wir zeigen jetzt, dass f_x invertierbar ist falls $f_x \in \mathcal{O}_{X,x} \setminus \mathfrak{M}_{X,x}$. Sei (U, f) mit $[(U, f)] = f_x$. Es gilt $f(x) = f_x(x) \neq 0$ also $x \in D_X(f)$. Daraus folgt, dass $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_X(D_X(f))$ und $g_x = [(D_X(f), \frac{1}{f})] \in \mathcal{O}_{X,x}$. Es gilt also

$$f_x g_x = [(U, \frac{1}{f})] \cdot [(D_X(f), f)] = [(U \cap D_X(f), 1)] = 1_x.$$

Daraus folgt f_x invertierbar mit Inverse g_x. ∎

Definition 8.5.5 Seien R und R' zwei lokale Ringe mit maximale Ideale $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$. Ein Ringhomomorphismus $\Phi : R \to R'$ heißt **Morphismus lokaler Ringe** falls $\Phi(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}'$.

Proposition 8.5.6 Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus algebraischer Varietäten und sei $x \in X$. Dann induziert φ ein Morphismus lokaler Ringe

$$\varphi_x^* : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

definiert durch $\varphi_x^*([(U,f)]) = [(\varphi^{-1}(U), \varphi^*(f))] = [(\varphi^{-1}(U), f \circ \varphi)]$.

Außerdem, für Morphismen algebraischer Varietäten $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$, gilt $(\psi \circ \varphi)_x^* = \varphi_x^* \circ \psi_{\varphi(x)}^*$.

Insbesondere, falls φ ein Isomorphismus ist, ist φ_x^* auch ein Isomorphismus.

Beweis. zuerst überpüfen wir, ob φ_x^* wohl definiert ist. Seien (U,f) und (V,g) mit $[(U,f)] = [(V,g)]$. Es gilt also $\varphi(x) \in U \cap V$ und $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$. Es folgt $x \in \varphi^{-1}(U \cap V) = \varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V)$. Es gilt auch $\varphi^*(f)|_{\varphi^{-1}(U\cap V)} = \varphi^*(g)|_{\varphi^{-1}(U\cap V)}$ also ist φ_x^* wohl definiert. Man überpruft leicht, dass es ein Ringhomomorphismus ist (Übung). Für $[(U,f)] = f_{\varphi(x)} \in \mathfrak{M}_{Y,\varphi(x)}$ gilt $f(x) = f_{\varphi(x)}(\varphi(x)) = 0$ also gilt $\varphi_x^*(f_{\varphi(x)})(x) = (f \circ \varphi)(x) = 0$ und $\varphi_x^*(f_{\varphi(x)}) \in \mathfrak{M}_{X,x}$. Es folgt, dass φ_x^* ein Morphimus lokaler Ringe ist.

Sei $[(U,f)] \in \mathcal{O}_{Z,\psi(\varphi(x))}$. Es gilt

$$(\psi\circ\varphi)_x^*([(U,f)]) = [\varphi^{-1}(\psi^{-1}(U)), f\circ\psi\circ\varphi)] = \varphi_x^*([\psi^{-1}(U), f\circ\psi)] = \varphi_x^*\psi_{\varphi(x)}^*([U,f)]).$$

Insbesondere, falls φ ein Isomorphismus ist setzen wir $\psi = \varphi^{-1}$. Dann ist $\psi_{\varphi(x)}^*$ das Inverse von φ_x^*. ∎

9. Projektive Varietäten

9.1. Strukture Garbe einer projektiven algebraischen Menge

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass jede projektive algebraische Menge V auch eine algebraische Varietät ist. Dafür denotigen wir eine Strukturgarbe über V.

Um diese Garbe zu definieren brauchen wir nur (Dank Lemma 7.3.6) die Garbe für eine Basis der Topologie zu definieren. Wir werden die standardmäßige offene Teilmengen $D_V^+(f)$, wobei $f \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ homogen von positiver Grad ist benutzen als Basis der Topologie.

Beispiel 9.1.1 Sei $V = \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ und sei $f = X_0 \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$. Dann setzen wir

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}(D^+(X_0)) = \left\{ \frac{P}{X_0^d} \mid P \text{ homogen von Grad } d \right\}.$$

Ein Element $f = \frac{P}{X_0^d}$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}(D^+(X_0))$ definiert eine Funktion auf $D^+(X_0)$: Sei $[x_0 : \cdots : x_n] \in D^+(X_0)$. Dann gilt $x_0 \neq 0$ und für $[\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n]$ ein weiteres Repräsentant gilt

$$f(\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n) = \frac{P(\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n)}{(\lambda x_0)^d} = \frac{\lambda^d P(x_0, \cdots, x_n)}{\lambda^d x_0^d} = f(x_0, \cdots, x_n).$$

Wir wollen dieses Beispiel verallgemeinern.

Definition 9.1.2 Ein Ring R heißt **$\mathbb{Z}$-graduiert** falls es eine Zerlegung

$$R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$$

gibt mit $R_n \cdot R_m \subset R_{n+m}$.

Lemma 9.1.3 Sei R ein graduierter Ring und sei $f \in R_d$ homogen von Grad d. Dann hat $R[X_{n+1}]/(1 - X_{n+1} f)$ eine $\mathbb{Z}$-Graduierung so, dass $\deg_A([X_{n+1}]) = -d$ und für $r \in R_n$ gilt $\deg_A(r) = n$. □

Bemerkung 9.1.4 Der Grad von $[X_{n+1}]$ ist durch die Gleichung $1-[X_{n+1}][f]$ fest gegeben: es gilt $0 = \deg_A(1) = \deg_A([X_{n+1}][f]) = \deg_A([X_{n+1}])+\deg([f]) = \deg_A([X_{n+1}])+d$.

Beweis. Wir setzen $A = R[X_{n+1}]/(1 - X_{n+1}f)$ und $A_n = \langle aX_0^k \mid a \in R_{n+dk}\rangle$. Man überprüft leicht, dass die eine $\mathbb{Z}$-graduierung definiert. ∎

Definition 9.1.5 Sei R ein graduierter Ring und sei $f \in R_d$ homogen von Grad d. Sei $A = R[X_{n+1}]/(1 - X_{n+1}f)$ mit der $\mathbb{Z}$-Graduierung definiert im obigen Lemma. Wir setzen $R_{(f)} = A_0$.

Bemerkung 9.1.6 Elemente in A sind der form

$$\sum_{k=0}^{d} a_k[X_{n+1}]^k = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{f^k} = \frac{a}{f^k},$$

wobei $a, a_k \in R$ für alle k. Homogene Elemente in A sind also der Form $\frac{a}{f^k}$, wobei a homogen ist. Elemente in $R_{(f)} = A_0$ sind also der Form

$$\frac{a}{f^k} \text{ mit } a \in R_{dk}.$$

Definition 9.1.7 Sei V eine projektive algebraische Menge und sei $f \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ homogen von Grad d. Dann setzen wir

$$\mathcal{O}_V(D_V^+(f)) = \Gamma(D_V^+(f), \mathcal{O}_V) = \Gamma_{\mathbb{P}}(D_V^+(f)) = \Gamma_{\mathbb{P}}(V)_{(f)}.$$

Bemerkung 9.1.8 Ein Element $\frac{a}{f^k} \in \mathcal{O}_V(D_V^+(f))$ definiert eine k-wertige Funktion auf $D_V^+(f)$: Sei $P \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ homogen von Grad dk so, dass $[P] = a \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$. Dann gilt für $[x_0 : \cdots : x_n] \in D_V^+(f)$ und $\lambda \neq 0$:

$$\frac{a}{f^k}(\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n) = \frac{P(\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n)}{(f(\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n))^k} = \frac{\lambda^{kd} P(x_0, \cdots, x_n)}{(\lambda^d f(x_0, \cdots, x_n)^k} = \frac{a}{f^k}(x_0, \cdots, x_n).$$

Nach Lemma 7.3.6 genügt es die Garbe $\mathcal{O}_V$ für eine Basis $\mathcal{U}$ der Topologie zu definieren und dann zu zeigen, dass die folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(A) Für $U, W \in \mathcal{U}$ mit $W \subset U$ gilt $(f \in \mathcal{O}_V(U) \Rightarrow f|_W \in \mathcal{O}_V(W))$.

(B) Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von einer offenen Teilmenge U, wobei $U, U_i \in \mathcal{U}$ für alle $i \in I$. Für jede Funktion $f : U \to \mathbf{M}$ mit $f|_{U_i} \in \mathcal{O}_V(U_i)$ gilt $f \in \mathcal{O}_V(U)$.

Proposition 9.1.9 Sei V eine projektive algebraische Menge.

Die Zuordnung $D_V^+(f) \mapsto \mathcal{O}_V(D_V^+(f)) = \Gamma_{\mathbb{P}}(D_V^+(f))$ erfüllt die Eingenschaften (A) und (B) vom Lemma 7.3.6.

Insbesondere gibt es eine eindeutig bestimmte Garbe $\mathcal{O}_V$ über V mit

$$\Gamma(D_V^+(f), \mathcal{O}_V(D_V^+(f))) = \mathcal{O}_V(D_V^+(f)) = \Gamma_{\mathbb{P}}(D_V^+(f)) = \Gamma_{\mathbb{P}}(V)_{(f)}.$$

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ die Familie aller stadardmäßigen offenen Teilmengen. Wir zeigen (A): Für $U, W \in \mathcal{U}$ mit $W \subset U$ gilt $(f \in \mathcal{O}_V(U) \Rightarrow f|_W \in \mathcal{O}_V(W))$.

Seien also $f, g \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ homogen mit $W = D_V^+(g) \subset U = D_V^+(f)$. Daraus folgt $V_{\mathbb{P}}(I_{\mathbb{P}}(V)+(f)) = V \cap V_{\mathbb{P}}(f) \subset V \cap V_{\mathbb{P}}(g) = V_{\mathbb{P}}(I_{\mathbb{P}}(V)+(g))$. Seien $P, Q \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ mit $[P] = f$ und $[Q] = g$ in $\Gamma_{\mathbb{P}}(V)$. Es gilt (Nullstellensatz) $\sqrt{I_{\mathbb{P}}(V) + (P)} \supset \sqrt{I_{\mathbb{P}}(V) + (Q)}$. Insbesondere gibt es ein $r \geq 1$ mit $Q^r \in I_{\mathbb{P}}(V) + (P)$ also gibt es ein $h \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ mit $g^r = fh$.

Sei $\frac{a}{f^k} \in \Gamma_{\mathbb{P}}(D_V^+(f))$ wobei $a \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ homogen vom Grad $k \deg(f)$ ist. Es gilt

$$\frac{a}{f^k} = \frac{ah^k}{g^{kr}} \in \Gamma_{\mathbb{P}}(D_V^+(g)).$$

Wir zeigen jetzt (B): Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von einer offenen Teilmenge U, wobei $U, U_i \in \mathcal{U}$ für alle $i \in I$. Für jede Funktion $\psi : U \to \mathbf{M}$ mit $\psi|_{U_i} \in \mathcal{O}_V(U_i)$ gilt $\psi \in \mathcal{O}_V(U)$. Sei $U = D_V^+(f)$ und seien $U_i = D_V^+(f_i)$ so, dass $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von U ist. Da U quasi-kompakt ist durfen wir annehmen, dass I endlich ist. Sei $\psi : D_V^+(f) \to \mathsf{k}$ eine Funktion so, dass $\psi|_{U_i} \in \mathcal{O}_V(U_i)$. Es gibt also $a_i \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ und $r \geq 0$ mit $\psi|_{U_i} = \frac{a_i}{f_i^r}$ (da es nur endlich viele $i \in I$ gibt können wir, die gleiche Zahl r für alle $\psi|_{U_i}$ nehmen). Da $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von U ist folgt

$$V \cap \bigcap_{i \in I} V_{\mathbb{P}}(f_i) \subset V \cap V_{\mathbb{P}}(f) \subset V \cap V_{\mathbb{P}}(f_i).$$

Es folgt

$$\sqrt{I_{\mathbb{P}}(V) + (f_i)} \subset \sqrt{I_{\mathbb{P}}(V) + (f)} \subset \sqrt{I_{\mathbb{P}}(V) + \sum_{i \in I} (f_i)}.$$

Da I endlich ist, gilt

$$\sqrt{I_{\mathbb{P}}(V) + \sum_{i \in I} (f_i)} = \sqrt{I_{\mathbb{P}}(V) + \sum_{i \in I} (f_i^{r+1})}$$

und es folgt, dass es ein N gibt mit $f^N \in \sum_{i \in I} (f_i^{r+1})$ also

$$f^N = \sum_{i \in I} b_i f_i^{r+1},$$

wobei $b_i \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$. Sei

$$\varphi = \frac{\sum_{i \in I} a_i b_i f_i}{f^N} \in \Gamma_{\mathbb{P}}(D_V^+(f)) = \mathcal{O}_V(U).$$

Wir zeigen, dass $\varphi|_{U_i} = \psi|_{U_i}$. Daraus folgt $\psi = \varphi$ und die Aussage. Es gilt $\frac{a_i}{f_i^r}|_{U_i \cap U_j} = \frac{a_j}{f_j^r}|_{U_i \cap U_j}$. Es folgt $(a_i f_j^r - a_j f_i^r)|_{U_i \cap U_j} = 0$. Daraus folgt $f_i f_j (a_i f_j^r - a_j f_i^r) = 0$ als Funktion über U also $a_j f_i^{r+1} f_j = a_i f_j^{r+1} f_i$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\varphi|_{U_i} - \psi|_{U_i} &= \frac{\sum_{j \in I} a_j b_j f_j}{f^N} - \frac{a_i}{f_i^r} \\
&= \frac{\sum_{j \in I} a_j b_j f_j f_i^{r+1} - a_i f_i f^N}{f^N f_i^{r+1}} \\
&= \frac{\sum_{j \in I} a_i b_j f_i f_j^{r+1} - a_i f_i f^N}{f^N f_i^{r+1}} \\
&= \frac{a_i f_i \sum_{j \in I} b_j f_j^{r+1} - a_i f_i f^N}{f^N f_i^{r+1}} \\
&= \frac{a_i f_i f^N - a_i f_i f^N}{f^N f_i^{r+1}} = 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Aussage. ∎

9.2. Projektive algebraische Varietäten

Proposition 9.2.1 Sei V eine projektive algebraische Menge. Dann ist $(V, \mathcal{O}_V)$ eine algebraische Varietät.

Definition 9.2.2 Sei V eine projektive algebraische Menge. Die algebraische Varietät $(V, \mathcal{O}_V)$ heißt **projektive algebraische Varietät**.

Für $U \subset V$ eine offene Teimenge ist $(U, \mathcal{O}_V|_U)$ eine algebraische Varietät. Eine solche Varietät heißt **quasi-projektive Varietät**.

Definition 9.2.3 Falls $(X, \mathcal{O}_X)$ eine affine Varietät ist und $U \subset X$ eine offene Teimenge ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ eine algebraische Varietät. Eine solche Varietät heißt **quasi-affine Varietät**.

Beweis. Angenommen $(\mathbb{P}_n(\mathsf{k}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})})$ eine algebraische Varietät ist, zeigen wir, dass $(V, \mathcal{O}_V)$ eine algebraische Varietät ist für jede projektive algbraische Menge $V \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. Dafür zeigen wir, für jedes $f \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ homogen, die Gleichung

$$\mathcal{O}_V(D_V^+(f)) = \left\{ g : D_V^+(f) \to \mathsf{k} \mid \begin{array}{l} \exists U \text{ offen in } \mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \text{ mit } D_V^+(f) \subset U \text{ und} \\ \exists h \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}(U) \text{ mit } h|_{D_V^+(f)} = g \end{array} \right\}.$$

Falls diese Gleichung gilt, folgt, dass $\mathcal{O}_V$ die von einer abgeschlossenen Teilmenge einer algebraischen Varietät induzierte Garbe ist und also, dass $(V, \mathcal{O}_V)$ eine algebraische Varietät ist.

"$\subset$" Sei $F \in \Gamma_{\mathbb{P}}(\mathbb{P}_n(\mathsf{k})) = \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ homogen mit $[F] = f \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ und also mit $\deg(F) = \deg(f)$. Ein Element in $\mathcal{O}_V(D_V^+(f))$ ist der Form $\frac{a}{f^k}$ mit $a \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$

vom Grad $k\deg(f)$. Sei $A \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ homogen mit $a = [A] \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$. Es gilt $\deg(A) = \deg(a) = k\deg(f) = k\deg(F)$. Daraus folgt

$$\frac{a}{f^k} = \frac{A}{F^k}|_V.$$

"$\supset$" Sei $g : D_V^+(f) \to \mathsf{k}$ so, dass es eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ gibt mit $D_V^+(f) \subset U$ und ein $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}(U)$ mit $h|_{D_V^+(f)} = g$. Sei $D^+(F_i)$ eine Überdeckung von U mit F_i homogen und $f_i = [F_i] \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$. Es gilt $h|_{D^+(F_i)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}(D^+(F_i))$ also gilt $h|_{D^+(F_i)} = \frac{A_i}{F_i^{N_i}}$ für ein A_i homogen von Grad $N_i\deg(F_i)$. Es folgt

$$g|_{D_V^+(f)\cap D^+(F_i)} = h|_{D^+(F_i)} = \frac{A_i}{F_i^{N_i}}|_{D_V^+(f)\cap D^+(F_i)} = \frac{a_i}{f_i^{N_i}}|_{D_V^+(f)\cap D_V^+(f_i)},$$

wobei $a_i = [A_i] \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$. Es folgt $g|_{D_V^+(f)\cap D^+(F_i)} \in \mathcal{O}_V(D_V^+(f) \cap D^+(F_i))$ und $g \in \mathcal{O}_V(D_V^+(f))$. Daraus folgt die obige Gleichung.

Wir zeigen jetzt, dass $(\mathbb{P}_n(\mathsf{k}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})})$ eine algebraische Varietät ist. Da $(D^+(X_i))_{i\in[0,n]}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ ist genugt es zu, zeigen, dass $(D^+(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(\mathsf{k})|_{D^+(X_i)})$ eine affine algebraische Varietät ist. Im folgenden Lemma zeigen wir diese Aussage für $D^+(X_0)$. Der Beweis für $D^+(X_i)$ ist analog. ∎

Lemma 9.2.4 Die Abbildung $\varphi : \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \to D^+(X_0)$ definiert durch $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = [1 : x_1 : \cdots : x_n]$ ist ein Isomorphismus geringter Räume. □

Beweis. Wir wissen schon, dass diese Abbildung eine Bijektion ist mit Inverse ψ definiert durch

$$\psi([x_0 : \cdots : x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Wir betrachten der Dämpferoperator

$$\flat : \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n] \to \mathsf{k}[_1, \cdots, X_n]$$

definiert durch $\flat(P)(X_1, \cdots, X_n) = P_\flat(X_1, \cdots, X_n) = P(1, X_1, \cdots, X_n)$. Dies ist ein Ringhomomorphismus mit Kern $(X_0 - 1)$. Für P homogen von Grad d gilt

$$P_\flat\left(\frac{X_1}{X_0}, \cdots, \frac{X_n}{X_0}\right) = \frac{P(X_0, \cdots, X_n)}{X_0^d}.$$

Wir betrachten auch die Rautenoperation. Diese Operation bildet $\mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ auf $\mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ aber ist kein Ringhomomorphismus. Für $p \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ von Grad d setzen wir

$$p^\sharp(X_0, \cdots, X_n) = X_0^d p\left(\frac{X_1}{X_0}, \cdots, \frac{X_n}{X_0}\right).$$

Man zeigt (Übung), dass $p^\sharp$ ein homogenes Polynom ist.

φ und ψ sind stetig. Sei $D^+(F) \subset D^+(X_0)$. Es gilt $\varphi^{-1}(D^+(F)) = D(F_\flat)$ und φ ist stetig. Umgekehrt, sei $D(f) \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Es gilt $\psi^{-1}(D(f)) = D^+(X_0) \cap D^+(f^\sharp)$ ist offen in $D^+(X_0)$.

φ^* und ψ^* sind Morphismen von Garben. Sei $F \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ homogen. Es gilt $D^+(F) \cap D^+(X_0) = D^*(FX_0)$. Wir zeigen, dass

$\varphi^* : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}(D^+(FX_0)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n(\mathsf{k})}(D(F_\flat))$ und $\psi^* : \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n(\mathsf{k})}(D(F_\flat)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}(D^+(FX_0))$.

Sei $G \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}(D^+(FX_0))$. Dann gibt es $A \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ homogen von Grad $k(\deg F + 1)$ mit $G = \frac{A}{X_0^k F^k}$. Es folgt

$$\varphi^*(G) = \varphi^*\left(\frac{A}{X_0^k F^k}\right) = \frac{A_\flat}{F_\flat^k} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n(\mathsf{k})}(D(F_\flat)).$$

Sei $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n(\mathsf{k})}(D(F_\flat))$. Dann gibt es $a \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ mit $g = \frac{a}{F_\flat^k}$. Es folgt

$$\psi^*(g) = \psi^*\left(\frac{a}{F_\flat^k}\right) = \frac{a\left(\frac{X_1}{X_0}, \cdots, \frac{X_n}{X_0}\right)}{\left(F_\flat\left(\frac{X_1}{X_0}, \cdots, \frac{X_n}{X_0}\right)\right)^k} = \frac{X_0^{k\beta} a^\sharp(X_0, \cdots, X_n)}{X_0^\alpha\left((F_\flat)^\sharp(X_0, \cdots, X_n)\right)^k},$$

wobei $\alpha = \deg(a)$ und $\beta = \deg(F_\flat)$. Man überprüft aber leicht die Eigenschaft (Übung): Für $P \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ homogen und r die maximale Potenz von X_0 die P teilt, gilt

$$P(X_0, \cdots, X_n) = X_0^r (P_\flat)^\sharp(X_0, \cdots, X_n).$$

Daraus folgt $F(X_0, \cdots, X_n) = X_0^r (F_\flat)^\sharp(X_0, \cdots, X_n)$ und

$$\psi^*(g) = \frac{X_0^{k\beta} a^\sharp(X_0, \cdots, X_n)}{X_0^\alpha\left((F_\flat)^\sharp(X_0, \cdots, X_n)\right)^k} = \frac{X_0^{k\beta + kr} a^\sharp(X_0, \cdots, X_n)}{X_0^\alpha F(X_0, \cdots, X_n)^k} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}(D^+(FX_0)).$$

Wir zeigen $\varphi^* \circ \psi^* = \mathrm{Id}$ und $\psi^* \circ \varphi^* = \mathrm{Id}$. Sei $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n(\mathsf{k})}(D(F_\flat))$. Dann gilt

$$(\varphi^* \circ \psi^*(g))(x_1, \cdots, x_n) = (\psi^* g)(1, x_1, \cdots, x_n) = g\left(\frac{x_1}{1}, \cdots, \frac{x_n}{1}\right) = g(x_1, \cdots, x_n).$$

Sei $G \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}(D^+(FX_0))$ der Form

$$G = \frac{A}{X_0^k F^k}$$

mit A homogen von Grad $\deg(A) = d = k(\deg(F) + 1)$. Ohne Einschränkung können Wir annehmen, dass X_0 die Polynome A und F nicht Teilt. Es folgt $\deg(A_\flat) = \deg(A)$

und $\deg(F_\flat) = \deg(F)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
(\psi^* \circ \varphi^*(G))(x_0, \cdots, x_n) &= (\varphi^* G)\left(\frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0}\right) \\
&= G\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0}\right) \\
&= \frac{x_0^{-\deg(A_\flat)}(A_\flat)^\sharp(x_0, \cdots, x_n)}{1^k x_0^{-\deg(F_\flat)}\left((F_\flat)^\sharp(x_0, \cdots, x_n)\right)^k} \\
&= \frac{A(x_0, \cdots, x_n)}{x_0^k F(x_0, \cdots, x_n)^k} \\
&= G(x_0, \cdots, x_n).
\end{aligned}$$

Damit folgt die Aussage. ∎

Bemerkung 9.2.5 Die Varietät $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ ist irreduzibel: es gibt eine offene Überdeckung $(D^+(X_i))_{i\in[0,n]}$, wobei alle offene Teilmenge irreduzibel sind (isomorph zu $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$) und $D^+(X_i) \cap D^+(X_j) \neq \emptyset$. Die Aussage folgt aus Übung 5, Übungsblatt 2 per Induktion nach n.

Man kann auch den folgenden Satz zeigen (Siehe Übungsblatt 10):

Proposition 9.2.6 Es gilt $\Gamma(\mathbb{P}_n(\mathsf{k}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n(\mathsf{k})}(\mathbb{P}_n(\mathsf{k})) = \mathsf{k}$.

Mit anderen Worten: Im projektiven Raum gibt es nur Konstanten als globale reguläre Funktionen.

Teil IV.

Geometrie algebraischer Varietäten

10. Tangenträume

In der algebraischen Geometrie arbeiten wir mit beliebiegen Körpern. Insbesondere gibt es im algemein keine *kleine Elemente* ε im Körper k wie mit reelle oder komplexe Zahlen. Wir werden dies ersetzen durch eine formale Variable ε die *künstlich sehr klein* sein wird: ε^2 is so klein, dass wir einfach setzen $\varepsilon^2 = 0$.

10.1. Tangenraum einer affinen algenbraischen Menge

Sei $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ eine affine algebraische Menge und sei $v = (v_1, \cdots, v_n) \in V$.

Definition 10.1.1 Sei ε eine Variable mit $\varepsilon^2 = 0$.

Der Tangentraum T_vV von V bei v ist die Menge

$$T_vV = \{w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathsf{k}^n \ |P(v + \varepsilon w) = 0 \text{ für alle } P \in I(V)\}.$$

Beispiel 10.1.2 Sei $V = V(Y - X^2) \subset \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$. Dann gilt $v = (0, 0) \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned} T_vV &= \{w = (x, y) \in \mathsf{k}^2 \mid (\varepsilon y - 0) - (\varepsilon^2 x - 0)^2 = 0\} \\ &= \{w = (x, y) \in \mathsf{k}^2 \mid \varepsilon y = 0\} \\ &= \{w = (x, y) \in \mathsf{k}^2 \mid y = 0\}. \end{aligned}$$

Dies ist die Tangentgerade der Parabola.

Beispiel 10.1.3 Sei $\mathrm{SL}_n = V(\det -1) \subset M_n(\mathsf{k})$. Dann gilt $I_n \in \mathrm{SL}_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} T_{I_n} \mathrm{SL}_n &= \{M \in M_n(\mathsf{k}) \mid \det(I_n + \varepsilon M) = 1\} \\ &= \{M \in M_n(\mathsf{k}) \mid \det(I_n) + \varepsilon \mathrm{Tr}(M) = 1\} \\ &= \{M \in M_n(\mathsf{k}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\} = \mathfrak{sl}_n(\mathsf{k}). \end{aligned}$$

Dies ist die Liealgebra von $\mathrm{SL}_n(\mathsf{k})$.

Beispiel 10.1.4 Sei $V = V(X - YZ, Y^2 - XZ, Y - Z^2) \subset \mathbb{A}_3(\mathsf{k})$. Dann gilt $v = (0, 0, 0) \in V$. Es gilt $T_vV = \{w = (x, y, z) \in \mathsf{k}^3 \mid x = y = 0\}$.

Beispiel 10.1.5 Sei $V = \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $v \in V$. Dann gilt $T_vV = \mathsf{k}^n$.

Beispiel 10.1.6 Sei $V = V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ und $v = (0,0) \in V$. Dann gilt $T_vV = \mathsf{k}^2$.

Proposition 10.1.7 Sei V eine algebraische Menge und $v \in V$. Dann ist T_vV ein k-Unterraum von k^n.

Beweis. Sei $v = (v_1, \cdots, v_n)$ und sei $P \in I(V)$. Wir schreiben P als Polynom in $X_1 - v_1, \cdots, X_n - v_n$. Es gilt

$$P = \sum_{i_1,\cdots,i_n} a_{i_1,\cdots,i_n}(X_1 - v_1)^{i_1} \cdots (X_n - v_n)^{i_n}.$$

Sei $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathsf{k}^n$. Wir setzen $v+\varepsilon w$ in P ein *i.e.* wir ersetzen $X_i - v_i$ mit εw_i. Da $\varepsilon^2 = 0$ veschwinden alle Terme von Grad grösser gleich 2. Da $P(v_1, \cdots, v_n) = 0$ bleiben nur die Termen von Grad 1 übrig:

$$a_1w_1 + \cdots + a_nw_n = 0.$$

Daraus folgt, dass T_vV ein Unterraum von k^n ist. ∎

Bemerkung 10.1.8 Jede Gleichung $f \in \Gamma(V)$ gibt eine Gleichung $f(v + \varepsilon w) = 0$ und davon eine lineare Gleichung für $T_v(V)$. Diese Gleichung ist gegeben durch

$$0 = \mathrm{d}_v f(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(v_1, \cdots, v_n).$$

10.2. Derivationen

Definition 10.2.1 Sei $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ eine algebraische Menge und $v \in V$.

1. **Eine Derivation von V bei** v ist eine k-lineare Abbildung $D : \Gamma(V) \to \mathsf{k}$ so, dass
$$D(fg) = f(v)D(g) + g(v)D(f)$$
für alle $f, g \in \Gamma(V)$.

2. Wir schreiben $\mathrm{Der}(V, v)$ für die Menge aller Derivation.

Bemerkung 10.2.2 Eine Derivation $D \in \mathrm{Der}(V, v)$ von V bei v induziert eine Derivation $\tilde{D} : \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n] \to \mathsf{k}$ definiert durch $\tilde{D}(P) = \tilde{D}([P])$. Für diese Derivation gilt $\tilde{D}(PQ) = P(v)\tilde{D}(Q) + Q(v)\tilde{D}(P)$.

Für $P \in I(V)$ gilt $\tilde{D}(P) = D([P]) = D(0) = 0$.

Proposition 10.2.3 Es gibt ein Isomorphismus $\mathrm{Der}(V, v) \simeq T_v(V)$.

Beweis. Seien $\varphi : \mathrm{Der}(V,v) \to T_v(V)$ und $\psi : T_v(V) \to \mathrm{Der}(V,v)$ definiert durch $\varphi(D) = (\tilde{D}(X_1), \cdots, \tilde{D}(X_n))$ (wobei $\tilde{D} : \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n] \to \mathsf{k}$ die von D induzierte Derivation) und $D = \psi(w_1, \cdots, w_n)$ die Derivation definiert durch:

$$D(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(v_1, \cdots, v_n) = \mathrm{d}_v(f)(w).$$

Wir zeigen, dass beide Abbildungen wohl definiert und inverse von einander sind. Sei $w = (\tilde{D}(X_1), \cdots, \tilde{D}(X_n))$, wobei $D \in \mathrm{Der}(V,v)$ und $\tilde{D} : \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n] \to \mathsf{k}$ die induzierte Derivation ist. Sei $P \in I(V)$. Es gilt $\tilde{D}(P) = 0$ aber auch

$$0 = \tilde{D}(P) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{D}(X_i) \frac{\partial P}{\partial X_i}(v_1, \cdots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial P}{\partial X_i}(v_1, \cdots, v_n).$$

Dies ist die von $P(v + \varepsilon w) = 0$ induzierte lineare Gleichung vom Tangentraum T_vV. Daraus folgt $(w_1, \cdots, w_n) \in T_v(V)$ und φ is wohl definiert.

Andersrum, sei $w = (w_1, \cdots, w_n) \in T_vV$ und sei $D = \psi(w)$. Wir überprüfen, dass D auf $\Gamma(V)$ wohl definiert ist *i.e.* $\tilde{D}(P) = 0$ für $P \in I(V)$. Dies ist nochmal die von $P(v + \varepsilon w) = 0$ induzierte lineare Gleichung vom Tangentraum. Daraus folgt, dass ψ wohl definiert ist.

Sei $w \in T_vV$ und $D = \psi(w)$. Es gilt

$$\varphi(\psi(w)) = \varphi(D) = (D(X_1), \cdots, D(X_n)) = (w_1, \cdots, w_n).$$

Umgekehrt sei $D \in \mathrm{Der}(V,v)$ und $w = \varphi(D)$. Es gilt

$$\psi(\varphi(D))(f) = \psi(w)(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(v_1, \cdots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) \frac{\partial f}{\partial X_i}(v_1, \cdots, v_n).$$

Daraus folgt $\psi(\varphi(D))(f) = D(f)$ und die Proposition. ∎

10.3. Deformationen

Wir geben jetzt eine Definition dank geringten Räumen.

Definition 10.3.1 Sei k ein Körper.

1. Wir setzen $\mathsf{k}[\varepsilon] = \mathsf{k}[X]/(X^2)$.

2. Wir setzen $\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon]) = (\{*\}, \mathcal{O}_{\{*\}})$, wobei $\{*\}$ die einelementige Menge ist und die Garbe $\mathcal{O}_{\{*\}}$ durch

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon])}(\{*\}) = \mathsf{k}[\varepsilon]$$

definiert ist (die Menge $\{*\}$ hat nur eine nicht leere offene Teilmenge: $\{*\}$) und mit $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon])}(\emptyset) = 0$.

Bemerkung 10.3.2 Der geringte Raum $\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon])$ ist keine Varietät (z.B. ist der lokal Ring $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon]),*}$ nicht reduziert). Es ist aber ein *Schemata*. Schemata sind die Objekte der algebraischen Geometrie.

Bemerkung 10.3.3 Die einelementige Menge $\{*\}$ definiert auch ein geringter Raum $\mathrm{Spec}(\mathsf{k}) = (\{*\}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k})})$, wobei

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k})}(\{*\}) = \mathsf{k}$$

und $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k})}(\emptyset) = 0$.

Bemerkung 10.3.4 Sei $(X, \mathcal{O}_X)V$ eine algebraische Varietät. Ein Punkt $x \in X$ ist gegeben durch einen Morphismus geringter Räume $\iota_x : \mathrm{Spec}(\mathsf{k}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ mit $\iota_x(*) = x$. Für $U \subset X$ offen haben wir

$$\iota_{x,U}^* : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k})}(\varphi^{-1}(U)) = \begin{cases} \mathsf{k} & \text{für } x \in U \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\iota_{x,U}^*(f) = f(x)$ für $x \in U$.

Bemerkung 10.3.5 Der geringte Raum $\mathrm{Spec}(\mathsf{k})$ ist ein Unterraum von $\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon])$. Die Einbettung $j : \mathrm{Spec}(\mathsf{k}) \to \mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon])$ ist definiert durch $j(*) = *$ (Identitätabbildung für Punkte) und $j_{\{*\}}^* : \mathsf{k}[\varepsilon] \to \mathsf{k}$ ist die kanonische Projektion zum Quotient modulo das Ideal (ε).

Definition 10.3.6 Sei $(X, \mathcal{O}_X)V$ eine algebraische Varietät und sei $x \in X$.

Eine **Deformation von X bei x** ist ein Morphismus geringter Räume

$$\varphi : (\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon]), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon])}) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

mit $\varphi \circ j = \iota_x$. $\mathrm{Def}(X, x)$ ist **die Menge aller Deformationen von X bei x.**

Proposition 10.3.7 Sei V eine algebraische Menge und $v \in V$. Dann gibt es Isomorphismen von k-Vektorräume:

$$T_v V \simeq \mathrm{Der}(V, v) \simeq \mathrm{Def}(V, v).$$

Beweis. Der erste Isomorphismus haben wir schon bewiesen, wir zeigen die zweite. Wir definieren $\Phi : \mathrm{Def}(V, v) \to \mathrm{Der}(V, v)$ wie folgt: Sei $\varphi \in \mathrm{Def}(V, v)$. Dann haben wir ein Ringhomomorphismus $\varphi^* : \Gamma(V) = \mathcal{O}_V(V) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon])}(\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon])) = \mathsf{k}[\varepsilon]$ der Form $\varphi^*(f) = A(f) + \varepsilon D(f)$. Wir setzen $\Phi(\varphi) = D : \Gamma(V) \to \mathsf{k}$.

Wir zeigen, dass D eine Derivation ist. Man überprüft leicht, dass D linear ist. Da $\varphi \circ j = \iota_v$, gilt $A(f) = j^* \varphi^*(f) = \iota_v(f) = f(v)$. Da φ^* ein Ringhomomorphismus ist, gilt

$$f(v)g(v) + \varepsilon D(fg) = \varphi^*(fg) = \varphi^*(f)\varphi^*(g) = (f(v) + \varepsilon D(f))(g(v) + \varepsilon D(g)).$$

Daraus folgt, dass D eine Derivation ist.

Sei $D \in \mathrm{Der}(V, v)$. Wir definieren $\Psi(D) : \mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon]) \to (V, \mathcal{O}_V)$ wie folgt. Wir setzen $\Psi(D)(*) = v$. Um ein Morphismus von Garben $\Psi(D)^* : \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon])}$ zu definieren genügt es mit standardmäßigen offenen Teilmengen $D_V(f)$ zu arbeiten. Wir setzen

$$\Psi(D)^*_{D_V(f)} : \mathcal{O}_V(D_V(f)) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon])}(\varphi^{-1}(D_V(f))) = \begin{cases} \mathsf{k}[\varepsilon] & \text{für } f(v) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

$$\Psi(D)^*_U\left(\frac{a}{f^r}\right) = \frac{a(v)}{f(v)^r} + \varepsilon D\left(\frac{a}{f^r}\right)$$

für $v \in U$. Man überprüft, dass dies ein Morphismus geringter Räume ist: für $D_V(g) \subset D_V(f)$ gibt es ein $h \in \Gamma(V)$ mit $fh = g^k$. Es folgt $a/f^r|_{D_V(g)} = ah^r/g^{kr}$ die Derivationen übereinstimmen.

Wir zeigen jetzt, dass Φ und Ψ inverse voneinander sind. Offenbar gilt $\Phi(\Psi(D)) = D$. Sei $\varphi \in \mathrm{Def}(V, v)$. Als Abbildungen sind φ und $\Psi(\Phi(\varphi))$ gleich. Da φ^* ein Ringhomomorphismus ist gilt

$$1 = \varphi^*\left(\frac{f}{f}\right) = \varphi^*(f)\varphi^*\left(\frac{1}{f}\right) = (f(v) + \varepsilon D(f))\varphi^*\left(\frac{1}{f}\right).$$

Daraus folgt

$$\varphi^*\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{f(v)} - \varepsilon\frac{D(f)}{f(v)^2} = \frac{1}{f(v)} + \varepsilon D\left(\frac{1}{f}\right) \text{ und } \varphi^*\left(\frac{a}{f^r}\right) = \frac{a(v)}{f(v)^r} + \varepsilon D\left(\frac{a}{f^r}\right).$$

Es folgt

$$\varphi^*\left(\frac{a}{f^r}\right) = \frac{a(v)}{f(v)^r} + \varepsilon D\left(\frac{a}{f^r}\right) = \Psi(\Phi(\varphi))^*\left(\frac{a}{f^r}\right).$$

Es gilt also $\Psi(\Phi(\varphi)) = \varphi$. ■

10.4. Differential

Lemma 10.4.1 Seien $X \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $Y \subset \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ algebraische Mengen und sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus algebraischer Varietäten (*i.e.* eine reguläre Abbildung). Seien $x \in X$, $y = \varphi(x) \in Y$ und $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ mit $\varphi_i \in \Gamma(X)$ für alle $i \in [1, m]$ die Komponenten von φ.

Seien $P_1, \cdots, P_m \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ mit $[P_i] = \varphi_i \in \Gamma(X)$ für alle $i \in [1,]$ und sei

$$A = \left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(x)\right)_{i \in [1,m], j \in [1,n]}.$$

Dann ist $\mathrm{d}_x\varphi : T_xX \to T_yY$ mit $d_x\varphi(w) = Aw$ wohl definiert und hängt von der Wahl von $(P_1, \cdots, P_m)$ nicht ab. □

Beweis. Sei $w \in T_xX$. Wir zeigen, dass $d_x\varphi(w) \in T_yY$. Sei also $P \in I(Y)$ und sei $\Phi : \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \to \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ die Abbildung definiert durch $\Phi = (P_1, \cdots, P_m)$. Es gilt $\Phi|_X = \varphi$ und

$$P(y + \varepsilon d_x\varphi(w)) = \varepsilon d_{\varphi(x)}P(d_x\varphi(w)) = d_{\varphi(x)}P(d_x\Phi(w)) = d_x(P \circ \Phi)(w).$$

Es gilt aber $P \circ \Phi = \Phi^*P \in I(X)$ und also $d_x(P \circ \Phi)(w) = 0$. Es folgt $d_x\varphi(w) \in T_yY$.

Seien $Q_1, \cdots, Q_m \in I(X)$ und seien

$$B = \left(\frac{\partial(P_i + Q_i)}{\partial X_j}(x)\right)_{i\in[1,m], j\in[1,n]} \quad \text{und } C = \left(\frac{\partial Q_i}{\partial X_j}(x)\right)_{i\in[1,m], j\in[1,n]}.$$

Es gilt $Bw = Aw + Cw$. Da $d_xQ_i(w) = 0$ für alle i, folgt $Cw = 0$ und die Aussage. ■

Definition 10.4.2 Seien $X \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $Y \subset \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ algebraische Mengen und sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus algebraischer Varietäten. Seien $x \in X$, $y = \varphi(x) \in Y$.

Die Abbildung $\mathrm{d}_x\varphi : T_xX \to T_yY$ definiert im obigen Lemma heißt **Differential von φ bei x.**

Lemma 10.4.3 Seien $X \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $Y \subset \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ algebraische Mengen und sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus algebraischer Varietäten. Seien $x \in X$, $y = \varphi(x) \in Y$.

Sei $D \in \mathrm{Der}(X, x)$. Dann ist $D \circ \varphi^* : \Gamma(Y) \to \mathsf{k}$ eine Derivation von Y bei y. □

Beweis. Wir überprüfen nur, dass $(D \circ \varphi^*)(fg) = f(y)(D \circ \varphi^*)(g) + g(y)(D \circ \varphi^*)(f)$ gilt für alle $f, g \in \Gamma(Y)$. Es gilt

$$\begin{aligned}(D \circ \varphi^*)(fg) &= D(\varphi^*(fg)) = D(\varphi^*(f)\varphi^*(g)) \\ &= \varphi^*f(x)(D \circ \varphi^*)(g) + \varphi^*g(x)(D \circ \varphi^*)(f) \\ &= f(y)(D \circ \varphi^*)(g) + g(y)(D \circ \varphi^*)(f).\end{aligned}$$

Definition 10.4.4 Seien $X \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $Y \subset \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ algebraische Mengen und sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus algebraischer Varietäten. Seien $x \in X$, $y = \varphi(x) \in Y$.

Wir setzen $\mathrm{Der}(\varphi, x) : \mathrm{Der}(X, x) \to \mathrm{Der}(Y, y)$ mit $\mathrm{Der}(\varphi, x)(D) = D \circ \varphi^*$.

Proposition 10.4.5 Seien $X \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $Y \subset \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ algebraische Mengen und sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus algebraischer Varietäten. Seien $x \in X$, $y = \varphi(x) \in Y$.

Dann gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_xX \arrow[r, "\mathrm{d}_x\varphi"] \arrow[d, shift left] & T_yY \arrow[d, shift left] \\ \mathrm{Der}(X, x) \arrow[r, "\mathrm{Der}(\varphi, x)"'] \arrow[u, shift left] & \mathrm{Der}(Y, y), \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

wobei die vertikale Abbildungen die Isomorphismen vom Proposition 10.2.3 sind.

Beweis. Übung. ∎

Definition 10.4.6 Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus algebraischer Varietäten. Sei $x \in X$ und $y = \varphi(x) \in Y$.

Wir setzen $\mathrm{Def}(\varphi, x) : \mathrm{Def}(X, x) \to \mathrm{Def}(Y, y)$, wobei $\mathrm{Def}(\varphi, x)(\psi) = \varphi \circ \psi$.

Proposition 10.4.7 Seien $X \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $Y \subset \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ algebraische Mengen und sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus algebraischer Varietäten. Seien $x \in X$, $y = \varphi(x) \in Y$.

Dann gibt es kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd}
T_xX \arrow[r, "\mathrm{d}_x\varphi"] \arrow[d, shift right] & T_yY \arrow[d, shift right] \\
\mathrm{Der}(X,x) \arrow[r, "\mathrm{Der}(\varphi,x)"'] \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right] & \mathrm{Der}(Y,y), \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right] \\
\mathrm{Def}(X,x) \arrow[r, "\mathrm{Def}(\varphi,x)"'] \arrow[u, shift right] & \mathrm{Def}(Y,y), \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

wobei die vertikale Abbildungen die Isomorphismen vom Proposition 10.3.7 sind.

Beweis. Wir zeigen, dass das zweite Diagramm kommutativ ist. Die horizontale Abbildung $\mathrm{Def}(X, x) \to \mathrm{Der}(X, x), \psi \mapsto D$ ist wie folgt definiert. Sei $\psi \in \mathrm{Def}(X, x)$. Dann ist $\psi^* : \Gamma(X) \to \mathsf{k}[\varepsilon]$ ein Ringhomomorphismus mit $\psi^* f = f(x) + \varepsilon D(f)$.

Umgekehrt ist die Abbildung $\mathrm{Der}(X, x) \to \mathrm{Def}(X, x), D \mapsto \psi$ wie folgt definiert. Sei $D \in \mathrm{Der}(X, x)$. Wie im Beweis vom Proposition 10.3.7 gezeigt, gilt $\psi(*) = x$ und $\psi^*(f) = f(v) + \varepsilon D(f)$ für $f \in \Gamma(X)$. Dies ist genügend um ψ eindeutig zu definieren.

Sei $\psi \in \mathrm{Def}(X, x)$ und $D \in \mathrm{Der}(X, x)$ die zugehörige Derivation. Wir setzen $\zeta = \mathrm{Def}(\varphi, x)(\psi) = \psi \circ \varphi \in \mathrm{Def}(Y, y)$ und $D' \in \mathrm{Der}(Y, y)$ die zugehörige Derivation. Es genügt zu zeigen, dass $D' = \mathrm{Der}(\varphi, x)(D)$. Sei $f \in \Gamma(Y)$. Es gilt

$$f(y) + \varepsilon D'(f) = \zeta^*(f) = \psi^*(\varphi^* f) = \varphi^* f(x) + \varepsilon D(\varphi^* f) = f(y) + \varepsilon \mathrm{Der}(\varphi, x)(D)(f).$$

Daraus folgt $D' = \mathrm{Der}(\varphi, x)(D)$. ∎

Proposition 10.4.8 Seien $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ Morphismen algebraischer Varietäten. Seien $x \in X$ und $y = \varphi(x) \in Y$.

Dann gilt $\mathrm{Def}(\psi, y) \circ \mathrm{Def}(\varphi, x) = \mathrm{Def}(\psi \circ \varphi, x)$ und $\mathrm{Def}(\mathrm{Id}_X, x) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Def}(X,x)}$.

Beweis. Übung. ∎

Korollar 10.4.9 Seien $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ Morphismen algebraischer Varietäten, wobei X, Y, Z algebraische Mengen sind. Seien $x \in X$ und $y = \varphi(x) \in Y$.

Dann gilt $\mathrm{Der}(\psi, y) \circ \mathrm{Der}(\varphi, x) = \mathrm{Der}(\psi \circ \varphi, x)$, $\mathrm{d}_x\varphi \circ \mathrm{d}_y\psi = \mathrm{d}_x(\psi \circ \psi)$ und auch $\mathrm{Der}(\mathrm{Id}_X, x) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Der}(X,x)}$, $\mathrm{d}_x\mathrm{Id}_X = \mathrm{Id}_{T_xX}$.

10.5. Tangenraum einer algebraischen Varietät

Lemma 10.5.1 Sei X eine algebraische Varietät und sei $x \in X$. Sei $U \subset X$ offen mit $x \in U$. Dann gilt $\mathrm{Def}(U, x) \simeq \mathrm{Def}(X, x)$. □

Beweis. Sei $\iota : U \to X$ die Einbettung. Es ist ein morphismus algebraischer Varietäten. Wir zeigen, dass die Abbildung $\mathrm{Def}(\iota, x)$ ein Isomorphismus ist.

Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Def}(U, x)$ mit $\mathrm{Def}(\iota, x)(\varphi) = \mathrm{Def}(\iota, x)(\psi)$. Es gilt $\varphi(*) = x = \psi(*)$. Sei $V \subset U$ offen. Es git $\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}_X(V)$ also gilt $\varphi_V^* = \mathrm{Def}(\iota, x)(\varphi)_V^* = \mathrm{Def}(\iota, x)(\psi)_V^* = \psi_V^*$. Daraus folgt $\varphi = \psi$.

Sei jetzt $\varphi \in \mathrm{Def}(X, x)$. Wir definieren $\psi \in \mathrm{Def}(U, x)$ wie folgt. Wir setzen $\psi(*) = x$ und für $V \subset U$ offen setzen wir $\psi_V^* = \varphi_V^* : \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_U(V) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon])}(\varphi^{-1}(V)) = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\varepsilon])}(\psi^{-1}(V))$. Es gilt $\mathrm{Def}(\iota, x)(\psi) = \varphi$. ■

Korollar 10.5.2 Sei X eine algebraische Menge und sei $x \in X$. Sei $U \subset X$ offen mit $x \in U$. Dann gilt $T_xU \simeq T_xX$ und $\mathrm{Der}(U, x) \simeq \mathrm{Der}(X, x)$.

Definition 10.5.3 Sei X eine algebraische Varietät und $x \in X$. **Der Tangentraum von X bei x** ist

$$T_xX = \mathrm{Def}(X, x).$$

Bemerkung 10.5.4 Sei X eine algebraische Varietät und $x \in X$.

1. Für X eine algebraische Menge stimmt die obige Definition mit der Definition 10.1.1 modulo Isomorphismus überein.

2. Um T_xX zu bestimmen, kann man X mit einer affinen offenen Teilmenge $V \subset X$ mit $x \in V$ ersetzen. Insbesondere kann man auch Derivationen oder Polynomiale Gleichungen benutzen um T_xX zu bestimmen.

10.6. Lokale Ringe

Proposition 10.6.1 Sei X eine algebraische Varietät und $x \in X$.

1. Falls X eine algebraische Menge ist und $\mathfrak{M} = I_X(x) \subset \Gamma(X)$ das von x definierte maximale Ideal gilt

$$T_xX \simeq \left(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2\right)^\vee.$$

2. Sei $\mathcal{O}_{X,x}$ der lokale Ring von X bei x und $\mathfrak{M}_{X,x}$ sein maximales Ideal. Dann gilt

$$T_xX \simeq \left(\mathfrak{M}_{X,x}/\mathfrak{M}_{X,x}^2\right)^\vee.$$

Insbesondere hängt T_xX nur vom lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ab.

Beweis. 1. Sei $D \in \mathrm{Der}(X,x)$. Seien $P,Q \in \mathfrak{M} = I_X(x)$. Es gilt $P(x) = 0 = Q(x)$ also
$$D(PQ) = P(x)D(Q) + Q(x)D(P) = 0.$$

Für die lineare Abbildung $f = D|_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M} \to \mathsf{k}$ gilt also $\mathfrak{M}^2 \subset \mathrm{Ker}(f)$. Daraus folgt, dass es eine lineare Abbildung $\bar{f} : \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \to \mathsf{k}$ gibt mit $\bar{f}([P]_{\mathfrak{M}^2}) = f(P) = D(P)$.

Wir definieren $\Phi : \mathrm{Der}(X,x) \to (\mathfrak{M}/\mathfrak{M})^\vee$ durch $\Phi(D) = \bar{f}$.

Umgekehrt, sei $\bar{f} : \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \to \mathsf{k}$ eine lineare Abbildung und sei $f : \mathfrak{M} \to \mathsf{k}$ die induzierte Abbildung definiert durch $f(P) = \bar{f}([P]_{\mathfrak{M}^2})$.

Für $P \in \Gamma(X)$ setzen wir $D(P) = f(P - P(x))$. Dies ist wohl definiert, weil $(P - P(x))(x) = P(x) - P(x) = 0$ also $P - P(x) \in \mathfrak{M}$. Es gilt

$$PQ - P(x)Q(x) = (P - P(x))(Q - Q(x)) + P(x)(Q - Q(x)) + Q(x)(P - P(x)).$$

Da $f(\mathfrak{M}^2) = 0$ und f linear ist, folgt $D(PQ) = f(PQ - P(x)Q(x)) = f(P(x)(Q - Q(x)) + Q(x)(P - P(x)) = P(x)f(Q - Q(x)) + Q(x)f(P - P(x)) = P(x)\tilde{D}(Q) + Q(x)\tilde{(}P)$. Also gilt $D \in \mathrm{Der}(X,x)$ und wir setzen $\Psi(\bar{f}) = D$.

Wir zeigen, dass Φ und Ψ Inverse von einander sind.

Sei $D \in \mathrm{Der}(X,x)$. Es gilt

$$\Psi(\Phi(D))(P) = \Psi(\bar{f})(P) = f(P - P(x)) = D(P - P(x)) = D(P - P(x)D(1).$$

Aber es gilt auch $D(1) = D(1^2) = 1(x)D(1) + 1(x)D(1) = 2D(1)$ und es folgt $D(1) = 0$. Es gilt also $\Psi(\Phi(D))(P) = D(P)$ und $\Psi(\Phi(D)) = D$.

Sei $\bar{f} : \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \to \mathsf{k}$ und $P \in \mathfrak{M}$. Es gilt

$$\Phi(\Psi(\bar{f}))([P]) = \Phi(D)([P]) = D(P) = f(P - P(x)) = f(P) = \bar{f}([P]).$$

Es gilt also $\Phi(\Psi(\bar{f}))([P]) = \bar{f}([P])$ und $\Phi(\Psi(\bar{f})) = \bar{f}$.

2. Sei V eine affine offene Teilmenge von X mit $x \in V$. Es gilt $T_xV \simeq T_xX$. Sei $\mathfrak{M} = I_x(V) \in \Gamma(V)$. Es gibt es eine k-lineare Abbildung $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_{X,x}/\mathfrak{M}^2_{X,x}$ definiert durch $\varphi(f) = [(V,f)]_{\mathfrak{M}^2_{X,x}}$. Wir zeigen, dass dies eine wohl definierte lineare die Abbildung $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \to \mathfrak{M}_{X,x}/\mathfrak{M}^2_{X,x}$ induziert und dass es ein Isomorphismus ist.

Für $f \in \mathfrak{M}$ gilt $[(V,f)] \in \mathfrak{M}_{X,x}$, weil $f(x) = 0$. Seien $f,g \in \mathfrak{M}$. Es gilt $[(V,fg)] = [(V,f)][(V,g)] \in \mathfrak{M}^2_{X,x}$ und also $\varphi(fg) = [(V,fg)]_{\mathfrak{M}^2_{X,x}} = 0$. Die Abbildung ist wohl definiert.

Sei $f \in \mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathfrak{M}$. Es gilt $[(V,f)] \in \mathfrak{M}^2_{X,x}$ also gibt es eine standardmäßige offene Teilmenge $x \in D_V(g) \subset V$ und $a,b \in \Gamma(D_V(g))$ mit $[(V,f)] = [(D_V(g), f|_{D_V(g)})] = [(D_V(g),a)][(D_V(g),b)]$. Es folgt $f|_{D_V(g)} = ab$. Es gibt aber $A,B \in \Gamma(V)$ mit $a = A/g^k$ und $b = B/g^r$ also gilt $f = AB/g^{r+k}$. Es folgt $fg^{r+k} = AB \in \mathfrak{M}^2$. Da $x \in D_V(g)$ folgt $g(x) \neq 0$ und also $g^{r+k} \notin \mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{M}$ maximal ist folgt, dass es ein $c \in \Gamma(V)$ und ein $m \in \mathfrak{M}$ gibt mit $1 = g^{r+k}c + m$. Es folgt $f = fg^{r+k}c^{r+k} + fm = AB + fm \in \mathfrak{M}^2$. Die Abbildung φ ist injektiv.

Sei $[(U, f)] \in \mathfrak{M}_{X,x}$. Dann gibt es eine affine standardmäßige offene Teilmenge $x \in D_V(g) \subset V$ mit $D_V(g) \subset U$ und $[(U, f)] = [(D_V(g), f|_{D_V(g)})]$. Es gilt $f|_{D_V(g)} \in \Gamma(D_V(g))$ also gibt es $a \in \Gamma(V)$ mit $f|_{D_V(g)} = a/g^k$. Es gilt $0 = f(x) = a(x)/g(x)^k$ also $a(x) = 0$ und $a \in \mathfrak{M}$. Da $g^k \notin \mathfrak{M}$, gibt es ein $c \in \Gamma(V) \setminus \mathfrak{M}$ und ein $m \in \mathfrak{M}$ mit $1 = g^k c + m$. Da $m \in \mathfrak{M}$ gilt $1 - m \notin \mathfrak{M}$ also $[(D_V(g), 1 - m)] \notin \mathfrak{M}_{X,x}$ und $[(D_V(g), 1/(1 - m))] \in \mathcal{O}_{X,x}$. Es folgt, dass

$$[(D_V(g), ac + acm/(1 - m))] = [(D_V(g), ac/1 - m)] = [(D_V(g), a/g^k)].$$

Da $a, m \in \mathfrak{M}$ folgt $[(D_V(g), acm/(1 - m))] \in \mathfrak{M}^2_{X,x}$ und also

$$\varphi(ac) = [(D_V(g), ac)]_{\mathfrak{M}^2_{X,x}} = [(D_V(g), a/g^k)]_{\mathfrak{M}^2_{X,x}} = [(D_V(g), f|_{D_V(g)})]_{\mathfrak{M}^2_{X,x}}$$

und φ ist surjektiv. ∎

11. Dimension

11.1. Topologische Dimension

Definition 11.1.1 Sei X ein topologischer Raum.

Die Dimension $\dim X$ **von** X ist die maximale Zahl n so, dass es eine Kette $X_n \supsetneq \cdots \supsetneq X_0$ mit X_i irreduzibel und abgeschlossen in X.

Falls es keine maximale solche Zahl setzen wir $\dim X = \infty$.

Proposition 11.1.2 Sei $Y \subset X$.

1. Dann gilt $\dim Y \leq \dim X$.

2. Falls Y abgeschlossen mit $Y \subsetneq X$ ist und falls $\dim X < \infty$ und X irreduzibel ist, gilt $\dim Y < \dim X$.

Beweis. 1. Sei $Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n$ eine Kette von irreduziblen und abgeschlossenen Teilmengen in Y. Sei $X_i = \bar{Y_i}$ der Abschluss von Y_i in X. Dann ist $X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$ eine Kette von irreduziblen und abgeschlossenen Teilmengen in X. Es folgt $\dim Y \leq \dim X$.

2. Sei $Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n$ eine maximale Kette von irreduziblen und abgeschlossenen Teilmengen in Y. Dann ist $Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \subsetneq X$ eine Kette von irreduziblen und abgeschlossenen Teilmengen in X. Es folgt $\dim Y < \dim X$. ∎

Definition 11.1.3 Sei X ein topologischer Raum endlicher Dimension und set $Y \subset X$. **Die Kodimension von** Y **in** X ist $\dim X - \dim Y$.

Proposition 11.1.4 Sei X ein topologischer Raum und seien $X_1, \cdots, X_n$ abgeschlossen in X mit

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i.$$

Dann gilt $\dim X = \sup_i \dim X_i$.

Beweis. Da $X_i \subset X$ gilt $\dim X_i \leq \dim X$ also $\sup_i \dim X_i \leq \dim X$. Sei $d = \sup_i \dim X_i$. Falls $d = \infty$ ist die Aussage klar. Sei also $d < \infty$.

Falls $\dim X > d$, sei $F_0 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{d+1}$ eine maximale Kette von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X. Es gilt $F_{d+1} = \cup_i (X_i \cap F_{d+1})$. Da F_{d+1} irreduzibel ist, gibt es ein i mit $F_{d+1} = X_i = F_{d+1}$ und also $F_{d+1} \subset X_i$. Es folgt $\dim X_i \geq d+1$. Ein Widerspruch. ∎

Korollar 11.1.5 Für X eine algebraische Varietät und $X_1, \cdots, X_n$ die irreduzible Komponenten von X gilt $\dim X = \sup_i \dim X_i$.

Insbesondere um die Dimension zu bestimmen kann man X irreduzibel annehmen.

11.2. Algebraische Definition

Definition 11.2.1 Sei A ein Ring.

Die Krullsche Dimension $\mathrm{Kdim} A$ ist die maximale Zahl n so, dass es eine Kette $I_n \subsetneq \cdots \subsetneq I_0 \subset A$, wobei $(I_i)_{i \in [0,n]}$ Primideal von A sind.

Beispiel 11.2.2 Sei $A = \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Dann gilt $\mathrm{Kdim} A \geq n$: wie haben die Kette $(0) \subsetneq (X_1) \subsetneq \cdots \subsetneq (X_1, \cdots, X_n) \subset A$.

Proposition 11.2.3 Sei V eine algebraische Menge. Es gilt $\dim V = \mathrm{Kdim}\, \Gamma(V)$.

Beweis. Folgt aus dem Nullstellensatz: es gibt eine kontravariante Bijektion zwischen Primideale in $\mathbb{G}(V)$ und irreduzible abgeschlossene Teilmengen in V. ∎

11.3. Transzendenzgrad

In diesem Abschnitt werden wir keine Beweise geben. Die Beweise werden wir nächstes Semester in der Vorlesung kommutative Algebra geben.

Definition 11.3.1 Sei $K \subset L$ eine Erweiterung von Körpern und sei $A \subset L$ eine Teilmenge.

Die Teilmenge A heißt **algebraisch unabhängig** falls gilt: für jede endliche Teilmenge $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset A$ und jedes Polynom $P \in K[X_1, \cdots, X_n]$ mit $P(x_1, \cdots, x_n) = 0$ gilt $P = 0$.

Wenn A nicht algebraisch unabhängig ist heißt A **algebraisch abhängig**.

Beispiel 11.3.2 1. Die leere Menge ist immer algebraisch unabhängig.

2. Für $A = \{x\}$ ist A genau dann algebraisch unabhängig, wenn x transzendent über K ist und also genau dann algebraisch abhängig, wenn x algebraisch über K ist.

Definition 11.3.3 Sei $K \subset L$ eine Erweiterung von Körpern und sei $C \subset L$ eine Teilmenge.

Die Teilmenge C heißt **algebraisch erzeugend** falls L algebraisch über $K(C)$ ist.

Beispiel 11.3.4 1. Für $K \subset L$ algebraisch ist jede Teilmenge von L algebraisch erzeugend. Insbesondere ist die leere Menge $\emptyset$ algebraisch erzeugend.

2. Für $L = K(X)$ mit X einer Variable ist $\{X\}$ algebraisch erzeugend.

Definition 11.3.5 Sei $K \subset L$ algebraisch ist eine Erweiterung von Körpern und sei $B \subset L$ eine Teilmenge.

Die Teilmenge B heißt **Transzendenzbasis von L über K** falls B algebraisch erzeugend und algebraisch unabhängig über K ist.

Beispiel 11.3.6 1. Für $K \subset L$ algebraisch ist $\emptyset$ eine Transzendenzbasis.

2. Für $L = K(X)$ mit X einer Variable ist $\{X\}$ eine Transzendenzbasis.

Proposition 11.3.7 Sei $K \subset L$ eine Erweiterung und sei $A \subset L$ eine algebraische unabhängige Teilmenge. Dann gibt es eine Transzendenzbasis B von L über K mit $A \subset B$.

Sei $K \subset L$ eine Erweiterung und sei $C \subset L$ eine algebraische erzeugende Teilmenge. Dann gibt es eine Transzendenzbasis B von L über K mit $B \subset C$.

Insbesondere gibt es immer eine Transzendenzbasis.

Proposition 11.3.8 Sei $K \subset L$ eine Erweiterung. Dann haben alle Transcendenzbasen genau die selbe Anzahl von Elementen.

Definition 11.3.9 Sei $K \subset L$ eine Erweiterung. **Der Transzendenzgrad** $\mathrm{Trdeg}_K(L)$ **von L über K** ist die Anzahl von Elementen einer Transzendenzbasis.

Beispiel 11.3.10 1. Für $K \subset L$ algebraisch gilt $\mathrm{Trdeg}_K(L) = 0$.

2. Für $L = K(X)$ mit X einer Variable gilt $\mathrm{Trdeg}_K(L) = 1$.

3. Für $L = K(X_1, \cdots, X_n)$ mit $X_1, \cdots, X_n$ Variablen gilt $\mathrm{Trdeg}_K(L) = n$.

4. Für $L = \mathrm{Frac}(K[X,Y]/(X^3 - Y^2)$ ist X transcendent über K und L algebraisch über $K(X)$. Also ist $\{X\}$ eine Transcendenzbasis von L über K und $\mathrm{Trdeg}_K(L) = 1$.

Proposition 11.3.11 Sei $K \subset L \subset M$ Erweiterungen. Dann gilt $\mathrm{Trdeg}_K(M) = \mathrm{Trdeg}_L(M) + \mathrm{Trdeg}_K(L)$.

Theorem 11.3.12 Sei A eine k-Algebra die ein Integritätsring ist. Sei $K = \mathrm{Frac}(A)$ der Quotientkörper. Dann gilt

$$\mathrm{Kdim}(A) = \mathrm{Trdeg}_{\mathsf{k}}(K).$$

Korollar 11.3.13 Es gilt $\dim \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) = n$.

Beweis. Es gilt $\dim \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) = \mathrm{Kdim}(\mathsf{k}[X_1, \cdots X_n]) = \mathrm{Trdeg}_{\mathsf{k}}\mathsf{k}(X_1, \cdots, X_n) = n$. ■

Korollar 11.3.14 Sei V eine irreduzible algebraische Menge. Dann gilt

$$\dim V = \mathrm{Kdim}\,\Gamma(V) = \mathrm{Trdeg}_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}(V)).$$

Beweis. Per Definition gilt $\mathrm{Frac}(\Gamma(V)) = \mathsf{k}(V)$. ■

11.4. Offene Teilmengen

Proposition 11.4.1 Sei X eine irreduzible algebraische Varietät und sei $U \subset X$ eine nicht leere offene Teilmenge. Dann gilt $\dim U = \dim X$.

Beweis. Schritt 1. Wir nehmen zuerst an, dass X affine ist. Also ist $\Gamma(X)$ ein Integritätsring. Sei $D_X(f)$ eine standardmäßige affine Teilmenge von X mit $D_X(f) \subset U$. Es gilt $\dim D_X(f) \leq \dim U \leq \dim X$. Es gilt aber

$$\Gamma(D_X(f)) = \left\{ \frac{a}{f^r} \mid r \geq 0 \text{ und } a \in \Gamma(X) \right\}.$$

Daraus folgt

$$\mathsf{k}(D_X(f)) = \mathrm{Frac}(\Gamma(D_X(f))) = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \Gamma(X) \right\} = \mathrm{Frac}(\Gamma(X)) = \mathsf{k}(X).$$

Es folgt $\dim D_X(f) = \mathrm{Trdeg}(\mathsf{k}(D_X(f))) = \mathrm{Trdeg}(\mathsf{k}(X)) = \dim X$.

Schritt 2. Sei X eine algebraische Varietät und seien U und V zwei affine offene Teilmengen in X. Dann gilt $\dim U = \dim V$: Da $U \cap V$ offen in U und in V ist und da U und V beide affine sind, folgt aus dem Schritt 1, dass $\dim U = \dim(U \cap V) = \dim V$.

Sei d die Dimension einer solchen affine offenen Teilmenge in X.

Schritt 3. Wir zeigen, dass $\dim X \leq d$. Angenommen $\dim X > d$. Sei $Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_d \subsetneq Z_{d+1} \subset X$ eine Kette abgeschlossener irreduzibler Teilmengen in X. Es gilt $Z_0 \neq \emptyset$. Sei also $x \in Z_0$ und U eine affine offene Umgebung von x in X. Es gilt $x \in U \cap Z_i \subset Z_i$. Daraus folgt, dass $U \cap Z_i$ nicht leer und offen in Z_i ist. Da Z_i irreduzibel ist, folgt, dass $U \cap Z_i$ dicht in Z_i ist also $\overline{U \cap Z_i} = Z_i$. Es folgt $U \cap Z_i \subsetneq U \cap Z_{i+1}$ für alle i. Da $U \cap Z_i$ abgeschlossen in U ist, folgt $\dim U \geq d + 1$. Ein Widerspruch zu $\dim U = d$. Es folgt also $d = \dim U \leq \dim X \leq d$ und $\dim X = d$.

Schritt 4. Sei U offen in X. Sei $V \subset U$ offen und affine. Es gilt $d = \dim V \leq \dim U \leq \dim X = d$. Es folgt $\dim X = \dim U$. ■

Korollar 11.4.2 Sei X eine algebraische Varietät. Dann gilt $\dim X < \infty$.

Beweis. Ohne Einschränkung können annehmen, dass X irreduzibel und affine ist. Es folgt $\dim X = \operatorname{Kdim}\Gamma(X)$. Aber da $\Gamma(X)$ noethersch ist folgt, dass $\operatorname{Kdim}\Gamma(X) < \infty$. ∎

Beispiel 11.4.3 Es gilt $\dim \mathbb{P}_n(\mathsf{k}) = n$ (es gibt eine affine offene Teilmenge der Form $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$).

Proposition 11.4.4 Sei X eine nicht leere algebraische Varietät. Dann gilt

$$\dim X = 0 \;\Leftrightarrow\; X \text{ ist endlich.}$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass X irreduzibel ist.

Sei X irreduzibel mit $\dim X = 0$. Sei $U \subset X$ offen und affine. Es gilt $\operatorname{Kdim}\Gamma(U) = \dim U = \dim X = 0$. Da X irreduzibel ist, ist auch U irreduzibel und also $\Gamma(U)$ ist ein Integritätring. Also ist (0) ein Primideal. Da $\operatorname{Kdim}\Gamma(U) = 0$, folgt, dass es kein Primideal $I \subset \Gamma(U)$ gibt mit $(0) \subsetneq I$. Insbesondere ist (0) ein maximales Ideal und $\Gamma(U)$ ein Körper. Aus Proposition 3.4.2 folgt, dass U einelementig ist.

Umgekehrt, sei X endlich und irreduzibel also einelementig. Es folgt $\dim X = 0$. ∎

Definition 11.4.5 1. Eine algebraische Varietät der Dimension 1 heißt **Kurve**.

2. Eine algebraische Varietät der Dimension 2 heißt **Fläche**.

11.5. Hauptidealsatz

Sei X eine affine algebraische Varietät und $f \in \Gamma(X)$. Wir wollen die Hyperfläche $V(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ besser verstehen. Insbesondere wollen wir $\dim V(f)$ bestimmen.

Proposition 11.5.1 Seien X und $f \in \Gamma(X)$ wie oben. Dann gilt

1. $V(f) = \emptyset \;\Leftrightarrow\; f \in \Gamma(X)^\times$.

2. $V(f)$ enthält eine irreduzible Komponent von $X \Leftrightarrow f$ ist Nullteiler in $\Gamma(X)$.

Beweis. 1. Folgt aus dem Nullstellensatz 3.

2. Angenommen f sei Nullteiler. Dann gibt es $g \in \Gamma(X) \setminus \{0\}$ mit $fg = 0$. Es gilt also $X = V(fg) = V(f) \cup V(g)$. Seien $X_1, \cdots, X_n$ die irreduzible Komponenten von X. Für jedes $i \in [1, n]$ gilt $X_i = (X_i \cap V(f)) \cup (X_i \cap V(g))$ und da X_i irreduzibel ist folgt $X_i \cap V(f) = X_i$ oder $X_i \cap V(g) = X_i$ also $X_i \subset V(f)$ oder $X_i \subset V(g)$. Falls $X_i \subset V(g)$ für jedes i folgt $X = V(g)$ und $g = 0$. Ein Widerspruch. Also gibt es ein i mit $X_i \not\subset V(g)$ *i.e.* $X_i \subset V(f)$.

Umgekehrt sei f so, dass $V(f)$ eine irreduzible Komponent von X enthält. Seien $X_1, \cdots, X_n$ die irreduzible Komponenten von X. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $X_1 \subset V(f)$. Falls $n = 1$ gilt $X = X_1 \subset V(f)$ und $f = 0$ ist Nullteiler. Falls $n \geq 2$, sei $Z = X_2 \cup \cdots \cup X_n$. Dann ist Z abgeschlossen in X und es gilt $Z \subsetneq X$. Es gibt also ein $g \in I_X(Z) \setminus \{0\}$. Es folgt $Z \subset V(g)$ und also $X = X_1 \cup Z \subset V(f) \subset V(g) = V(fg)$. Daraus folgt $fg = 0 \in \Gamma(X)$ und f ist Nullteiler. ∎

Definition 11.5.2 Eine algebraische Varietät heißt **equidimensional** falls alle irreduzible Komponenten die selbe Dimension haben.

Beispiel 11.5.3 Eine irreduzible algebraische Varietät ist equidimensional.

Satz 11.5.4 (Hauptidealsatz) Sei X eine equidimensionale affine algebraische Varietät und sei $f \in \Gamma(X)$ so, dass f kein Nullteiler ist und kein invertierbares Element ist.

Dann ist $V(f)$ equidimensional mit $\dim V(f) = \dim X - 1$. □

Beweis. Wir geben einen Beweis im Fall $X = \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Dann gilt $f \in \Gamma(X) = \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Sei $f = f_1 \cdots f_n$ die Zerlegung von f in irreduziblen Faktoren. Dann gilt $I(V(f)) = (f)$ und $V(f) = V(f_1) \cup \cdots \cup V(f_n)$ und $V(f_i)$ ist irreduzibel für jedes i (es gilt $\Gamma(V(f_i)) = \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]/(f_i)$ Integritätsring). Daraus folgt, dass $V(f_i)$ eine irreduzible Komponent von $V(f)$ ist. Wir können also annehmen, dass f irreduzibel ist.

Da f nicht invertierbar und nicht null ist können wir annehmen, dass f als Polynom in X_n nicht trivial ist also $\deg_{X_n}(f) > 0$. Wir betrachten $\Gamma(V(f)) = \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]/(f)$. Dies ist ein Integritätsring. Sei $\mathsf{k}(V(f))$ sein Quotientkörper. Seien $x_1, \cdots, x_n$ die Klassen von $X_1, \cdots, X_n$ in diesem Quotientkörper. Wir zeigen, dass $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ eine Transzendenzbasis von $\mathsf{k}(V(f))$ über k ist.

Das letzte Element x_n ist von $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ algebraisch abhängig, weil $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ und f ein nicht triviales Polynom in X_n ist. Daraus folgt, dass $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ algebraisch erzeugend ist.

Falls $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ algebraisch abhängig ist gibt es ein $g \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_{n-1}]$ mit $g(x_1, \cdots, x_{n-1}) = 0$ in $\mathsf{k}(V(f))$. Aber da $g(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \Gamma(V(f))$ folgt, dass die Gleichung $g(x_1, \cdots, x_{n-1}) = 0$ auch in $\Gamma(V(f))$ wahr ist. Es folgt $g \in (f)$ und also $g = fh$ für ein $h \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$. Aber X_n taucht in g nicht auf. Daraus folgt, dass $h = 0$ und also $g = 0$. ∎

Korollar 11.5.5 Sei X eine equidimensionale affine algebraische Varietät und seien $f_1, \cdots, f_r \in \Gamma(X)$. Sei Y eine irreduzible Komponent von $V(f_1, \cdots, f_r)$. Dann gilt $\dim Y \geq \dim X - r$.

Beweis. Per Induktion nach r. ∎

Bemerkung 11.5.6 1. Auch wenn alle f_i nicht invertierbar und Nullteilerfrei sind kann es zu eine Ungleichung kommen: Für $f_1 = \cdots = f_r = f$ mit f nicht invertierbar und Nullteilerfrei gilt $\dim V(f_1, \cdots, f_r) = \dim X - 1$.

2. Für f Nullteiler kann $V(f)$ nicht equidimensional sein: Sei $X = V(XY) \subset \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$ und $f = x(x+y+1)$, wobei $x, y \in \Gamma(X)$ die Klassen von X und Y sind. Dann gilt

$$V(f) = V(X) \cup \{(0,0)\} \cup \{(0,-1)\} \cup \{(-1,0)\} = V(X) \cup \{(-1,0)\}$$

und $V(f)$ hat eine irreduzible Komponent $V(X)$ der Dimension 1 und eine irreduzible Komponent $\{(-1,0)\}$ der Dimension 0.

Wie für die Schnittemenge von zwei Unterräume kann man die folgende Ungleichung zeigen.

Proposition 11.5.7 Seien X und Y algebraische Teilmengen von $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. Dann gilt

$$\dim(X \cap Y) \geq \dim X + \dim Y - n.$$

11.6. Parametersysteme

Wir wollen die Rückrichtung betrachten: Seien $Y \subset X$ affine algebraische Varietäten mit Y abgeschlossen in X und $\mathrm{codim}_X Y = r$. Wir viele Elemente braucht man um das Ideal $I_X(Y)$ zu definieren?

Proposition 11.6.1 Sei X eine affine irreduzible algebraische Varietät mit $\Gamma(X)$ faktoriel. Sei $Y \subset X$ irreduzibel mit $\mathrm{codim}_X Y = 1$. Dann gibt es ein $f \in \Gamma(X)$ mit $Y = V(f)$ und sogar $I_X(Y) = (f)$.

Beweis. Das Ideal (0) ist ein Primideal in $\Gamma(X)$, weil X irreduzibel ist. Das Ideal $I = I_X(Y)$ ist ein Primideal in $\Gamma(X)$, weil Y irreduzibel ist. Wir zeigen, dass I ein Hauptideal ist.

Da $\mathrm{codim}_X(Y) = 1$ gibt es kein Primideal J mit $(0) \subsetneq J \subsetneq I$. Sei $g \in I$ mit $g \neq 0$. Sei $g = f_1 \cdots f_r$ die Zerlegung von g in irreduzible Elementen. Da I ein Primideal ist folgt, dass es ein i gibt mit $f_i \in I$. Also $(f_i) \subset I$. Da f_i irreduzibel ist (und $\Gamma(X)$ faktoriel) folgt, dass (f_i) ein Primideal ist. Da $f_i \neq 0$ folgt $(f_i) = I$. ∎

Allgemeiner gilt

Proposition 11.6.2 Sei X eine affine irreduzible algebraische Varietät und sei $Y \subset X$ irreduzibel mit $\mathrm{codim}_X Y = r$.

Für alle $s \in [1, r]$ gibt es Elemente $f_1, \cdots, f_s \in \Gamma(X)$ mit

- $Y \subset V(f_1, \cdots, f_s)$ und
- $\mathrm{codim}_X Z = s$ für alle irreduzible Komponenten Z von $V(f_1, \cdots, f_s)$.

Insbesondere gibt es Elemente $f_1, \cdots, f_r \in \Gamma(X)$ so, dass Y eine irreduzible Komponent von $V(f_1, \cdots, f_r)$ ist.

Beweis. Per Induktion nach s. Für $s = 1$ setzen wir $f_1 = f$ mit $f \in I(Y) \setminus \{0\}$. Dies ist möglich, weil $Y \subsetneq X$ also $I(Y) \neq (0)$. Es gilt $Y \subset V(f_1)$. Da $Y \neq \emptyset$ gilt $f_1 \notin \Gamma(X)^\times$. Da $f \neq 0$ und $\Gamma(X)$ ein Integritätsring ist, folgt aus dem Hauptidealsatz, dass alle irreduzible Komponenten von $V(f_1)$ Kodimension 1 haben.

Induktionsannahme: für $s < r$ gibt es Elemente $f_1, \cdots, f_s \in \Gamma(X)$ so, dass $Y \subset V(f_1, \cdots, f_s)$ und alle irreduzible Komponenten $Z_1, \cdots, Z_k$ von $V(f_1, \cdots, f_s)$ haben Kodimension s.

Da $s < r$ gilt $Z_i \not\subset Y$ für alle i also $I(Y) \not\subset I(Z_i)$ für alle i.

Lemma 11.6.3 (Vermeidungslemma) Sei I ein Ideal und seien $I_1, \cdots, I_k$ Primideale mit

$$I \subset \bigcup_{i=1}^k I_i.$$

Dann gibt est ein i mit $I \subset I_i$. □

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass k minimal ist mit $I \subset \cup_{i=1}^k I_i$. Wir nehmen an, dass $k \geq 2$.

Für alle $j \in [1, k]$ gilt

$$I \not\subset \bigcup_{i=1, i\neq j}^k I_i.$$

Sei also $a_j \in I \setminus \cup_{i=1, i\neq j}^k I_i$. Es folgt $a_j \in I_j$ und $a = a_1 + a_2 \cdots a_k \in I$. Sei i so, dass $a \in I_i$. Falls $i \geq 2$ folgt $a_1 = a - a_2 \cdots a_i \cdots a_k \in I_i$ ein Widerspruch. Falls $a \in I_1$ gilt $a_2 \cdots a_k = a - a_1 \in I_1$. Da I_1 Prim ist folgt, dass es ein $j \geq 2$ gibt mit $a_j \in I_1$ ein Widerspruch. ∎

Aus dem Lemma folgt

$$I(Y) \not\subset \bigcup_{i=1}^k I(Z_i).$$

Sei also $f_{s+1} \in I(Y)$ mit $f_{s+1} \notin I(_i)$ für alle $i \in [1, k]$. Es gilt $Y \subset V(f_1, \cdots, f_{s+1})$. Sei Z eine irreduzible Komponent von $V(f_1, \cdots, f_{s+1})$. Dann gilt $\mathrm{codim}_X Z \leq s + 1$. Außerdem gilt $Z \subset V(f_1, \cdots, f_s)$ also gibt es ein i mit $Z \subset Z_i$ und also $Z \subset Z_i \cap V(f_{s+1})$. Da $Z \neq \emptyset$, ist $[f_{s+1}]$ nicht invertierbar in $\Gamma(Z_i)$ und da $f_{s+1} \notin I(Z_i)$ gilt $[f_{s+1}] \neq 0$ in $\Gamma(Z_i)$. Aber $\Gamma(Z_i)$ ist ein Intergritätsring also ist $[f_{s+1}]$ kein Nullteiler und $\dim Z \leq \dim Z_i - 1$ nach dem Hauptidealsatz. Daraus folgt $\mathrm{codim}_X Z \geq \mathrm{codim} Z_i + 1 = s + 1$. Es folgt $\mathrm{codim}_X Z = s + 1$. ∎

Definition 11.6.4 Sei X eine affine irreduzible algebraische Varietät und sei $Y \subset X$ irreduzibel mit $\mathrm{codim}_X Y = r$.

Elemente $f_1, \cdots, f_s \in \Gamma(X)$ wie oben heißen **Parametersystem für** Y **in** X.

Korollar 11.6.5 Sei X eine algebraische Varietät und sei $x \in X$.

1. Falls X irreduzibel ist, gilt

$$\dim X = \mathrm{Kdim}\mathcal{O}_{X,x}.$$

2. Für X allgemein gilt

$$\mathrm{Kdim}\mathcal{O}_{X,x} = \sup\{\dim X_i \mid x \in X_i \text{ und } X_i \text{ ist eine irreduzible Komponent von } X\}.$$

Beweis. 2. folgt direkt aus 1. Für 1. können wir annehmen, dass X affine ist.

Sei $\mathfrak{M} = I_X(x)$. Es gibt Ringhomomorphismus $\varphi : \Gamma(X) \to \mathcal{O}_{X,x}$ definiert durch $f \mapsto f_x = [(X, f)]$. Es gilt $\varphi(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}_{X,x}$ und $\varphi^{-1}(\mathfrak{M}_{X,x}) \subset \mathfrak{M}$. Für $I \subset \Gamma(X)$ ein Ideal schreiben wir $\varphi(I)\mathcal{O}_{X,x}$ für das von $\varphi(I)$ erzeugte Ideal in $\mathcal{O}_{X,x}$.

Lemma 11.6.6 Es gibt aufsteigende Bijektionen $J \mapsto \varphi^{-1}(J)$ und $I \mapsto \Phi(I)\mathcal{O}_{X,x}$ zwischen

$$\{I \text{ Primideal von } \Gamma(X) \text{ mit } I \subset \mathfrak{M}\} \text{ und } \{J \text{ Primideal von } \mathcal{O}_{X,x}\}.$$

Beweis. Sei $J \subset \mathcal{O}_{X,x}$ ein Primideal. Es gilt $J \subset \mathfrak{M}_{X,x}$ und also $\varphi^{-1}(J) \subset \mathfrak{M}$. Wir zeigen, dass $\varphi^{-1}(J)$ ein Primideal ist. Seien $a, b \in \Gamma(X)$ mit $ab \in \varphi^{-1}(J)$. Dann gilt $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in J$ also gilt $\varphi(a) \in J$ oder $\varphi(b) \in J$ also $a \in \varphi^{-1}(J)$ oder $b \in \varphi^{-1}(J)$.

Sei $I \subset \mathfrak{M}$ ein Primideal. Wir zeigen, dass $\varphi(I)\mathcal{O}_{X,x}$ ein Primideal ist. Seien $f_x, g_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit $f_x g_x \in \varphi(I)\mathcal{O}_{X,x}$. Seien $f_1, \cdots, f_r$ mit $I = (f_1, \cdots, f_r)$. Es gilt $\varphi(I)\mathcal{O}_{X,x} = (\varphi(f_1), \cdots, \varphi(f_r))$. Es gibt also Elementen $h_{1,x}, \cdots, h_{r,x} \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit

$$f_x g_x = \varphi(f_1)h_{1,x} + \cdots + \varphi(f_r)h_{r,x}.$$

Es gibt also ein $h \in \Gamma(X)$ mit $x \in D_X(h)$ und $f_x = [(D_X(h), f)]$, $g_x = [(D_X(h), g)]$ und $h_{i,x} = [(D_X(h), h_i)]$ für alle $i \in [1, r]$. Wir schreiben $f = a/h^{n_1}$, $g = b/h^{n_2}$ und $h_i = c_i/h^{m_i}$, wobei $a, b, c_i \in \Gamma(X)$. Es gilt für alle N gros genug:

$$abh^{N-n_1-n_2} = \sum_{i=1}^{r} f_i c_i h^{N-m_i} \in I.$$

Da $h(x) \neq 0$, gilt $h \notin \mathfrak{M}$ also $h \notin I$. Daraus folgt $ab \in I$ also $a \in I$ oder $b \in I$. Es folgt $f_x \in \varphi(I)\mathcal{O}_{X,x}$ oder $g_x \in \varphi(I)\mathcal{O}_{X,x}$.

Wir zeigen, dass die Abbildungen inverse von einander sind.

Sei $J \subset \mathcal{O}_{X,x}$ ein Primideal. Es gilt $\varphi(\varphi^{-1}(J)) \subset J$ also $\varphi(\varphi^{-1}(J)\mathcal{O}_{X,x} \subset J$. Umgekehrt, sei $f_x \in J$. Dann gibt es ein $g \in \Gamma(X)$ mit $f_x = [(D_X(g), f)]$. Es folgt $f = a/g^k$, wobei $a \in \Gamma(X)$. Daraus folgt $\varphi(a) = [(X, a)] = [(D_X(g), a/g^k)][(D_X(g), g^k)] = f_x[(D_X(g), g^k)] \in J$ also $a \in \varphi^{-1}(J)$. Es gilt also $f_x = \varphi(a)[(D_X(g), 1/g^k)] \in \varphi(\varphi^{-1}(J))\mathcal{O}_{X,x}$ und $J = \varphi(\varphi^{-1}(J))\mathcal{O}_{X,x}$.

Sei $I \subset \mathfrak{M}$ ein Primideal. Es gilt $\varphi(I) \subset \varphi(I)\mathcal{O}_{X,x}$ und also $I \subset \varphi^{-1}(\varphi(I)\mathcal{O}_{X,x})$. Umgekehrt sei $f \in \varphi^{-1}(\varphi(I)\mathcal{O}_{X,x})$. Seien $f_1, \cdots, f_r$ mit $I = (f_1, \cdots, f_r)$. Es gilt $\varphi(I)\mathcal{O}_{X,x} = (\varphi(f_1), \cdots, \varphi(f_r))$. Es gibt also Elementen $h_{1,x}, \cdots, h_{r,x} \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit $\varphi(f) = \varphi(f_1)h_{1,x} + \cdots + \varphi(f_r)h_{r,x}$. Es gibt also ein $h \in \Gamma(X)$ mit $x \in D_X(h)$ und $h_{i,x} = [(D_X(h), h_i)]$ für alle $i \in [1, r]$. Wir schreiben $h_i = c_i/h^{m_i}$, wobei $c_i \in \Gamma(X)$. Es gilt für alle N gros genug:

$$fh^N = \sum_{i=1}^{r} f_i c_i h^{N-m_i} \in I.$$

Da $h(x) \neq 0$, gilt $h \notin \mathfrak{M}$ also $h \notin I$. Daraus folgt $f \in I$. ∎

Daraus folgt, dass $\dim X = \operatorname{Kdim} \Gamma(X) \geq \operatorname{Kdim} \mathcal{O}_{X,x}$

Umgekehrt, sei $Y = \{x\}$. Es gilt $\operatorname{codim}_X Y = \dim X - \dim Y = \dim X - 0 = \dim X$. Sei $n = \dim X$ und seien $f_1, \cdots, f_r \in \Gamma(X)$ so, dass Y eine irreduzible Komponente von $V(f_1, \cdots, f_n)$ ist und $V(f_1, \cdots, f_i)$ äquidimensional der Dimension $n-i$ ist. Seien Z_i irreduzible Komponente von $V(f_1, \cdots, f_{n-i}i)$ die Y enthalten. Dann gilt

$$Y = Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n = X.$$

Es gibt also eine Kette von Primideale $I_X(Z_n) \subsetneq \cdots \subsetneq I_X(Z_0) = I_X(x) = \mathfrak{M} \subset \Gamma(X)$ und aus dem obigen Lemma gibt es eine Kette $\varphi(I_X(Z_n))\mathcal{O}_{X,x} \subsetneq \cdots \subsetneq \varphi(I_X(Z_0))\mathcal{O}_{X,x} = \varphi(I_X(x))\mathcal{O}_{X,x} = \varphi(\mathfrak{M})\mathcal{O}_{X,x} \subset \mathcal{O}_{X,x}$. Daraus folgt $\operatorname{Kdim} \mathcal{O}_{X,x} \geq n = \dim X$. ∎

Definition 11.6.7 Wir setzen $\dim_x X = \operatorname{Kdim} \mathcal{O}_{X,x}$.

11.7. Dimension und Morphismen

In diesem Abschnitt wollen wir einen Teil des folgenden Satz beweisen.

Satz 11.7.1 (Dimensionssatz) Seien X und Y zwei irreduzible algebraische Varietäten und ei $\varphi : X \to Y$ ein dominierender Morphismus algebraischer Varietäten. Sei $y \in Y$.

1. Dann gilt $\dim Z \geq \dim X - \dim Y$ für jede irreduzible Komponente Z von $\varphi^{-1}(y)$.

2. Es gibt eine nicht leere offene Teilmenge $U \subset Y$ mit

(a) $U \subset \varphi(X)$ und

(b) $\dim \varphi^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$ für alle $y \in U$ (aus 1. folgt, dass jede irreduzible Komponente von $\varphi^{-1}(y)$ Dimension $\dim X - \dim Y$ hat). □

Beweis. Wir werden nur 1. beweisen.

Zuerst ist $\varphi^{-1}(y)$ abgeschlossen in X also eine Untervarietät. Wir werden zuerst X und Y mit affinen offenen Teilmengen ersetzen.

Lemma 11.7.2 Seien $\varphi : X \to Y$ und $y \in Y$ wie oben. Sei Z ein irreduzible Komponente von $\varphi^{-1}(y)$.

Es gibt nicht leere affine Teilmengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ so, dass $\varphi(U) \subset V$, $\varphi|_U : U \to V$ dominierend ist, $y \in V$ und $Z \cap U \neq \emptyset$. □

Beweis. Sei V eine affine offene Umgebung von y. Dann ist $\varphi^{-1}(V)$ eine offene Teilmenge und enthält Z. Sei also $x \in Z$ und U eine affine offene Umgebung von x mit $U \subset \varphi^{-1}(V)$. Wir mussen nur noch zeigen, dass $\varphi|_U : U \to V$ dominierend ist. Sei aber Ω eine nicht leere offene Teilmenge von V. Da φ dominierend ist gilt $\varphi(X) \cap \Omega \neq \emptyset$ also gilt $\varphi^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$. Da X irreduzibel ist und U und $\varphi^{-1}(\Omega)$ nict leere offene Teilmengen von X sind gilt $U \cap \varphi^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$ und also $\varphi(U) \cap \Omega \neq \emptyset$. ■

Korollar 11.7.3 1. Im obigen Satz könen wir annehmen, dass X und Y affine sind.

2. Mit der obigen Notationen gilt $\dim Y \leq \dim X$.

Beweis. 1. Folgt aus dem Lemma.

2. Es gilt $\dim Y = \mathrm{Trdeg}_{\mathsf{k}} \mathsf{k}(Y)$ und $\dim X = \mathrm{Trdeg}_{\mathsf{k}} \mathsf{k}(X)$. Da $\varphi : X \to Y$ dominierend ist, haben wir (Korollar 4.2.4) ein (injektiver) Körperhomomorphismus $\varphi^* : \mathsf{k}(Y) \to \mathsf{k}(X)$. Daraus folgt $\mathrm{Trdeg}_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}(Y)) \leq \mathrm{Trdeg}_{\mathsf{k}}(\mathsf{k}(X))$. ■

Beweis von 1. Sei $m = \dim Y$ und sei $y \in Y$. Dank Proposition 11.6.2 gibt es elemente $f_1, \cdots, f_m \in \Gamma(Y)$ so, dass $\dim V(f_1, \cdots, f_s) = m - s$ und y ist eine irreduzible Komponent von $V(f_1, \cdots, f_m)$. Wir ersetzen Y mit einer affinen offenen Teilmenge von Y, die y enthält aber keinen weiteren Punkt von $V(f_1, \cdots, f_m)$ (seien z.B. $y_1, \cdots, y_k$ die Punkten in $V(f_1, \cdots, f_m) \setminus \{y\}$, dann ist $Y \setminus \{y_1, \cdots, y_k\}$ offen und enthält y, wir wählen dann eine offene Umgebung von y in dieser offenen Teilmenge). Wir ersetzen auch X mit einer affinen offenen Teilmenge des Urbilds. Damit können wir also annehmen, dass $V(f_1, \cdots, f_m)$ nur den Punkt y enthählt. Sei $g_i = \varphi^* f_i \in \Gamma(X)$. Es gilt $\{y\} = V(f_1, \cdots, f_m)$. Daraus folgt $\varphi^{-1}(y) = V(g_1, \cdots, g_m) \subset X$. Daraus folgt, dass für jede irreduzible Komponent Z von $\varphi^{-1}(y)$ gilt $\dim Z \geq \dim X - m = \dim X - \dim Y$. ■

Korollar 11.7.4 Sei $\varphi : X \to Y$ so, dass alle Fasern der gleichen Dimension d sind. Dann gilt $\dim X = \dim Y + d$.

Korollar 11.7.5 Seien X und Y affine algebraische Varietäten. Wir haben gezeigt (siehe Übungsblätter), dass $X \times Y$ auch eine affine algebraische Varietät ist. Es gilt $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.

Beweis. Die Abbildung $p : X \times Y \to X$ definiert durch $p(x, y) = x$ ist ein Morphismus algebraischer Varietäten. Alle Fasern sind aber isomorph zu Y. Aus dem Satz folgt $\dim Y = \dim X \times Y - \dim X$. ∎

Bemerkung 11.7.6 Wir werden später zeigen, dass für X und Y algebraische Varietäten das Produkt $X \times Y$ auch eine algebraische Varietät ist. Mit dem selben Beweis folgt $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.

Korollar 11.7.7 Für $X, Y \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ algebraische Mengen gilt $\dim X \cap Y \geq \dim X + \dim Y - n$.

Beweis. Wir betrachten $\mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und benuzten die Variablen $(X_i)_{i \in [1,n]}$ und $(Y_i)_{i \in [1,n]}$: ein Punkt in $\mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ ist der Form $((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n))$.

Sei $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \mid x \in \mathbb{A}_n(\mathsf{k})\}$. Es gilt $\Delta = V(X_1 - Y_1, \cdots, X_n - Y_n)$. Es gilt auch $X \times Y \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$. Wir betrachten die Abbildung $X \cap Y \to (X \times Y) \cap \Delta$ definert durch $x \mapsto (x, x)$. Diese Abbildung ist eine Bijektion mit Inverse $(x, x) \to x$. Beide Abbildungen sind regulär also sind $X \cap Y$ und $(X \times Y) \cap \Delta$ isomorph. Insbesondere gilt $\dim X \cap Y = \dim(X \times Y) \cap \Delta$. Es gilt aber $(X \times Y) \cap \Delta = V_{X \times Y}(x_1 - y_1, \cdots, x_n - y_n)$. Es folgt, dass jede irreduzible Komponent Dimension größer oder gleich $\dim X \times Y - n = \dim X + \dim Y - n$ hat. ∎

11.8. Projektive Mengen

Proposition 11.8.1 Sei $X \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ eine irreduzible projektive Menge und sei $f \in \Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ homogen und nicht konstant.

1. Dann sind alle irreduzible Komponenten von $V_{\mathbb{P}}(f)$ der Dimension $\dim X - 1$.

2. Für $\dim X > 0$ gilt $V_{\mathbb{P}}(f) \neq \emptyset$.

Beweis. 1. Sei Z eine irreduzible Komponent von $V_{\mathbb{P}}(f)$. Wir betrachten $Z \cap D^+(X_i)$ falls diese Menge nicht leer ist. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $i = 0$. Es gibt ein Isomorphismus $D^+(X_0) \simeq \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und damit folgt $V_{\mathbb{P}}(f) \cap D^+(X_0) \simeq V(f_\flat)$ mit der Dehomogeneisierung bzg. X_0. Das Polynom $f_\flat$ ist nicht invertierbar da $\emptyset \neq Z \cap D^+(X_0) \simeq V(f_\flat)$. Das Polynom $f_\flat$ ist auch nicht null: sonnst gilt $V(f_\flat) = \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ also $D^+X_0) \subset V_{\mathbb{P}}(f)$ und also $V_{\mathbb{P}}(f) = \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. Es folgt $f = 0$ ein Widerspruch. Damit folgt $\dim Z \cap D^+(X_i) = n - 1$. Dies ist eine offene Teilmenge von Z und es folgt $\dim Z = n - 1$.

2. Wir arbeiten mit den Kegeln. Sei $C(X)$ der Kegel von X. Es gilt $I(C(X)) = I_{\mathbb{P}}(X) \subset \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$. Daraus folgt, dass $I(C(X))$ ein Primideal ist und $C(X)$ irreduzibel ist. Sei $U = C(X) \setminus \{0\}$, U ist eine offene Teilmenge von $C(X)$. Daraus folgt $\dim C(X) = \dim U$. Wir haben aber eine Abbildung $p : U \to X$ definiert durch $p(x) = [x] \in \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. Diese Abbildung ist ein Morphismus (Übung) und die Fasern sind $\mathbb{A}_1(\mathsf{k}) \setminus \{0\}$. Aus dem Dimesionssatz folgt $1 = \dim \mathbb{A}_1(\mathsf{k}) = \dim A_1(\mathsf{k}) \setminus \{0\} = \dim U - \dim X = \dim C(X) - \dim X$. Es folgt $\dim C(X) = \dim X + 1$. Da $f \in I_{\mathbb{P}}(X) = I(C(X))$, können wir betrachten $V(f) \subset C(X)$. Da f nicht invertierbar und nicht null ist folgt aus dem Hauptidealsatz, dass $\dim V(f) = \dim C(X) - 1 = \dim X > 0$. Insbesondere gibt es $x \in V(f)$ mit $x \neq 0$. Daraus folgt $[x] \in V_{\mathbb{P}}(f)$ und $V_{\mathbb{P}}(f)$ ist nicht leer. ∎

Beispiel 11.8.2 Die zweite Aussage ist im affinen Raum nicht wahr. Sei $V = V(XY - 1) \subset \mathbb{A}_2(\mathsf{k})$. Nach dem Hauptidealsatz gilt $\dim V = 1$. Sei $f = [X] \in \Gamma(X)$. Es gilt $V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{A}_2(\mathsf{k}) \mid xy = 1 \text{ und } x = 0\} = \emptyset$.

Korollar 11.8.3 Sei $X \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ eine irreduzible projektive Menge und seien $f_1, \cdots, f_r$ in $\Gamma_{\mathbb{P}}(V)$ homogene und nicht konstante Elementen.

1. Dann hat jede irreduzible Komponente Z von $V_{\mathbb{P}}(f_1, \cdots, f_r)$ Dimension größer oder gleich $\dim X - r$.

2. Für $r \leq \dim X$, gilt $V_{\mathbb{P}}(f_1, \cdots, f_r) \neq \emptyset$.

Proposition 11.8.4 Sei $X \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ eine irreduzible projektive Menge und sei $Y \subset X$ abgeschlossen und irreduzibel mit $\dim Y = \dim X - r$. Dann gibt es homogene und nicht konstante Elemente so, dass jede irreduzible Komponent von $V_{\mathbb{P}}(f_1, \cdots, f_s)$ Dimension $\dim X - s$ hat für alle $s \in [1, r]$.

Insbesondere ist Y eine irreduzible Komponent von $V_{\mathbb{P}}(f_1, \cdots, f_r)$.

Beweis. Übung. ∎

12. Reguläre Varietäten

12.1. Reguläre Varietäten

Definition 12.1.1 Sei X eine irreduzible algebraische Varietät. Ein Punkt $x \in X$ heißt **regulär** (manchmal auch **glatt**), wenn $\dim X = \dim T_x X$.

Für X nicht irreduzible und $x \in X$ heißt x regulär falls $\dim_x X = T_x X$, wobei $\dim_x X$ das Maximum aller Dimension irreduzibler Komponenten von X die x enthalten.

Eine algebraische Varietät heißt **regulär** falls alle Punkte von X regulär sind.

Bemerkung 12.1.2 Man zeigt (cf. Übungsblätter), dass $\dim T_x(X) \geq \dim_x X$.

Lemma 12.1.3 Sei X eine irreduzible algebraische Varietät und sei $x \in X$. Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge mit $x \in U$. Dann ist x genau dann regulär in X, wenn x regulär in U ist. □

Beweis. Es gilt $T_x X = T_x U$ und $\dim U = \dim X$. ■

Korollar 12.1.4 Um zu bestimmen, ob ein Punkt regulär ist kann man mit affinen offenen Umgebungen arbeiten.

12.2. Jakobisches Kriterium

Definition 12.2.1 Sei $P = (P_1, \cdots, P_r) \in \mathsf{k}[X_1, \cdots, X_n]$ ein System von Polynome und $x \in \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$. **Die Jacobi-Matrix** $J(P)(x)$ **von** P ist die Matrix

$$J(P)(x) = \left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(x)\right)_{i \in [1,r], j \in [1,n]}.$$

Theorem 12.2.2 (Jacobisches Kriterium) Sei $X \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ eine irreduzible affine algebraische Varietät der Dimension d mit $I(X) = (P_1, \cdots, P_r)$. Dann gilt

$$X \text{ist regulär } \Leftrightarrow \mathrm{Rg}(J(P)(x)) = n - d.$$

Beweis. Es gilt $T_x(X) = \mathrm{Ker} J(P)(x)$. Daraus folgt die Aussage. ■

Beispiel 12.2.3 1. Sei $V = V(P)$ mit $P = Y^2 - X$. Es gilt $\frac{\partial P}{\partial X} = -1$ und $\frac{\partial P}{\partial Y} = 2Y$. Daraus folgt, dass V regulär ist.

2. Sei $V = V(P)$ mit $P = YX - 1$. Es gilt $\frac{\partial P}{\partial X} = Y$ und $\frac{\partial P}{\partial Y} = X$. Daraus folgt, dass V regulär ist.

3. Sei $V = V(P)$ mit $P = X^3 - Y^2$. Es gilt $\frac{\partial P}{\partial X} = 3X^2$ und $\frac{\partial P}{\partial Y} = -2Y$. Daraus folgt, dass $\{(0,0)\}$ der einzige nicht reguläre Punkt ist.

4. Sei $V = V(P)$ mit $P = X^2(X-1) - Y^2$. Es gilt $\frac{\partial P}{\partial X} = X(3X-2)$ und $\frac{\partial P}{\partial Y} = -2Y$. Daraus folgt, dass $\{(0,0)\}$ der einzige nicht reguläre Punkt ist.

5. Sei $V = V(P)$ mit $P = XY - Z^2$. Es gilt $\frac{\partial P}{\partial X} = Y$, $\frac{\partial P}{\partial Y} = X$ und $\frac{\partial P}{\partial Y} = -2Z$. Daraus folgt, dass $\{(0,0,0)\}$ der einzige nicht reguläre Punkt ist.

Proposition 12.2.4 Sei $X \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ eine projektive algebraische Menge mit $X = V_{\mathbb{P}}(P_1, \cdots, P_r)$, wobei P_i homogen ist für alle $i \in [1, r]$. Sei $[x] \in X$ und $J(P)(x)$ die Jacobi Matrix von $(P_1, \cdots, P_r)$ bei x.

Dann hängt $\mathrm{Rg}(J(P)(x))$ nicht von der Wahl von x ab und $[x] \in X$ ist genau dann regulär, wenn $\mathrm{Rg}(J(P)(x)) = n - \dim X$.

Beweis. Es gilt $P_i(\lambda x) = \lambda^{d_i} P_i(x)$, wobei $d_i = \deg P_i$. Es folgt $\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(\lambda x) = \lambda^{d_i - 1} \frac{\partial P_i}{\partial X_j}(x)$. Die Zeilen von $J(P)(\lambda x)$ sind also viefache von Zeilen von $J(P)(x)$. Daraus folgt die erste Aussage.

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $x \in D^+(X_0)$ und sogar $x_0 = 1$. Wir können also $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ mit $\mathbb{A}_n(\mathsf{k}) = D^+(X_0)$ ersetzen, X mit $X \cap D^+(X_0)$ und x mit $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$. Es gilt $X \cap D^+(X_0) = V((P_1)_\flat, \cdots, (P_r)_\flat)$. Der Punkt $\bar{x}$ ist also genau dann regulär, wenn $\mathrm{Rg}(J(P_\flat)(\bar{x})) = n - \dim X$. Es gilt aber $\frac{\partial (P_i)_\flat}{\partial X_j}(\bar{x}) = \frac{\partial P_i}{\partial X_j}(x)$ für $j \neq 0$. Die Matrix $J(P_\flat)(\bar{x})$ ist also die Matrix $J(P)(x)$ ohne die erste Spalte (mit Ableitungen in der Richtung ∂X_0). Es folgt $\mathrm{Rg}(J(P_\flat)(\bar{x})) \leq \mathrm{Rg}(J(P)(x))$.

Lemma 12.2.5 (Eulersche Formel) Für $P \in \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n]$ homogen von Grad d gilt

$$dP = \sum_{i=0}^{n} X_i \frac{\partial P}{\partial X_i}.$$

Beweis. Beide Seiten sind linear in P. Es genügt also diese Gleichung für Monome zu zeigen. Sei also $P = \prod_{i=0}^n X_i^{k_i}$ mit $k_0 + \cdots + k_n = d$. Es gilt $X_i \frac{\partial P}{\partial X_i} = k_i P$. Daraus folgt die Aussage. ∎

Für $x = (1, x_1, \cdots, x_n)$ mit $[x] \in X \cap D^+(X_0)$ folgt für alle $k \in [1, r]$:

$$\frac{\partial P_k}{\partial X_0}(x) = x_0 \frac{\partial P_k}{\partial X_0}(x) = dP_k(x) - \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial P}{\partial X_i}(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial P}{\partial X_i}(x).$$

Also ist die erste Spalte in $J(P)(x)$ linear abhängig von der anderen Spalten. Es folgt $\mathrm{Rg}(J(P_\flat)(\bar{x})) = \mathrm{Rg}(J(P)(x))$. ∎

1

13. Produkte

13.1. Produkte affiner algebraischer Varietäten

Proposition 13.1.1 Seien $V \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ und $W \subset \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ zwei algebraische Mengen.

1. Dann ist $V \times W \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{A}_m(\mathsf{k}) = \mathbb{A}_{n+m}(\mathsf{k})$ eine algebraische Menge mit

$$I(V \times W) = (f(X), g(Y) \text{ mit } f(X) \in I(V) \text{ und } g(Y) \in I(W)).$$

2. Es gibt ein k-Algebraisomorphismus

$$\Gamma(V) \otimes_k k\,\Gamma(W) \to \Gamma(V \times W)$$

definiert durch $f \otimes g \mapsto fg$.

3. Die Projektionen $p_1 : V \times W \to V$ und $p_2 : V \times W \to W$ sind reguläre Abbildungen.

Beweis. Siehe Übungsblatt 11. ■

Lemma 13.1.2 proj-ouvert Seien V und W algebraische Mengen. Sei $U \subset V \times W$ offen. Dann ist $p_1(U) \subset V$ offen, wobei $p_1 : V \times W \to V$ die erste Projektion ist. □

Beweis. Sei U offen in $V \times W$. Es gibt Elemente $f_1, \cdots, f_r \in \Gamma(V \times W)$ mit $U = D_{V\times W}(f_1) \cup \cdots \cup D_{V\times W}(f_r)$ also $p_1(U) = p_1(D_{V\times W}(f_1)) \cup \cdots \cup p_1(D_{V\times W}(f_r))$. Es genügt zu zeigen, dass $p_1(D_{V\times W}(f))$ offen ist für alle $f \in \Gamma(V \times W)$.

Sei $(g_j)_{j\in J}$ eine Basis von $\Gamma(W)$. Wir schreiben

$$f = \varphi\left(\sum_{j\in J} f_j \otimes g_j\right) = \sum_{j\in J} f_j g_j,$$

wobei $\varphi : \Gamma(V) \otimes_k \Gamma(W) \simeq \Gamma(V \times W)$ definiert durch $\varphi(a \otimes b) = ab$ ist. Wir zeigen

$$p_1(D_{V\times W}(f)) = \bigcup_{j\in J} D_V(f_j).$$

Sei $x \in p_1(D_{V\times W}(f))$. Es gibt also $y \in W$ mit $f(x,y) \neq 0$. Es folgt $\sum_j f_j(x) g_j(y) \neq 0$. Daraus folgt, dass es ein $j \in J$ gibt mit $f_j(x) \neq 0$. Es folgt $x \in D_V(f_j)$.

Umgekehrt, sei $x \in \bigcup_{j\in J} D_V(f_j)$. Angenommen $x \notin p_1(D_{V\times W}(f))$. Dann gibt es kein $y \in W$ mit $(x,y) \in D_{V\times W}(f)$ also gilt $f(x,y) = 0$ für alle $y \in W$. Daraus folgt

$$\sum_{j\in J} f_j(x)g_j(y) = 0$$

für alle $y \in W$ also $\sum_{j\in J} f_j(x)g_j = 0$. Da die g_j linear unabhängig sind folgt $f_j(x) = 0$ für alle $j \in J$. Ein Widerspruch zu $x \in \bigcup_{j\in J} D_V(f_j)$. ■

Korollar 13.1.3 Seien V und W algebraische Mengen. Es gilt

$$V \times W \text{ irreduzibel } \Leftrightarrow V \text{ und } W \text{ sind irreduzibel.}$$

Beweis. ($\Rightarrow$) Die Projektion $p_1 : V \times W$ ist ein surjektiver Morphismus. Daraus folgt $V = p_1(V \times W)$ ist irreduzibel. Analog gilt W irreduzibel.

($\Leftarrow$) Seien U_1 und U_2 offene Teilmengen in $V \times W$ mit $U_1 \neq \emptyset$ und $U_2 \neq \emptyset$. Zu zeigen ist $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Beide $p_1(U_1)$ und $p_2(U_2)$ sind offen und nicht leer in V. Da V irreduzibel ist gilt $p_1(U_1) \cap p_2(U_2) \neq \emptyset$. Sei $x \in p_1(U_1) \cap p_1(U_2)$.

Es gilt $p_1^{-1}(x) = W$. Aber $p_1^{-1}(x) \cap U_1$ und $p_1^{-1}(x) \cap U_2$ sind offen und nicht leer in $p_1^{-1}(x) = W$. Da W irreduzibel ist folgt $(p_1^{-1}(x) \cap U_1) \cap (p_1^{-1}(x) \cap U_2) \neq \emptyset$. Es folgt $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. ■

13.2. Produkte algebraischer Varietäten

Definition 13.2.1 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und seien $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Ein Objekt $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ heißt **Produkt** von X und Y falls es Morphismen $p : Z \to X$ und $q : Z \to Y$ gibt so, dass die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Für alle $Z' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ mit Morphismen $p' : Z' \to X$ und $q' : Z' \to Y$ gibt es ein eindeutiger Morphismus $f : Z' \to Z$ so, dass $p' = p \circ f$ und $q' = q \circ f$.

Lemma 13.2.2 Seien Z_1 und Z_2 zwei Produkte von X und Y in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Dann sind Z_1 und Z_2 isomorph. □

Beweis. Für $i \in [1, 2]$, seien $p_i : Z_i \to X$ und $q_i : Z_i \to Y$ die von der Definition gegebene Morphismen. Nach der Definition gibt es ein Morphismus $f : Z_1 \to Z_2$ mit $p_1 = p_2 \circ f$ und $q_1 = q_2 \circ f$ und ein Morphismus $g : Z_2 \to Z_1$ mit $p_2 = p_1 \circ g$ und $q_2 = q_1 \circ g$.

Nach der Definition mit $Z' = Z = Z_1$ gibt es ein eindeutiger Morphismus $h : Z_1 \to Z_1$ mit $p_1 = h \circ p_1$ und $q_1 = h \circ q_1$. Für $h = \mathrm{Id}_{Z_1}$ sind diese Aussagen wahr also $h = \mathrm{Id}_{Z_1}$. Es gilt aber auch $g \circ f : Z_1 \to Z_1$, $p_1 = p_2 \circ f = p_1 \circ g \circ f$ und $q_1 = q_2 \circ f = q_1 \circ g \circ f$. Daraus folgt $f \circ g = h = \mathrm{Id}_{Z_1}$. Analog gilt $g \circ f = \mathrm{Id}_{Z_2}$. ■

Bemerkung 13.2.3 Wenn es ein Produkt gibt ist es eindeutig (modulo Isomorphismus) bestimmt. Ein Produkt von X und Y es also das Produkt von X und Y genannt.

Lemma 13.2.4 Seien V und W affine algebraische Varietäten. Dann ist $V \times W$ ein Produkt von V und W in der Kategorie aller algebraischen Varietäten. $\square$

Beweis. Sei Z eine algebraische Varietät mit Morphismen $p : Z \to V$ und $q : Z \to W$. Dann ist $p \times q : Z \to V \times W$ mit $p \times q(z) = (p(z), q(z)$ eine Wohl definierte Abbildung. Für U affine und offen in Z sind $p|_U$ und $q|_U$ reguläre Abbildungen also auch $(p \times q)|_U$. Es folgt, dass $p \times q$ ein Morphismus ist. Es gilt aber $p_1 \circ (p \times q) = p$ und $p_2 \circ (p \times q) = q$. $\blacksquare$

Proposition 13.2.5 Seien X und Y algebraische Varietäten. Dann gibt es ein Produkt $X \times Y$ in der Kategorie aller algebraischen Varietäten.

Beweis. Als Menge ist das Produkt einfach $X \times Y$. Die Topologie ist dank der folgeenden Basis $\mathcal{B}$ definiert:

$$\mathcal{B} = \{U \text{ affine und offen in } V \times W, \text{ wobei } V \text{ und } W \text{ affine offen in } X \text{ und } Y \text{ sind}\}.$$

Eine offene Teilmenge von $X \times Y$ ist also per Definition eine Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$. Die Strukturgarbe ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{O}_{X \times Y}(U) = \mathcal{O}_{V \times W}(U) = \mathcal{O}_U(U)$$

für $U \in \mathcal{B}$ mit $U \subset V \times W$ affine und offen und V und W sind affine offen in X und Y. Die Eigenschaften (A) und (B) für $\mathcal{O}_{X \times Y}$ folgen direkt aus diesen Eigenschaften für $V \times W$ also ist $\mathcal{O}_{X \times Y}$ eine Garbe und $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ ein geringter Raum lokal isomorph zu $(U, \mathcal{O}_U)$ eine algebraische Menge. Es folgt, dass $X \times Y$ eine algebraische Varietät ist.

Die Abbildungen $p_1 : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$ und $p_2 : X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y$ sind Morphismen: es gibt eine Überdeckung (die Elementen aus $\mathcal{B}$) so, dass die Einschränkungen von p_1 und p_2 auf Elementen von dieser Überdeckung Morphismen sind.

Sei jetzt Z eine algebraische Varietät mit Morphismen $p : Z \to X$ und $q : Z \to Y$. Dann ist die Abbildung $p \times q : Z \to X \times Y$ wohl definiert. Für V und W offen und affine in X und Y sind die Einschränkungen $p : p^{-1}(V) \cap q^{-1}(W) \to V$ und $q : p^{-1}(V) \cap q^{-1}(W) \to W$ Morphismen und also auch $p \times q : p^{-1}(V) \cap q^{-1}(W) \to V \times W$ (Fall $X = V$ und $Y = W$ affine). Dies sind Überdeckungen also ist $p \times q$ ein Morphismus und es gilt $p = p_1 \circ (p \times q)$ und $q = p_2 \circ (p \times q)$. $\blacksquare$

Definition 13.2.6 Ein Morphismus $\varphi : X \to Y$ algebraischer Varietäten heißt offen falls $\varphi(U)$ ist offen für alle offene Teilmengen U in X.

Beispiel 13.2.7 Für V und W affine sind die Projektionen $p_1 : V \times W \to V$ und $p_2 : V \times W \to W$ offen (cf. Lemma 13.1.2).

Lemma 13.2.8 Seien X und Y algebraische Varietäten. Dann sind die Projektionen $p_1 : X \times Y \to X$ und $p_2 : X \times Y \to Y$ offen. □

Beweis. Sei $U \subset X \times Y$ offen. Wir zeigen, dass $p_1(U)$ offen ist. Analog gilt, dass $p_2(U)$ offen ist.

Seien $V \subset X$ und $W \subset Y$ offen und affine. Dann ist $U \cap (V \times W)$ offen und es genügt zu zeigen, dass $p_1(U \cap (V \times W))$ offen ist für alle V und W. Wir können also annehmen, dass $X = V$ und $Y = W$ affine sind. Die Aussage folgt jetzt aus Lemma 13.1.2. ■

Korollar 13.2.9 Seien X und Y algebraische Varietäten. Es gilt

$$X \times Y \text{ irreduzibel } \Leftrightarrow X \text{ und } Y \text{ sind irreduzibel.}$$

Beweis. Beweis wie für algebraische Mengen. ■

13.3. Produkt projektiver algebraischer Varietäten

Proposition 13.3.1 Sei $\varphi : \mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{P}_m(\mathsf{k}) \to \mathbb{P}_{nm+n+m}(\mathsf{k})$ mit

$$\varphi([x_0 : \cdots : x_n], [y_0 : \cdots : y_m]) = [x_0 y_0 : \cdots : x_n y_m].$$

Dann ist φ wohl definiert und ein Morphismus algebraischer Varietäten. Außerdem induziert φ ein Isomorphismus von $\mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{P}_m(\mathsf{k})$ auf

$$V = V_{\mathbb{P}}(Z_{i,j} Z_{k,l} - Z_{i,l} Z_{k,j},\ i, k \in [0, n] \text{ und } j, l \in [0, m]).$$

Beweis. Die Abbildung ist wohl definiert, weil $\varphi([\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n], [\mu y_0 : \cdots : \mu y_m]) = [\lambda\mu x_0 y_0 : \cdots : \lambda\mu x_n y_m] = [x_0 y_0 : \cdots : x_n y_m] = \varphi([x_0 : \cdots : x_n], [y_0 : \cdots : y_m])$.

Wir zeigen, dass das Bild von φ die Menge V ist. Es gilt $x_i y_j x_k y_l - x_i y_l x_k y_j = 0$ also gilt $\mathrm{Im}\varphi \subset V$. Umgekehrt, sei $[z] = [z_{i,j}] \in V$. Wir betrachten $z = (z_{i,j})$ als eine $(n+1) \times (m+1)$ matrix. Die Gleichungen $Z_{i,j} Z_{k,l} - Z_{i,l} Z_{k,j}$ sind die 2×2-Minoren der Matrix z. Insbesondere gilt $\mathrm{Rg}(z) \leq 1$. Da $z \neq 0$ gilt $\mathrm{Rg}(z) = 1$. Sei $x \in \mathrm{Im} z$ mit $x \neq 0$ (z.B. ist $x = (x_0, \cdots, x_n)$ eine nicht triviale Spalte von z). Seien $S_0, \cdots, S_m$ die Spalten von z. Für jedes $j \in [0, m]$ gibt es ein $y_j \in \mathsf{k}$ mit $S_j = y_j x$. Außerdem ist $(y_0, \cdots, y_m)$ nicht null sonnst gelte $S_j = 0$ für alle j also $z = 0$. Es folgt $[x] \in \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$, $[y] = [y_0 : \cdots : y_m] \in \mathbb{P}_m(\mathsf{k})$ und $[z] = [z_{i,j}] = [x_i y_j] = \varphi([x], [y])$.

Wir zeigen jetzt, dass φ injektiv ist. Seien $x, x' y, y'$ mit $\varphi([x], [y]) = \varphi([x'], [y'])$. Sei i mit $x_i \neq 0$. Es gilt $x_i y_k = x'_i y'_k$ und also $y_k = \frac{x'_i}{x_i} y'_k$ für alle k also $y = \frac{x'_i}{x_i} y'$. Da $y \neq 0$, folgt $x'_i \neq 0$ und also $[y] = [y']$. Analog gilt $[x] = [x']$.

Die Einschränkung $\varphi : D^+(X_i) \times D^+(Y_j) \to D_V^+(Z_{i,j})$ ist gegeben durch

$$\varphi\left(\left(\frac{x_0}{x_i}, \cdots, 1, \cdots, \frac{x_n}{x_i}\right), \left(\frac{y_0}{y_j}, \cdots, 1, \cdots, \frac{y_m}{y_j}\right)\right) = \left(\frac{x_0 y_0}{x_i y_j}, \cdots, 1, \cdots, \frac{x_n y_m}{x_i y_j}\right).$$

Dies ist ein reguläre Abbildung also ist φ ein Morphismus. Wir zeigen, dass diese Einschränkung ein Isomorphismus ist. Ohne Einschränkung (modulo Variblenwechsel) können wir annehmen, dass $x_i = X_0$. Die obige Abbildung als matrix dargestellt ist gegeben durch

$$\varphi([x_0 : \cdots : x_n], [y_0 : \cdots : y_m]) = \begin{bmatrix} x_0 y_0 & \cdots & x_0 y_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_0 & \ddots & x_n y_m \end{bmatrix}$$

und auf $D^+(X_0) \times D^+(Y_0)$ durch:

$$\varphi((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_m)) = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_m \\ x_1 & x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n y_1 & \cdots & x_n y_m \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist die Umkehrabbildung ψ gegeben durch

$$\psi(z_{i,j}) = ((z_{1,0}, \cdots, z_{n,0}), (z_{0,1}, \cdots, z_{0,m})).$$

Daraus folgt, dass φ ein Isomorphismus ist. ∎

Korollar 13.3.2 Das Produkt von zwei projektiven algebraischen Varietäten ist wieder eine projektive algebraische Varietät.

Beweis. Seien $X \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ und $Y \subset \mathbb{P}_m(\mathsf{k})$ projektive algebraische Varietäten. Dann ist $X \times Y \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{P}_m(\mathsf{k})$ abgeschlossen und also abgeschlossen in $V \subset \mathbb{P}_{nm+n+m}(\mathsf{k})$. Daraus folgt, dass $X \times Y$ eine projektive Varietät ist. ∎

Beispiel 13.3.3 Es gibt ein Isomorphimus $\mathbb{P}_1(\mathsf{k}) \times \mathbb{P}_1(\mathsf{k}) \simeq V_{\mathbb{P}}(XY - ZT) \subset \mathbb{P}_3(\mathsf{k})$.

13.4. Separable Varietäten

Definition 13.4.1 Sei X eine algebraische Varietät.

1. **Die Diagonale** ist die Teilmenge $\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \mid y = x\} \subset X \times X$.

2. Die Varietät X heißt **separabel**, wenn Δ_X abgeschlossen in $X \times X$ ist.

Proposition 13.4.2 Sei X affine. Dann ist X separabel.

Beweis. Sei $X \subset \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ eine algebraische Menge. Wir betrachten $X \times X$ als Teilmenge von $\mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ mit Variablen $X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n$. Es gilt $\Delta_X = V_{X\times X}([X_i] - [Y_i])$ und also ist die Diagonale abgeschlossen. ∎

Lemma 13.4.3 Sei X eine algebraische Varietät so, dass es für alle $x, y \in X$ eine affine offene Teilmenge $U_{x,y}$ gibt mit $x, y \in U_{x,y}$.

Dann ist X separabel. □

Beweis. Das Produkt $X \times X$ hat eine affine Überdeckung $U_{x,y} \times U_{x,y}$: jeder Punkt $(x, y) \in X \times X$ ist in $U_{x,y} \times U_{x,y}$ enthalten. Die Diagonale Δ_X ist also genau dann abgeschlossen, wenn $\Delta_{U_{x,y}} = \Delta_X \cap (U_{x,y} \times U_{x,y})$ in $U_{x,y} \times U_{x,y}$ ist. Diese letzte Aussage ist aber wahr dank dem obigen Proposition, weil $U_{x,y}$ affine ist. ∎

Korollar 13.4.4 Eine projektive algebraische Varietät X ist separabel.

Beweis. Seien $x, y \in X$. Dann gibt es ein homogenes Polynom P von Grad 1 mit $P(x) \neq 0 \neq P(y)$. Es folgt $x, y \in D_X^+(P)$ eine affine Teilmenge und also ist X separabel dank dem obigen Lemma. ∎

Definition 13.4.5 Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus algebraischer Varietäten. **Der Graph Γ_φ von φ** ist die Menge

$$\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in X \times Y \mid y\varphi(x)\}.$$

Proposition 13.4.6 Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus algebraischer Varietäten mit Y separabel. Dann ist der Graph Γ_φ abgeschlossen in $X \times Y$.

Beweis. Es gibt Morphismen $p : X \times Y \to Y$ mit $p(x.y) = \varphi(x)$ und $q : X \times Y \to Y$ mit $q(x, y) = y$. Daraus folgt, dass es ein eindeutiger Morphismus $\varphi \times \mathrm{Id}_Y : X \times Y \to Y \times Y$ gibt mit $(\varphi \times \mathrm{Id}_Y)(x, y) = (\varphi(x), y)$. Da Y separabel ist ist Δ_Y abgeschlossen in $Y \times Y$ also ist $\Gamma_\varphi = (\varphi \times \mathrm{Id}_Y)^{-1}(\Delta_Y)$ abgeschlossen in $X \times Y$. ∎

Bemerkung 13.4.7 Die Eingenschaft *separabel* ist die richtige Definition für Hausdorff für algebraische Varietäten. Zum Beispiel ist eine separable algebraische Menge in $\mathbb{R}^n = \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$ Hausdorf für die übliche Topologie.

Bemerkung 13.4.8 Es gibt algebraische Varietäten die nicht separabel sind. Das einfachste Beispiel ist X die Gerade mit verdoppeltem Ursprung. Als Menge gilt

$$X = (\mathbb{A}_1(\mathsf{k}) \setminus \{0\}) \cup \{0_1\} \cup \{0_2\}.$$

Diese Menge enthält $\mathbb{A}_1(\mathsf{k})$ zweimal: $U_1 = (\mathbb{A}_1(\mathsf{k}) \setminus \{0\}) \cup \{0_1\} \subset X$ und $U_2 = (\mathbb{A}_1(\mathsf{k}) \setminus \{0\}) \cup \{0_2\} \subset X$. Die Topologie ist definiert dank der Basis

$$\mathcal{B} = \{U \text{ affine und offen in } U_1 \text{ oder } U_2\}.$$

Die Strukturgarbe ist dank $\mathcal{O}_X(U) = \Gamma(U)$ für $U \in \mathcal{B}$ definiert. Man zeigt, dass X eine algebraische aber nicht separable Varietät ist.

13.5. Eigentliche Varietäten

Definition 13.5.1 Eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt **abgeschlossen**, falls $\varphi(Z)$ abgeschlossen ist für alle $Z \subset X$ abgeschlossen.

Beispiel 13.5.2 Die Identitätabbildung ist abgeschlossen.

Definition 13.5.3 Eine algebraische Varietät X heißt **eigentlich**, falls $p_2 : X \times Y \to Y$ abgeschlossen ist für alle algebraische Varietäten Y.

Beispiel 13.5.4 1. Für topologische Räum sind kompakte Räume eigentlich: für X kompakt ist die Projektion $p_2 : X \times Y \to Y$ abgeschlossen.

2. Ein Punkt ist immer eigentlich: die Abbildung $\{\text{Punkt}\} \times Y \to Y$ ist die Identität-Abbildung also abgeschlossen.

Proposition 13.5.5 Sei $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus algebriascher Varietäten mit X eingentlich und Y separabel. Dann ist $\varphi(X)$ abgeschlossen in Y.

Beweis. Sei $p_2 : X \times Y \to Y$. Es gilt $p_2(\Gamma_\varphi) = \varphi(X)$. Da Γ_φ abgeschlossen ist (Y ist separabel) muss $p_2(\Gamma_\varphi)$ abgeschlossen sein (X ist eigentlich). ∎

Beispiel 13.5.6 1. Dies ist nich immer wahr. Für die Projektion $V = V(XY-1) \to \mathbb{A}_1(\mathsf{k}), (xy) \mapsto x$ ist das Bild $\mathbb{A}_1(\mathsf{k}) \setminus \{0\}$ offen aber nicht abgeschlossen. Insbesondere ist V nicht eigentich.

2. Seien $X = \mathbb{A}_n(\mathsf{k})$, $Y = \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ und $\varphi : X \simeq D^+(X_0)$. Dann ist Y separabel aber $\varphi(X) = D^+(X_0)$ nicht abgeschlossen (es gilt $\overline{\varphi(X)} = \overline{D^+(X_0)} = \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. Es folgt, dass $\mathbb{A}_n(\mathsf{k})$ nicht eigentlicht ist.

Allgemeiner gilt (dies werden wir nicht zeigen):

Theorem 13.5.7 Sei X eine algebraische Varietät. Dann gilt

$$X \text{ ist affine und eigentlich} \Leftrightarrow X \text{ ist endlich.}$$

Proposition 13.5.8 Seien X und Y eingentlich. Dann ist $X \times Y$ auch eigentlich.

Beweis. Sei Z ein algebraische Varietät und sei $A \subset X \times Y \times Z$ abgeschlossen. Sei $p_{YZ} : X \times Y \times Z \to Y \times Z$ die Projektion. Dann ist $p_{YZ}(A)$ abgeschlossen (X ist eingentlich). Sei $p_Z : Y \times Z$ die Projektion. Dann ist $p_Z(p_{YZ}(A))$ abgeschlossen (Y ist eingentlich). Es gilt aber $p = p_Z \circ p_{YZ}$, wobei $p : X \times Y \times Z \to Z$ die Projektion ist. Daraus folgt, dass $p(A) = p_Z(p_{YZ}(A))$ abgeschlossen ist. ∎

Proposition 13.5.9 Seien X eingentlich und $Y \subset X$ abgeschlossen. Dann ist Y eigentlich.

Beweis. Sei Z ein algebraische Varietät und sei $A \subset Y \times Z$ abgeschlossen. Da $Y \subset X$ abgeschlossen ist, ist $Y \times Z \subset X \times Z$ abgeschlossen. Daraus folgt, dass A abgeschlossen in $X \times Z$ ist und also $p_2(A)$ ist abgeschlossen in Z. ∎

Satz 13.5.10 Der projektive Raum $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ ist eigentlich. □

Beweis. Sei X eine algebraische Varietät. Wir zeigen, dass $p : \mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \times X \to X$ abgeschlossen ist. Es genugt zu zeigen, dass $p : \mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \times U \to U$ abgeschlossen ist, für jede affine offene Teilmenge $U \subset X$. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass X eine algebraische Menge ist. Sei also $X \subset \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ abgeschlossen. Dann ist $\mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \times X \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ abgeschlossen und es genügt also zu zeigen, dass die Projektion $p : \mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{A}_m(\mathsf{k}) \to \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ abgeschlossen ist. Wir nehmen also an, dass $X = \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$.

Wir werden die Punkte in $\mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ als $([x_0 : \cdots : x_n], (y_1, \cdots, y_m))$ darstellen. Die zugehörige Variablen sind $X_0, \cdots, X_n$ und $Y_1, \cdots, Y_m$.

Sei $Z \subset \mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ abgeschlossen. Wir zeigen, dass $p(Z)$ abgeschlossen ist. Sei also $y = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{A}_m(\mathsf{k}) \setminus p(Z)$ uns sei $\mathfrak{M} = I(\{y\}) = (Y_1 - y_1, \cdots, Y_n - y_n)$ das zugehörige maximale Ideal.

Sei $U_i = D^+(X_i) \times \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$. Dann ist U_i offen in $\mathbb{P}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{A}_m(\mathsf{k})$ und affine. Es gilt sogar $D^+(X_i) \times \mathbb{A}_m(\mathsf{k}) \simeq \mathbb{A}_n(\mathsf{k}) \times \mathbb{A}_m(\mathsf{k}) = \mathbb{A}_{n+m}(\mathsf{k})$. Der Ring $\Gamma(U_i)$ ist isomorph zu $\Gamma(D^+(X_i)) \otimes_{\mathsf{k}} \Gamma(\mathbb{A}_m(\mathsf{k}))$ also

$$\Gamma(U_i) = \mathsf{k}\left[\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}, Y_1, \cdots, Y_m\right].$$

Der Durchschnitt $Z \cap U_i$ ist in U_i abgeschlossen also eine algebraische Menge. Sei $I_i = I(Z \cap U_i) \subset \Gamma(U_i)$ das zugehörige Ideal. Wir schreiben $\mathfrak{M}\,\Gamma(U_i)$ für das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Ideal in $\Gamma(U_i)$.

Lemma 13.5.11 Es gilt $\Gamma(U_i) = I_i + \mathfrak{M}\,\Gamma(U_i)$. □

Beweis. Sei $(x, y') = \left(\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}, y'_1, \cdots, y'_n\right) \in V(I_i + \mathfrak{M}\,\Gamma(U_i)) \subset U_i = \mathbb{A}_{n-m}(\mathsf{k})$. Da $\mathfrak{M} = (Y_1 - y_1, \cdots, Y_n - y_n)$ folgt $y' = (y'_1, \cdots, y'_n) = (y_1, \cdots y_n) = y$. Es gilt auch $P(x, y') = 0$ für alle $P \in I_i = I(Z \cap U_i)$ also $(x, y') \in Z$. Es folgt $y = y' = p(x, y') \in p(Z)$ ein Widerspruch. Daraus folgt $V(I_i + \mathfrak{M}\,\Gamma(U_i)) = \emptyset$ und $I_i + \mathfrak{M}\,\Gamma(U_i) = \Gamma(U_i)$ (Nullstellensatz). ∎

Für jedes $i \in [0, n]$ schreiben wir $1_{\Gamma(U_i)} = f_i + g_i$ mit $f_i \in I_i$ und $g_i \in \mathfrak{M}\,\Gamma(U_i)$. Wir setzen $S = \mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m]$. Für $F \in S$ setzen wir

$$F_{X_i} = F\left(\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}, Y_1, \cdots, Y_m\right) \in \mathsf{k}\left[\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}, Y_1, \cdots, Y_m\right] = \Gamma(U_i).$$

Sei J das Ideal von $\mathsf{k}[X_0, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m]$, das von Polynomen F homogen in den Variablen $X_0, \cdots, X_n$ mit $F_{X_i} \in I_i = I(Z \cap U_i)$ für alle $i \in [0, n]$ erzeugt ist:

$$J = (F \mid F \text{ homogen in } X_0, \cdots, X_n \text{ mit } F_{X_i} \in I_i = I(Z \cap U_i) \text{ für alle } i \in [0, n]).$$

Für $(x, y') \in Z$ und $F \in J$ gilt $F(x, y') = 0$.

Dank Multiplikation mit Potenzen von X_i gibt es eine naturlische Zahl a_i mit $X_i^{a_i} f_i \in S$ und $X_i^{b_i} g_i \in S$. Darüberhinhaus sind $X_i^{a_i} f_i$ und $X_i^{a_i} g_i$ homogen in den Variablen $X_0, \cdots, X_n$. Es gilt $(X_i^{a_i} f_i)_{X_i} = f_i \in I_i$ also gilt $X_i^a f_i \in J$. Es folgt

$$X_i^{a_i} = X_i^{a_i} f_i + X_i^{a_i} g_i \in J + \mathfrak{M}S,$$

wobei $\mathfrak{M}S$ das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Ideal in S ist. Für $a = \max_i a_i$ gilt also

$$X_i^a \in J + \mathfrak{M}S \text{ für alle } i \in [0, n].$$

Für $d \geq 0$, sei S_d der Unterraum von S aller homogenen Polynome von Grad d. Für $r = (n+1)a$ gilt

$$S_r \subset J + \mathfrak{M}S,$$

denn für ein Monom $F = X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}$ von Grad r mit $i_j < a$ für alle j gilt $r = i_0 + \cdots + i_n < (n+1)a$ ein Widerspruch. Also gibt es ein j mit $i_j \geq a$ und $X_j^{i_j} \in J + \mathfrak{M}S$. Daraus folgt $F \in J + \mathfrak{M}S$ und die Aussage.

Sei $J_r = J \cap S_r$.

Lemma 13.5.12 Es gibt ein $f \in \mathsf{k}[Y_1, \cdots, Y_m] \setminus \mathfrak{M}$ mit $f S_r \subset J_r$. □

Beweis. Sei $(e_1, \cdots, e_N)$ eine Basis von S_r. Es gilt $e_i \in J + \mathfrak{M}S$ und da beide Ideal graduiert sind gibt es $p_i \in J \cap S_r = J_r$ und $q_i \in \mathfrak{M}S \cap S_r = \mathfrak{M}S_r$ mit $e_i = p_i + q_i$. Das Element q_i ist also der Form

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} m_{i,j} e_j, \text{ mit } m_{i,j} \in \mathfrak{M}.$$

Sei $M = (m_{i,j})_{i,j \in [1,N]}$. Es gilt

$$(I_N - M)(e_i) = p_i \in J_r \text{ für alle } i \in [1, N].$$

Sei $f = \det(I_N - M)$. Es gilt $f(y) = \det(I_N - M(y)) = \det(I_N) = 1$. Es folgt $f \notin \mathfrak{M}$. Es gilt aber $\det(A) I_N = \mathrm{Com}(A)^T A$ für alle Matrizen. Daraus folgt $f I_N = \mathrm{Com}(I_N - M)^T (I_N - M)$ und also

$$f e_i = \mathrm{Com}(I_N - M)^T (I_N - M) e_i = \mathrm{Com}(I_N - M)^T p_i \in J_r \text{ für alle } i \in [1, N].$$

Daraus folgt die Aussage. ■

Wir zeigen jetzt, dass $D(f) \subset \mathbb{A}_m(\mathsf{k}) \setminus p(Z)$ und also, dass $\mathbb{A}_m(\mathsf{k}) \setminus p(Z)$ eine offene Umgebung von y enthält. Da dies für alle $y \in \mathbb{A}_m(\mathsf{k}) \setminus p(Z)$ wahr ist folgt, dass $\mathbb{A}_m(\mathsf{k}) \setminus p(Z)$ offen ist also $p(Z)$ ist abgeschlossen.

Sei $y' \in D(f)$ und sei $x \in \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ so, dass $(x, y') \in Z$. Es gibt ein i so, dass $x_i \neq 0$ also $x \in D^+(X_i)$ und also $(x, y') \in U_i \cap Z$. Daraus folgt $h(x, y') = 0$ für alle $h \in I_i$. Es gilt also $F(x, y') = 0$ für alle $F \in J$. Es gilt aber $fX_i^r = F \in J_r$. Es folgt

$$0 \neq f(y')x_i^r = F(x, y') = 0.$$

Ein Widerspruch. Es gibt also kein $x \in \mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ mit $(x, y') \in Z$ und also $y' \notin p(Z)$. ■

Satz 13.5.13 Jede projektive Varietät ist eigentlich. □

Beweis. Sei X eine projektive Varietät. Dann ist X abgeschlossen in $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$. Es folgt X eingentlich, weil $\mathbb{P}_n(\mathsf{k})$ eigentlich ist. ■

14. Abelsche Varietäten

14.1. Algebraische Gruppen

Definition 14.1.1 Eine algebraische Gruppe ist eine algebraische Varietät G mit Morphismen $\mu : G \times G \to G$ und $\iota : G \to G$ und einem Punkt $e_G \in G$ so, dass G mit Multiplikation $gh = \mu(g, h)$, neutralem Element e_G und Inverse $g^{-1} = \iota(g)$ eine Gruppe ist.

Beispiel 14.1.2 1. Eine endliche Gruppe ist immer eine algebraische Gruppe.

2. Die Gruppen $\mathrm{GL}_n(\mathsf{k})$, $\mathrm{SL}_n(\mathsf{k})$ oder $\mathrm{O}_n(\mathsf{k})$ sind algebraische Gruppen. Wir haben schon gesehen, dass die erste eine offene Teilmenge von $M_n(\mathsf{k}) = \mathbb{A}_{n^2}(\mathsf{k})$ ist. Die zweite ist die algebraische Menge $V(T\det(M) - 1) \subset \mathbb{A}_1(\mathsf{k}) \times M_n(\mathsf{k})$. Die letzte Gruppe ist die algebraische Menge $V(M^T M - I_n)$. Außerdem ist die Multiplikation dank Matrixmultiplikation gegeben und also dank Polynome gegeben. Es ist also eine reguläre Abbildung und also ein Morphismus. Das gleiche gilt für das Inverse.

14.2. Projektive algebraische Gruppen

In diesem Kapitel wollen wir zeigen:

Theorem 14.2.1 Eine irreduzible projektive algebraische Gruppe G ist abelsch. □

Beispiel 14.2.2 1. Für G nicht projektiv ist die Aussage falsch: $\mathrm{GL}_n(\mathsf{k})$ ist irreduzibel (aber affine und nicht projektive) und auch nicht kommutativ für $n \geq 2$.

2. Für G nicht irreduzibel ist die Aussage auch falsch: jede endliche Gruppe ist eine algebraische Gruppe (aber nicht irreduzibel). Es gibt aber (viele) nicht abelsche endliche Gruppen.

Satz 14.2.3 (Rigiditätslemma) Seien X, Y und Z drei algebraische Varietäten mit X und Y irreduzibel, X projektiv und Z separabel.

Sei $\varphi : X \times Y \to Z$ ein Morphismus so, dass es ein $y_0 \in Y$ und ein $z_0 \in Z$ gibt mit $\varphi(X \times \{y_0\}) = \{z_0\}$.

Sei $\varphi : X \times Y \to Z$ ein Morphismus so, dass es ein $y_0 \in Y$ gibt mit $\varphi(X \times \{y_0\}) = \{z_0\}$ für ein $z_0 \in Z$.

Dann gilt für jedes $y \in Y$: $\varphi(X \times \{y\}) = \{z\}$ für ein $z \in Z$. □

Beweis. Sei $\Gamma = \{(x, y, \varphi(x, y) \in X \times Y \times Z\}$ der Graph von φ. Da Z separabel ist, ist Γ abgeschlossen in $\times Y \times Z$. Der Graph Γ ist isomorph zu $X \times Y$ mit Abbildungen $(x, y) \leftrightarrow (x, y, \varphi(x, y)$. Insbesondere ist Γ irreduzibel.

Sei $p_{YZ} : X \times Y \times Z \to Y \times Z$ die Projektion. Da X projektiv also eigentlich ist, ist $\Gamma' = p_{YZ}(Y)$ abgeschlossen in $Y \times Z$. Da Γ irreduzibel ist, ist Γ' auch irreduzibel.

Sei $p_1 : Y \times Z \to Z$. Wir schreiben auch p_1 für die Einschränkung $p_1 : \Gamma' \to Y$. Dieser Morphismus ist sujektiv: für alle $y \in Y$ und $x \in X$, gilt $(x, y, \varphi(x, y)) \in \Gamma$ also $(y, \varphi(y, x)) \in \Gamma'$ und also $p_1(y, \varphi(x, y)) = y$. Sei U eine offene Teilmenge von Y so, dass $\dim Z = \dim \Gamma' - \dim Y$ gilt für alle $y \in U$ und alle irreduzible Komponenten Z von $p_1^{-1}(y)$. Wir betrachten jetzt $\varphi^{-1}(y_0) = \{(y_0, \varphi(x, y_0) \mid x \in X\}$. Da $\varphi(X \times \{y_0\}) = \{z_0\}$ gilt $p_1^{-1}(y_0) = \{(y_0, z_0)\}$. Es gilt also

$$0 = \dim p_1^{-1}(y_0) \geq \dim \Gamma' - \dim Y = \dim Z \geq 0.$$

Daraus folgt, dass alle Ungleichungen Gleichungen sind. Insbesondere gilt $\dim \Gamma' = \dim Y$.

Sei jetzt $x_0 \in X$ und $\Gamma_{x_0} = \Gamma \cap p_X^{-1}(x_0)$, wobei $p_X : X \times Y \times Z \to X$ die Projektion ist. Es gilt

$$\Gamma_{x_0} = \{(x_0, y, \varphi(x_0, y)) \in X \times Y \times Z\}.$$

Sei $p_{YZ} : \Gamma_{x_0} \to Y \times Z$ die Einschränkung von p_{YZ}. Es gilt

$$p_{YZ}(\Gamma_{x_0}) = \{(y, \varphi(x_0, y)) \in Y \times Z\} \subset \Gamma'.$$

Der Morphismus $p_1 : p_{YZ}(\Gamma_{x_0}) \to Y$ ist surjektiv: $p_1(y, \varphi(x_0, y)) = y$. Daraus folgt

$$\dim \Gamma' \geq \dim p_{YZ}(\Gamma_{x_0}) \geq \dim Y = \dim \Gamma'.$$

Insbesondere gilt $\dim p_{YZ}(\Gamma_{x_0}) = \dim \Gamma'$ und da Γ' irreduzibel ist folgt $p_{YZ}(\Gamma_{x_0}) = \Gamma'$. Sei $y_1 \in Y$ fest. Es folgt

$$\begin{aligned}\{(y_1, \varphi(x_0, y_1)\} &= p_1^{-1}(y_1) \cap p_{YZ}(\Gamma_{x_0}) \\ &= p_1^{-1}(y_1) \cap \Gamma' \\ &= \{(y_1, \varphi(x, y_1)) \in Y \times Z \mid x \in X\} \\ &= \{y_1\} \times \varphi(X \times \{y_1\}).\end{aligned}$$

Daraus folgt $\varphi(X \times \{y_1\}) = \{\varphi(x_0, y_1)\}$ und die Aussage. ■

Beweis von Theorem 14.2.1. Sei G eine projektive algebraiche Gruppe und $\varphi : G \times G \to G$ definiert durch $\varphi(g,h) = ghg^{-1}$. Dies ist ein Morphismus:

$$\varphi : G \times G \xrightarrow{\mu\times(\iota\circ p_1)} G \times G \xrightarrow{\quad\mu\quad} G.$$

Diese Komposition bildet (g,h) auf $(g,h) \mapsto (gh, g^{-1}) \to ghg^{-1}$. Wir setzen $X = Y = Z = G$. Dann sind X und Y irreduzibel, X ist projektiv und Z ist separabel (weil projektive). Es gilt für $y_0 = e_G$: $\varphi(g, e_G) = e_G$ für alle $g \in G$. Daraus folgt, dass es für alle $h \in G$ ein $f \in G$ gibt mit $\varphi(G \times \{h\}) = \{f\}$. Es gilt aber $\varphi(e_G, h) = h$ also gilt $f = h$ und für alle $g \in G$ gilt $\varphi(g,h) = h$ also $ghg^{-1} = h$ und $gh = hg$. Die Gruppe ist abelsch. ∎

Definition 14.2.4 Eine irreduzible projektive algebraische Gruppe heißt **abelsche Varietät**.

Proposition 14.2.5 Seien G und H zwei abelsche Varietäten und sei $\varphi : G \to H$ ein Morphismus. Dann gibt es ein $h \in H$ so, dass der Morphismus $\psi : G \to H$ definiert durch

$$\psi(g) = h \cdot \varphi(g)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Beweis. Wenn die Aussage wahr ist gilt $e_H = \psi(e_G) = h\varphi(e_G)$ also $h = \varphi(e_G)^{-1}$. Sei jetzt $\psi : G \to H$ definiert durch

$$\psi(g) = \varphi(e_G)^{-1}\varphi(g).$$

Dies ist ein Morphismus mit $\psi(e_G) = e_H$. Sei jetzt $\Psi : G \times G \to H$ definiert durch

$$\Psi(g, g') = \psi(gg')\psi(g)^{-1}\psi(g')^{-1}.$$

Es gilt $\Psi(G \times \{e_G\}) = \{e_H\}$. Nach dem Rigiditätslemma gibt es für jedes $g' \in G$ ein $h' \in H$ mit $\Psi(G \times \{g'\}) = \{h'\}$. Es gilt aber $\Psi(e_G, g') = e_H$ also $h' = e_H$ und $\Psi(g, g') = e_H$ für alle $g, g' \in G$. Insbesondere gilt $\psi(gg') = \psi(g)\psi(g')$ und ψ ist ein Gruppenhomomorphismus. ∎

Definition 14.2.6 Eine abelsche Varietät der Dimension 1 heißt **elliptische Kurve**.

Beispiel 14.2.7 Alle reguläre Kubiken $V_{\mathbb{P}}(F)$ in $\mathbb{P}_2(\mathsf{k})$, wobei F homogen von Grad 3 ist und $V_{\mathbb{P}}(F)$ regulär ist sind elliptische Kurven.

Alle elliptische Kurven können so dargestellt werden. Dass es eine Gruppenstrukture auf einer Kubik C gibt, haben wir im Seminar gezeigt. Man wählt $O \in C$ und für $P, Q \in C$ setzt man $\Phi(P,Q) = R$ so, dass P, Q, R die drei Punkten auf $C \cap (PQ)$ sind. Dann ist $P + Q$ als

$$P + Q = \Phi(O, \Phi(P,Q))$$

definiert. Dies induziert eine Gruppenstruktur. Wähl man für O einen Wendepunkte $i.e$ einen Punkt so, dass $L \cap C = \{O\}$ gilt (mit Vielfachheit 3) für L die Tangentgerade von C bei O, so gilt

$$P + Q + R = 0 \Leftrightarrow P,\ Q \text{ und } R \text{ liegen auf einer Gerade.}$$

Falls P ein weiterer Wendepunkt ist folgt also $3P = O$.

Elliptische Kurven mit $\mathsf{k} = \mathbb{C}$ sind die Riemansche Flächen der Geschlecht 1. Diese Kurven können auch als Quotient $\mathbb{C}/\,\Gamma$, wobei Γ ein Gitter ist also der Form $\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ mit (e_1, e_2) eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$. Die Gruppenstrutur ist dann dank der Addition auf $\mathbb{C}$ definiert: $[z] + [z'] = [z + z']$. Dass dieses Quotient sich als Kubik in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ einbetten lässt, zeigt man dank der Weierstraß Funktion $\wp$ und ihre ableitung $\wp'$.

Index