Théorème de Lyapunov

Mon développement

On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\|.\|$ la norme associée, ainsi qu'une norme sur $\mathbb{C}^n$.

Théorème (Lyapunov). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $f(0) = 0$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$. On considère le système différentiel

$$(S) \; : \; \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases} .$$

Si $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors 0 est un point d'équilibre attractif du système différentiel. Plus précisément, si x est assez proche de 0, alors la solution $y(t)$ du système tend vers 0 à vitesse exponentielle quand $t \to +\infty$.

On note $A = Df(0)$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ le spectre de A et pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, m_j la multiplicité de λ_j. Par hypothèse, il existe $a > 0$ tel que

$$\forall j \in [\![1, k]\!], \; \operatorname{Re} \lambda_j < -a \,. \tag{1}$$

• On commence par considérer le système linéarisé de (S) au voisinage de 0, c'est-à-dire

$$\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = x \end{cases} .$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on sait qu'il admet une unique solution maximale, que celle-ci est $z : t \mapsto e^{tA}x$ et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$. On va montrer que $z(t)$ tend vers 0 à vitesse exponentielle quand $t \to +\infty$.

D'après le théorème de décomposition des noyaux, on a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{k} \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I_n)^{m_j} \,.$$

On note $x = \sum_{j=1}^{k} x_j$ la décomposition de x associée.
Soit $j \in [\![1, k]\!]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{tA}x_j = e^{t\lambda_j} e^{t(A - \lambda_j I_n)} x_j = e^{t\lambda_j} \left(\sum_{0 \le p \le m_j} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I_n)^p \right) x_j$$

donc il existe $c_j > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|e^{tA}x_j\| \le c_j e^{t \operatorname{Re} \lambda_j} (1 + |t|)^{m_j - 1} \|x_j\| \,.$$

En notant $c = \max(c_1, \dots, c_k)$, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|e^{tA}x\| \le \sum_{j=1}^{k} c_j e^{t \operatorname{Re} \lambda_j} (1 + |t|)^{m_j - 1} \|x_j\| \le c(1 + |t|)^{n-1} \max_{1 \le j \le k} \|x_j\| . \sum_{j=1}^{k} e^{t \operatorname{Re} \lambda_j} \,.$$

Par équivalence des normes sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, il existe donc un polynôme P tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|e^{tA}x\| \leq P(|t|) \sum_{j=1}^{k} e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_j} \|x\| \,. \tag{2}$$

Or, d'après (1), pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $P(|t|)e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_j} e^{at}$ tend donc vers 0 quand $t \to +\infty$. Il existe donc $M_j > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$,

$$P(|t|)e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_j} e^{at} \leq M_j \,.$$

En notant $M = \sum_{j=1}^{k} M_j$ et en utilisant (2), on a donc, pour tout $t \geq 0$,

$$\|z(t)\| \leq Me^{-at}\|x\| \,. \tag{3}$$

L'origine est donc un point d'équilibre attractif du système linéarisé et $z(t)$ tend vers 0 à vitesse exponentielle quand $t \to +\infty$.

• Avant de revenir au système (S), on va introduire quelques outils.
Soit l'application $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$b(u, v) = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}u, e^{tA}v\rangle \, dt \,.$$

Cette application est bien définie puisque, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\langle ., . \rangle$ et (3), pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \geq 0$, on a $|\langle e^{tA}u, e^{tA}v\rangle| \leq M^2e^{-2at}\|u\|.\|v\|$ et la fonction $t \mapsto e^{-2at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
b est clairement une forme bilinéaire symétrique positive. De plus, soit $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $b(u, u) = 0$. On a $\int_0^{+\infty} \|e^{tA}u\|^2 \, dt = 0$ donc, par continuité de la fonction $t \mapsto \|e^{tA}u\|^2$, pour tout $t \geq 0$, on a $e^{tA}u = 0$, donc en particulier pour $t = 0$, on a $u = 0$.
b est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On note q la forme quadratique associée à b.
Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $q(u + tv) = q(u) + 2tb(u, v) + t^2q(v)$, donc

$$Dq(u)(v) = \left(\frac{d}{dt} q(u + tv)\right)\Big|_{t=0} = 2b(u, v) \,.$$

On a donc en particulier, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,

$$Dq(u)(Au) = 2b(u, Au) = \int_0^{+\infty} 2\langle e^{tA}u, e^{tA}Au\rangle \, dt = \left[\|e^{tA}u\|^2\right]_0^{+\infty} = 0 - \|u\|^2 \tag{4}$$

en utilisant (3) pour obtenir la dernière égalité.
Enfin, par équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$, il existe $C, C' > 0$ tels que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,

$$Cq(u) \leq \|u\|^2 \leq C'q(u) \,. \tag{5}$$

• On revient maintenant au système (S), qui admet une unique solution maximale y d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. On note $]T_*, T^*[$ l'intervalle de définition de y (qui contient 0) et on note $r(u) = f(u) - Au$.
Pour tout $t \in [0, T^*[$, on a

$$(q(y))'(t) = Dq(y(t))(y'(t)) = 2b(y(t), y'(t)) = 2b(y(t), Ay(t)) + 2b(y(t), r(y(t)))$$

donc, en utilisant (4),

$$(q(y))'(t) = -\|y(t)\|^2 + 2b(y(t), r(y(t)))$$

Or, d'après (5), on a

$$-\|y(t)\|^2 \leq -Cq(y(t))$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour b, on a

$$|b(y(t), r(y(t)))| \leq \sqrt{q(y(t))}\sqrt{q(r(y(t)))}\,.$$

De plus, $r(u) = f(u) - f(0) - Df(0)(u)$ donc, par définition de la différentielle à l'aide de la norme $\sqrt{q}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $q(u) \leq \alpha$, on a $\sqrt{q(r(u))} \leq \frac{C}{4}\sqrt{q(u)}$, donc

$$|b(u, r(u))| \leq \frac{C}{4}q(u)\,.$$

Pour tout $t \in [0, T^*[$, en combinant les trois relations ci-dessus, on a donc

$$q(y(t)) \leq \alpha \;\Rightarrow\; (q(y))'(t) \leq -\frac{C}{2}q(y(t))\,. \tag{6}$$

On suppose que $\|x\| < \sqrt{\alpha C}$. On a alors $q(x) < \alpha$. Cela implique que pour tout $t \in [0, T^*[$, on a $q(y(t)) \leq \alpha$.
En effet, s'il existe $t \in [0, T^*[$ tel que $q(y(t)) > \alpha$, alors,

$$t_0 = \min\{t \in [0, T^*[\mid q(y(t)) = \alpha\}$$

est défini par continuité de $q(y)$ et, d'après (6), on a $(q(y))'(t_0) \leq -\frac{C}{2}q(y(t_0)) = -\frac{C}{2}\alpha < 0$. La fonction continue $q(y)$ est donc strictement supérieure à α sur un intervalle de la forme $]t_0 - \tau, t_0]$, ce qui contredit la minimalité de t_0.
D'après (6), on a donc $(q(y))'(t) \leq -\frac{C}{2}q(y(t))$ pour tout $t \in [0, T^*[$.
La fonction dérivable $t \mapsto q(y(t))e^{Ct/2}$ a alors une dérivée négative, elle est donc décroissante.
Pour tout $t \in [0, T^*[$, on a donc $q(y(t)) \leq e^{-Ct/2}q(x)$, d'où

$$\|y(t)\| \leq M'e^{-\beta t}\|x\|$$

d'après (5), en notant $M' = \sqrt{\frac{C'}{C}}$ et $\beta = \frac{C}{4}$.
D'après le lemme des bouts, on a donc $T^* = +\infty$ et pour tout $t \geq 0$, $\|y(t)\| \leq M'e^{-\beta t}\|x\|$.
Finalement, on a bien montré que si x est assez proche de 0, alors $y(t)$ tend vers 0 à vitesse exponentielle quand $t \to +\infty$. □

Références

J'ai utilisé [Rou09, p. 138]. On peut aussi consulter [HW99, p. 359], [ZQ07, p. 388], [Dem06, pp. 282-287].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 127, 221. On peut également l'utiliser pour les leçons 148, 220.

Remarques

- Le théorème de décomposition en sous-espaces caractéristiques, utilisé au début du développement, est assez classique, voir [Gou09, pp. 175, 192] par exemple.
- La partie d'algèbre linéaire permettant l'étude du système linéarisé peut être modifiée, voir [HW99, p. 359] par exemple.
- Le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est plus simple, c'est celui qui est traité dans [HW99].
- En fonction de la leçon dans laquelle on se situe, il faut développer certains points plus que d'autres.
- Une fonction de Lyapunov pour le système est une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s'annulant en 0, strictement positive sur un voisinage épointé de 0, telle que la « dérivée » $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$ est négative sur un voisinage épointé de 0. Le second théorème de Lyapunov affirme que l'origine est stable si et seulement si le système admet une fonction de Lyapunov. De plus, l'origine est asymptotiquement stable si et seulement si il existe une fonction de Lyapunov V telle que $\dot{V}(x) < 0$ sur un voisinage épointé de 0.

Questions possibles

1. Énoncer le lemme des bouts.
2. Quelles modifications peut-on apporter à la démonstration si on suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$?
3. Étudier la stabilité du système différentiel
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -y - x(x^2+y^2) \\ y' & = & x - y(x^2+y^2) \end{array} \right. .$$
4. Démontrer le second théorème de Lyapunov.

Références

[Dem06] Jean-Pierre Demailly : *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP Sciences, 2006.

[Gou09] Xavier Gourdon : *Algèbre.* Ellipses, 2009.

[HW99] John Hubbard et Beverly West : *Équations différentielles et systèmes dynamiques.* Cassini, 1999.

[Rou09] François Rouvière : *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, 2009.

[ZQ07] Claude Zuily et Hervé Queffélec : *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.