Théorème de Banach-Steinhaus

Mon développement

Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé. On munit l'ensemble $\mathcal{L}_c(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F de la norme $\|.\| : f \mapsto \sup\limits_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$.

Théorème (Banach-Steinhaus). Soit $A \subset \mathcal{L}_c(E,F)$. Alors,
– soit l'ensemble $\{\|f\|,\ f \in A\}$ est borné,
– soit il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{G}$, $\sup_{f\in A} \|f(x)\|_F = +\infty$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On note

$$\Omega_k = \left\{ x \in E \mid \sup_{f\in A} \|f(x)\|_F > k \right\} .$$

L'ensemble Ω_k est ouvert. En effet, soit $x_0 \in \Omega_k$. Il existe $f \in A$ tel que $\|f(x_0)\|_F > k$. f étant continue, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0,\rho)$, $\|f(x)\|_F > k$, donc $B(x_0,\rho) \subset \Omega_k$.

– Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, Ω_k est dense dans E, alors, d'après le théorème de Baire,

$$\mathcal{G} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$$

est un G_δ dense dans E. De plus, pour tout $x \in \mathcal{G}$, on a $\sup_{f\in A} \|f(x)\|_F = +\infty$.

– S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que Ω_k n'est pas dense dans E, alors il existe $x_0 \in E$ et $\rho > 0$ tels que $\Omega_k \cap B(x_0,\rho)$ est vide. Cela signifie que pour tout $f \in A$ et tout $x \in B(x_0,\rho)$, on a $\|f(x)\|_F \leq k$. Ainsi, pour tous $f \in A$ et tout $x \in B(0,1)$, on a

$$\|f(x)\|_F = \left\| f\left(\frac{\rho x + x_0}{\rho} - \frac{x_0}{\rho} \right) \right\|_F \leq \frac{1}{\rho}\|f(\rho x + x_0)\|_F + \frac{1}{\rho}\|f(x_0)\|_F \leq \frac{2k}{\rho} .$$

Par continuité de f, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1$, on a $\|f(x)\|_F \leq \frac{2k}{\rho}$. L'ensemble $\{\|f\|,\ f \in A\}$ est donc borné.

Finalement, on a obtenu la dichotomie annoncée. □

On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques. On munit cet ensemble de la norme $\|.\|_\infty : f \mapsto \sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$.

Application. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ de fonctions de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ dont la série de Fourier diverge en 0.

Dans cette démonstration, on utilise les notations usuelles sur les séries de Fourier : on note $c_k(f)$ le k-ième coefficient de Fourier d'une fonction f et D_n le noyau de Dirichlet d'ordre n.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On note

$$L_N : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0_{2\pi} & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) \end{array} .$$

D'abord, L_N est clairement une forme linéaire. De plus, pour tout $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on a

$$\begin{aligned}
|L_N(f)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-N}^{N} f(t)e^{-ikt}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}f(t)\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(t)|\,dt.\|f\|_\infty
\end{aligned}$$

donc L_N est continue et $\|L_N\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(t)|\,dt$.

Il y a même égalité. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on note

$$f_\varepsilon : t \mapsto \frac{D_N(t)}{|D_N(t)|+\varepsilon}\,.$$

On a clairement $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$. De plus, d'après le théorème de Beppo-Levi, quand $\varepsilon \to 0$,

$$L_N(f_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{D_N(t)^2}{|D_N(t)|+\varepsilon}\,dt$$

tend vers $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(t)|\,dt$.
On a donc

$$\|L_N\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(t)|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right|\,dt\,.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$ et en effectuant le changement de variables $u = \frac{2N+1}{2}t$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|L_N\| &\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin((2N+1)t/2)}{t/2}\right|\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{(2N+1)\pi/2}\left|\frac{\sin(u)}{u}\right|\,du \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\frac{\sin(u)}{u}\right|\,du \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin(u)|}{k\pi}\,du \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{2}{k\pi} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

donc $\|L_N\|$ tend vers $+\infty$ quand $N \to +\infty$. Comme $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ est complet (fermé dans l'espace complet des applications bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$), d'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe un G_δ dense $\mathcal{G}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{G}$, on a $\sup_{N\in\mathbb{N}}|L_N(f)| = +\infty$. Autrement dit, pour tout $f \in \mathcal{G}$, la série de Fourier de f diverge en 0. □

Références

J'ai utilisé [Gou08, pp. 404, 405]. On peut aussi consulter [ZQ07, p. 200], [FGN10, p. 148].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 208, 246. On peut également l'utiliser pour les leçons 201, 205.

Remarques

- On a ici appelé G_δ une intersection dénombrable d'ouverts.
- Le théorème de Banach-Steinhaus repose sur le théorème de Baire, il faut donc mentionner celui-ci dans le plan. De plus, il ne faut pas proposer au jury ces deux développements dans la même leçon.
- La série de Fourier de la fonction continue, paire, 2π-périodique, définie par

$$\forall x \in [0,\pi],\ f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right)$$

diverge en 0, voir [Gou08, p. 264].
- Une autre application du théorème de Banach-Steinhaus est la suivante. Pour une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, on note

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}(f(a)+f(b)) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

la n-ième somme des trapèzes de f. Il est assez classique de montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{C})$, $\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f)\right|$ est dominée par une quantité d'ordre $\frac{1}{n^2}$. Le théorème de Banach-Steinhaus permet de montrer qu'il existe des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$ ne vérifiant pas cette propriété.

Questions possibles

1. Énoncer le théorème de Baire.
2. Donner un exemple de fonction de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ dont la série de Fourier diverge en 0.
3. Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}_c(E,F)$ convergeant simplement vers une fonction $f : E \to F$. Montrer que $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$.
4. Soient E un espace de Banach et F, G des espaces vectoriels normés. Montrer qu'une application bilinéaire $B : E \times F \to G$ dont les applications partielles sont continues est continue.
5. Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé, B une partie totale de E et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}, T$ des éléments de $\mathcal{L}_c(E,F)$. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers T sur E si et seulement si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers T sur B et $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$.
6. Montrer qu'une série complexe est absolument convergente si et seulement si son produit de Cauchy avec toute série convergente est une série convergente.
7. Le théorème de Banach-Steinhaus est-il valable dans des espaces plus généraux ?
8. Démontrer l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$ et traiter les cas d'égalité. Existe-t-il une inégalité de la forme $a|x| \leq |\sin x|$?

9. Soient E un ensemble et F un espace complet. Montrer que l'ensemble des applications bornées de E dans F est complet.
10. Quel est le rôle du noyau de Dirichlet dans la théorie des séries de Fourier ?

Références

[FGN10] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Analyse 3.* Cassini, 2010.

[Gou08] Xavier Gourdon : *Analyse.* Ellipses, 2008.

[ZQ07] Claude Zuily et Hervé Queffélec : *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.