Ellipsoïde de John-Loewner

Mon développement

On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Lemme. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}$. On a

$$\det\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \geq \sqrt{\det(A)\det(B)}$$

et il y a égalité si et seulement si $A = B$.

D'après le théorème de pseudo-réduction simultanée des formes quadratiques et comme A et B sont définies positives, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $A = {}^t PP$ et $B = {}^t PDP$, où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Les λ_i sont strictement positifs car B est définie positive.

On a alors

$$\det(A)\det(B) = (\det P)^4 \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

et

$$\det\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + 1}{2}$$

donc, par stricte convexité de la fonction ln, on a

$$\begin{aligned} \ln\left(\det\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)\right) &= 2\ln|\det P| + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\lambda_i + 1}{2}\right) \\ &\geq 2\ln|\det P| + \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(\lambda_i) + \ln(1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(\det(A)\det(B)) \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 1$.

Le lemme est ainsi démontré. $\square$

Dans la suite, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On peut munir E d'une norme (à l'aide de la bijection naturelle entre E et $\mathbb{R}^n$). On note $\|.\|$ cette norme et pour tous $a \in E$ et $r \geq 0$, on note

$$B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}.$$

De plus, on appelle ellipsoïde de E centré en 0 un ensemble de la forme

$$\mathcal{E}_q = \{x \in E \mid q(x) \leq 1\}$$

où q est une forme quadratique définie positive sur E.
Par ailleurs, soit q une forme quadratique définie positive. Il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ non nuls tels que pour tout $x \in E$, $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.
On peut alors définir le volume de $\mathcal{E}_q$ par

$$V_q = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{a_1x_1^2+\ldots+a_nx_n^2\leq 1} \; dx_1 \dots dx_n \,.$$

D'après la formule de changement de variables, on a

$$V_q = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{t_1^2+\ldots+t_n^2\leq 1} \; \frac{dt_1 \dots dt_n}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} = \frac{V_0}{\sqrt{\det q}} \tag{1}$$

où V_0 est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne canonique. On remarque que le volume V_q ne dépend pas de la base de E choisie mais uniquement de q.

Proposition. Soit K un compact de E d'intérieur non vide. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0, contenant K et de volume minimal.

On munit l'espace vectoriel Q des formes quadratiques sur E de la norme

$$N : q \mapsto \sup_{\|x\|\leq 1} |q(x)| \,,$$

on note ensuite Q^+, resp. Q^{++}, l'ensemble des formes quadratiques positives, resp. définies positives, sur E et

$$\mathcal{A} = \{q \in Q^+ \mid \forall x \in K,\ q(x) \leq 1\} \,,$$

de sorte que $\mathcal{A} \cap Q^{++} = \{q \in Q^{++} \mid \mathcal{E}_q \subset K\}$.

$\mathcal{A}$ est clairement convexe (on rappelle que Q^+ est convexe).

$\mathcal{A}$ est fermé. En effet, soit $(q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ convergeant dans Q de limite notée q. On a

$$\forall x \in E,\ \forall p \in \mathbb{N},\ |q_p(x) - q(x)| \leq N(q_p - q)\|x\|^2$$

donc pour tout $x \in E$, $q_p(x)$ tend vers $q(x)$ quand $p \to +\infty$.
On en déduit facilement que q appartient à $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ est borné. En effet, K est d'intérieur non vide donc il existe $a \in E$ et $r > 0$ tels que $B(a, r) \subset K$. Soit $q \in \mathcal{A}$. Pour tout $x \in B(0, r)$, $a + x$ et a appartiennent à K donc $q(a + x) \leq 1$ et $q(-a) = q(a) \leq 1$. D'après l'inégalité de Minkowski, on a donc

$$\sqrt{q(x)} \leq \sqrt{q(x + a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2$$

donc $q(x) \leq 4$. On en déduit que $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$.

Enfin, $\mathcal{A}$ est non vide. En effet, K est compact donc il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0, M)$. La forme quadratique $x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ est donc un élément de $\mathcal{A}$.

Finalement, $\mathcal{A}$ est un fermé borné convexe non vide de Q. En particulier, c'est un compact (car Q est de dimension finie). La fonction $q \mapsto \sqrt{\det q}$ étant continue sur $\mathcal{A}$, elle y atteint son maximum en un point noté q_0. q_0 est de plus définie positive, car

$$\sqrt{\det q_0} \geq \sqrt{\det\left(x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}\right)} = \frac{1}{M^n} > 0\,.$$

Ainsi, $\mathcal{E}_{q_0}$ est un ellipsoïde centré en 0, contenant K (puisque $q_0 \in \mathcal{A} \cap Q^{++}$), et d'après (1), son volume est minimal parmi les ellipsoïdes centrés en 0 contenant K.
Cela prouve donc l'existence de l'ellipsoïde recherché.

De plus, soit $q \in Q^{++}$ tel que $\mathcal{E}_q$ est un ellipsoïde centré en 0, contenant K et de même volume que $\mathcal{E}_{q_0}$. En particulier, $q \in \mathcal{A}$ donc, par convexité de $\mathcal{A}$, $\frac{1}{2}(q+q_0)$ appartient aussi à $\mathcal{A}$. En notant S et S_0 les matrices de q et q_0 dans une même base orthonormée de E, d'après le lemme, on a

$$\sqrt{\det\left(\frac{1}{2}(q+q_0)\right)} = \sqrt{\det\left(\frac{1}{2}(S+S_0)\right)} \geq \sqrt{(\det(S)\det(S_0))^{1/2}} = \sqrt{(\det(q)\det(q_0))^{1/2}} = \sqrt{\det q_0}$$

avec égalité si et seulement si $S = S_0$, c'est-à-dire $q = q_0$. Par maximalité de q_0, on en déduit que $q = q_0$.
Cela montre l'unicité. $\square$

Application. Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$. Il existe une forme quadratique définie positive q telle que $G \subset O(q)$.

Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$. L'ensemble

$$K = \bigcup_{g \in G} g(B(0,1))$$

est l'image du compact $G \times B(0,1)$ par l'application continue $(g,x) \mapsto g(x)$, c'est donc un compact de E. De plus, il est d'intérieur non vide car il contient $B(0,1)$.
D'après la proposition précédente, il existe une unique forme quadratique définie positive q telle que $\mathcal{E}_q$ soit de volume minimal parmi les ellipsoïdes de E centrés en 0 contenant K.

Soit $g \in G$. La forme quadratique $q_g : x \mapsto q(g(x))$ est définie positive. De plus, $g(K) = K$ donc l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{q_g}$ contient K.
De plus, l'application det est continue sur le compact G, donc elle est bornée sur G. En particulier, elle est bornée sur

$$\langle g \rangle = \{g^n,\ n \in \mathbb{Z}\}\,,$$

le sous-groupe de $GL(E)$ engendré par g. On en déduit que $|\det g| = 1$ (en distinguant les cas où $\langle g \rangle$ est fini ou infini). Donc $\det(q_g) = \det(q)$, donc $\mathcal{E}_{q_g}$ et $\mathcal{E}_q$ ont le même volume.
Par unicité de $\mathcal{E}_q$, on en déduit que $q_g = q$, ce qui signifie que $g \in O(q)$.
On a donc montré que $G \subset O(q)$. $\square$

Références

J'ai utilisé [FGN10, pp. 222, 229, 231], [Ale99, p. 142]. On peut aussi consulter [Ber90, p. 61], [Lei99, p. 386].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 131, 133, 148, 219. On peut également l'utiliser pour les leçons 106, 123, 130.

Remarques

- Ce développement est l'un des plus classiques à l'agrégation. Il faut donc être au point si on le présente et connaître au moins une de ses applications.
- Ce développement est en lien avec beaucoup de leçons mais il faut éviter de vouloir le présenter dans un maximum de leçons à tout prix car cela peut agacer le jury. En particulier, avec le recul, il semble peu adapté aux leçons 133, 137, 203 et 253, où il y a de bien meilleures choses à faire.
- Lors de la présentation orale, si on souhaite présenter l'application, il vaut mieux passer la démonstration du lemme en précisant simplement les deux arguments principaux, ou écourter le passage entre le lemme et la proposition.
- Pour le théorème de pseudo-réduction simultanée des formes quadratiques, voir [Gou09, p. 245] par exemple.
- On rappelle que le déterminant de q est le déterminant de la matrice de q dans n'importe quelle base orthonormée de E, ce déterminant ne dépendant pas de la base orthonormée choisie.
- Quand on parle de l'ellipsoïde de volume minimal, cela signifie que parmi les ellipsoïdes centrés en 0 contenant K, on considère celui qui a le volume minimal.
- Il existe d'autres démonstrations de l'application, voir notamment [Ale99, p. 141].
- Pour des problèmes d'extrémalité et de compacité dans le groupe linéaire, on pourra consulter notamment [FGN10, pp. 228, 231], [Ale99, p. 141], [MT86, p. 73].
- Il existe également un ellipsoïde de volume maximal inclus dans K, et on peut même montrer que l'image par l'homothétie de rapport $\sqrt{n}$ de celui-ci est un ellipsoïde contenant K. Voir [Ber90, exercice 11.9.24].

Questions possibles

1. Énoncer le théorème de pseudo-réduction simultanée des formes quadratiques (ou des matrices symétriques).
2. Existe-t-il x tel que $q_0(x) = 1$?
3. Que se passe-t-il si le compact est d'intérieur vide ?
4. Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique ellipsoïde de volume maximal inclus dans K. La preuve est-elle très différente ?
5. Dans le plan euclidien, quel est le volume de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?
6. Concrètement, pour un triangle isorectangle rempli dans le plan, déterminer l'ellipsoïde de volume minimal qui le contient. Même question pour un carré et un rectangle.
7. Citer d'autres méthodes de démonstrations de la caractérisation des sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ que l'ellipsoïde de John-Loewner.
8. Montrer que pour tout sous-groupe fini G de $GL(E)$, il existe $q \in Q^{++}$ telle que $G \subset O(q)$.
9. Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ et soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ stable par G. Montrer que F admet un supplémentaire dans $\mathbb{R}^n$ stable par G.

10. Soit une norme telle que les isométries opèrent transitivement sur la boule unité. Montrer que la norme est euclidienne.

Voici d'autres questions possibles si on utilise une démonstration avec un point fixe :

11. Que signifie « la norme est strictement convexe » ?
12. Peut-on généraliser le résultat de point fixe au cas de la dimension infinie (pour un convexe compact d'un espace de Hilbert par exemple) ?

Références

[Ale99] Michel Alessandri : *Thèmes de géométrie : groupes en situation géométrique.* Dunod, 1999.

[Ber90] Marcel Berger : *Géométrie 2.* Nathan, 1990.

[FGN10] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 3.* Cassini, 2010.

[Gou09] Xavier Gourdon : *Algèbre.* Ellipses, 2009.

[Lei99] Éric Leichtnam : *Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des E.N.S. - Tome Algèbre et Géométrie.* Ellipses, 1999.

[MT86] Rached Mneimné et Frédéric Testard : *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.* Hermann, 1986.