# Décomposition de Bruhat

## Mon développement

Dans ce développement, $K$ est un corps, $T_n(K)$ désigne le sous-groupe de $GL_n(K)$ constitué des matrices triangulaires supérieures inversibles et $P_\sigma$ désigne la matrice d'une permutation $\sigma$. De plus, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts et tout $\lambda \in K$, on note

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \lambda \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que multiplier une matrice par $T_{i,j}(\lambda)$ à gauche (resp. $T_{i,j}(\lambda)$ à droite, $D_i(\lambda)$ à gauche, $D_i(\lambda)$ à droite) revient à effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $C_i \leftarrow \lambda C_i$) sur cette matrice. On remarque enfin que $T_{i,j}(\lambda)$ appartient à $T_n(K)$ pour tous $i < j$ et tout $\lambda \in K$, tout comme $D_i(\lambda)$ pour tout $i$ et tout $\lambda \in K^*$.

**Théorème.** On a
$$GL_n(K) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_n(K).P_\sigma.T_n(K).$$

Soit $A \in GL_n(K)$. En effectuant des opérations élémentaires sur $A$, on va construire une matrice de permutation $P_\sigma$ qui est équivalente à $A$.

- On note $A = (a^0_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Soient $i_1 = \max\{k \in [\![1, n]\!] \mid a^0_{k,1} \neq 0\}$ et

$$A_1 = D_{i_1}\left(\frac{1}{a^0_{i_1,1}}\right) . \prod_{j=1}^{i_1-1} T_{j,i_1}\left(-\frac{a^0_{j,1}}{a^0_{i_1,1}}\right) .A. \prod_{j=2}^{n} T_{1,j}\left(-\frac{a^0_{i_1,j}}{a^0_{i_1,1}}\right).$$

Cela revient à effectuer successivement sur la matrice $A$ les opérations élémentaires $L_j \leftarrow L_j - \frac{a^0_{j,1}}{a^0_{i_1,1}} L_{i_1}$ pour $j < i_1$, puis $L_{i_1} \leftarrow \frac{1}{a^0_{i_1,1}} L_{i_1}$, puis $C_j \leftarrow C_j - \frac{a^0_{i_1,j}}{a^0_{i_1,1}} C_1$ pour $j \geq 2$. Par construction, la matrice $A_1$ est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ \vdots & & & * & & \\ 0 & & & & & \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & * & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}.$$

• On suppose maintenant que pour un entier $l \in [\![1, n-1]\!]$ donné, on a construit $l$ entiers distincts $i_1, \ldots, i_l \in [\![1, n]\!]$ et une matrice $A_l = (a^l_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & * & & & \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & & & & & & & \\ 0 & \vdots & \vdots & & & & * & & & \\ 1 & \vdots & \vdots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & & & & * & & & \\ \vdots & 1 & \vdots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & * & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Soient $i_{l+1} = \max\{k \in [\![1, n]\!] \mid a^l_{k,l+1} \neq 0\}$ et

$$A_{l+1} = D_{i_{l+1}}\left(\frac{1}{a^l_{i_{l+1},l+1}}\right). \prod_{j=1}^{i_{l+1}-1} T_{j,i_{l+1}}\left(-\frac{a^l_{j,l+1}}{a^l_{i_{l+1},l+1}}\right).A_l. \prod_{j=l+2}^{n} T_{l+1,j}\left(-\frac{a^l_{i_{l+1},j}}{a^l_{i_{l+1},l+1}}\right).$$

On a $i_{l+1} \notin \{i_1, \ldots, i_l\}$ puisque par construction, $a^l_{i_1,l+1} = \ldots = a^l_{i_l,l+1} = 0$. De plus, $A_{l+1}$ est de la forme souhaitée, car les lignes $L_{i_1}, \ldots, L_{i_l}$ et les colonnes $C_1, \ldots, C_l$ sont celles de $A_l$.

Par récurrence, on a donc construit des entiers distincts $i_1, \ldots, i_n \in [\![1, n]\!]$ et une matrice $A_n$ de la forme $A_n = T_1 A T_2$ où $T_1, T_2 \in T_n(K)$. En notant $\sigma : k \mapsto i_k$, on a de plus $A_n = P_\sigma$, donc $A = T_1^{-1} P_\sigma T_2^{-1}$.

On a ainsi démontré que

$$GL_n(K) \subset \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_n(K).P_\sigma.T_n(K).$$

L'autre inclusion étant évidente, on a égalité. On va maintenant démontrer que l'union est disjointe.

On suppose qu'il existe $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ et $T_1, T_2, U_1, U_2 \in T_n(K)$ tels que $T_1 P_\sigma T_2 = U_1 P_\tau U_2$. Alors, en notant $T = U_1^{-1} T_1$ et $U = U_2 T_2^{-1}$, on a $TP_\sigma = P_\tau U$.
Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la $k$-ième colonne de $TP_\sigma$ (resp. la $k$-ième ligne de $P_\tau U$) est la $\sigma(k)$-ième colonne de $T$ (resp. la $\tau^{-1}(k)$-ième ligne de $U$). Puisque $T$ et $U$ appartiennent à $T_n(K)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a donc

$$(TP_\sigma)_{\sigma(k)+1,k} = T_{\sigma(k)+1,\sigma(k)} = 0, \; \ldots, \; (TP_\sigma)_{n,k} = 0, \; (TP_\sigma)_{\tau(k),k} = (P_\tau U)_{\tau(k),k} = U_{k,k} \neq 0,$$

donc $\tau(k) \leq \sigma(k)$.
Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on en déduit que $\sigma = \tau$.

Finalement, la décomposition annoncée est démontrée. □

Dans la suite du développement, $E$ désigne un $K$-espace vectoriel de dimension $n$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux sur $E$. On rappelle qu'un drapeau de $E$ est une suite $(F_0, \ldots, F_n)$ de sous-espaces vectoriels de $E$ telle que pour tout $k$, $\dim(F_k) = k$ et $F_k \subset F_{k+1}$.

**Application.** L'action de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{D}$ est transitive et l'action de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ possède $n!$ orbites.

Le groupe $GL(E)$ agit sur $\mathcal{D}$ via $(u,(F_0,\dots,F_n)) \mapsto (u(F_0),\dots,u(F_n))$, qui est bien à valeurs dans $\mathcal{D}$. Cette action induit naturellement une action de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{D}$, et donc aussi une action de $GL_n(K)$ sur l'ensemble des couples de drapeaux.

On commence par montrer que l'action de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{D}$ est transitive. On note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $E$ et

$$\delta = (\{0\}, \mathrm{Vect}(e_1), \mathrm{Vect}(e_1,e_2),\dots,E)$$

le drapeau associé.

Soit $d=(F_0,\dots,F_n)\in\mathcal{D}$.
Par le théorème de la base incomplète appliqué $n-1$ fois, il existe une base $(f_1,\dots,f_n)$ de $E$ telle que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $(f_1,\dots,f_i)$ est une base de $F_i$. L'application linéaire $u$ définie par : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $u(e_i)=f_i$, est alors inversible et vérifie $u.\delta=d$.
Cela prouve que l'action de $GL(E)$ sur $\mathcal{D}$ est transitive. On en déduit que l'action induite de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{D}$ est également transitive.

En outre, le quotient $GL_n(K)/\mathrm{Stab}(\delta)$ est en bijection avec l'orbite de $\delta$, donc avec $\mathcal{D}$ d'après ce qui précède. De plus, on vérifie facilement que pour $A\in GL_n(K)$, on a $A.\delta=\delta$ si et seulement si $A\in T_n(K)$. On a donc $\mathrm{Stab}(\delta)=T_n(K)$. On a ainsi démontré que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} GL_n(K)/T_n(K) & \to & \mathcal{D} \\ \overline{B} & \mapsto & B.\delta \end{array}$$

est bien définie et bijective.
Cette bijection est de plus compatible avec l'action de $GL_n(K)$ sur le quotient $GL_n(K)/T_n(K)$ par translation à gauche, c'est-à-dire l'action $(A,\overline{X})\mapsto\overline{AX}$. En effet, soient $A,B\in GL_n(K)$, on a

$$\varphi(A.\overline{B}) = \varphi(\overline{AB}) = (AB).\delta = A.(B.\delta) = A.\varphi(\overline{B})\,.$$

Ainsi, étudier l'action de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ revient à étudier l'action de $GL_n(K)$ sur $(GL_n(K)/T_n(K))^2$. On va compter le nombre d'orbites pour cette action.

Soient $X,Y\in GL_n(K)$. Par le théorème de décomposition de Bruhat, il existe $T_1,T_2\in T_n(K)$ et $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ tels que $X^{-1}Y=T_1P_\sigma T_2$. On a donc

$$(\overline{X},\overline{Y}) = X.(\overline{I_n},\overline{X^{-1}Y}) = X.(\overline{I_n},\overline{T_1P_\sigma T_2}) = XT_1.(\overline{T_1^{-1}},\overline{P_\sigma T_2}) = XT_1.(\overline{I_n},\overline{P_\sigma})$$

où on a utilisé le fait que $T_1^{-1}$ et $T_2$ sont des éléments de $T_n(K)$ pour la dernière égalité. Cela montre que toute orbite pour l'action considérée contient un élément de la forme $(\overline{I_n},\overline{P_\sigma})$.

Cet élément est de plus unique. En effet, s'il existe $A\in GL_n(K)$ et $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n$ tels que

$$(\overline{I_n},\overline{P_\sigma}) = A.(\overline{I_n},\overline{P_\tau}) = (\overline{A},\overline{AP_\tau})\,,$$

alors, $A$ appartient à $T_n(K)$ et il existe $T\in T_n(K)$ telle que $AP_\tau=P_\sigma T$. Par unicité de la permutation dans la décomposition de Bruhat de $AP_\tau$, on a donc $\sigma=\tau$.

Finalement, l'ensemble des orbites est en bijection avec $\{(\overline{I_n},\overline{P_\sigma}),\ \sigma\in\mathfrak{S}_n\}$, donc possède $n!$ éléments. □

## Références

J'ai utilisé [FGN07, p. 347]. On peut aussi consulter [FGN07, p. 263], [MT86, p. 45].

## Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 105, 119, 140. On peut également l'utiliser pour les leçons 101, 106.

## Remarques

- Dans la démonstration du théorème, il faut absolument être pédagogue et expliquer pourquoi l'idée est assez simple même si la technique est un peu lourde.
- La démonstration présentée ici fournit un algorithme permettant d'obtenir une décomposition de Bruhat. De plus, elle montre que dans une décomposition de Bruhat $A = T_1 P_\sigma T_2$, la matrice $T_2$ peut être choisie unipotente, c'est-à-dire triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux égaux à 1.
- Dans ce développement où on utilise des opérations élémentaires, il faut être au point sur la méthode de Gauss et ce qui tourne autour.
- On rappelle que la matrice de permutation $P_\sigma$ est définie comme étant la matrice de terme général $\delta_{i,\sigma(j)}$.
- Il existe une preuve plus géométrique de la décomposition de Bruhat, basée sur l'existence d'une base adaptée à deux drapeaux simultanément. Ce résultat sur les drapeaux est démontré dans [FGN07, p. 263] et on peut en déduire directement l'application proposée dans ce développement. Le fait de travailler avec des drapeaux peut être intéressant en vue de la leçon 125.
- À l'inverse, il est possible de ne pas parler de drapeaux et de simplement utiliser la décomposition de Bruhat pour compter le nombres d'orbites pour l'action de $GL_n(K)$ sur $(GL_n(K)/T_n(K))^2$ par translation à gauche.

## Questions possibles

1. Discuter de l'unicité de la décomposition de Bruhat d'une matrice inversible.
2. Donner une décomposition de Bruhat de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Montrer que l'orbite de $P_\tau$, où $\tau : k \mapsto n+1-k$, est un ouvert dense dans $GL_n(\mathbb{C})$.
4. Justifier que $T_n(K)$ est un sous-groupe de $GL_n(K)$.
5. Justifier que multiplier à gauche par $T_{i,j}(\lambda)$ revient à effectuer l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
6. Montrer que $T_{i,j}(\mu) D_j(\lambda) = D_j(\lambda) T_{i,j}(\lambda\mu)$.
7. Définir un drapeau. Quel est le lien entre drapeaux et bases ?
8. Montrer que $A.\delta = \delta$ si et seulement si $A \in T_n(K)$.
9. On considère l'action de Steinitz, ou action par équivalence, de $GL_n(K) \times GL_n(K)$ sur $\mathcal{M}_n(K)$. Donner l'orbite d'une matrice de permutation pour cette action, puis pour la restriction de cette action à $T_n(K) \times T_n(K)$.
10. Citer d'autres décompositions matricielles et préciser leurs liens.

# Références

[FGN07] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 1*. Cassini, 2007.

[MT86] Rached Mneimné et Frédéric Testard : *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1986.