Autour du groupe modulaire

Mon développement

On note $SL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dont le déterminant vaut 1.

Proposition. Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ le demi-plan complexe supérieur. Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{Z})$ et tout $z \in \mathbb{H}$, on note

$$A.z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Cela définit une action de groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$. En effet, on a

$$\operatorname{Im}(A.z) = \operatorname{Im}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\operatorname{Im} z$$

donc

$$\operatorname{Im}(A.z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} \tag{1}$$

et $A.z$ appartient à $\mathbb{H}$. De plus, si $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ est une autre matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$, on a

$$A.(B.z) = \frac{a\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa'+bc')z + ab' + bd'}{(ca'+dc')z + cb' + dd'} = (AB).z\,.$$

Enfin, on a $I_2.z = z$ pour tout $z \in \mathbb{H}$. On a donc bien défini une action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$.

On note G le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices S et T. L'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ induit une action de G sur $\mathbb{H}$. L'étude de cette action va permettre de montrer que $G = SL_2(\mathbb{Z})$.

Lemme 1. Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $A.z = z$ pour tout $z \in \mathbb{H}$. Alors, $A = I_2$ ou $A = -I_2$.

En effet, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ vérifiant $A.z = z$ pour tout $z \in \mathbb{H}$. Alors on a $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ pour tout $z \in \mathbb{H}$, donc $a = d$ et $b = c = 0$, donc en utilisant la relation $ad - bc = \det(A) = 1$, on en déduit que $A \in \{-I_2, I_2\}$. $\square$

Lemme 2. Toute orbite pour l'action de G sur $\mathbb{H}$ rencontre le domaine

$$\mathcal{D}_0 = \mathring{\mathcal{D}} \cup (\mathcal{D} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}) ,$$

où

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geq 1 \right\} ,$$

en un unique point d'intersection.

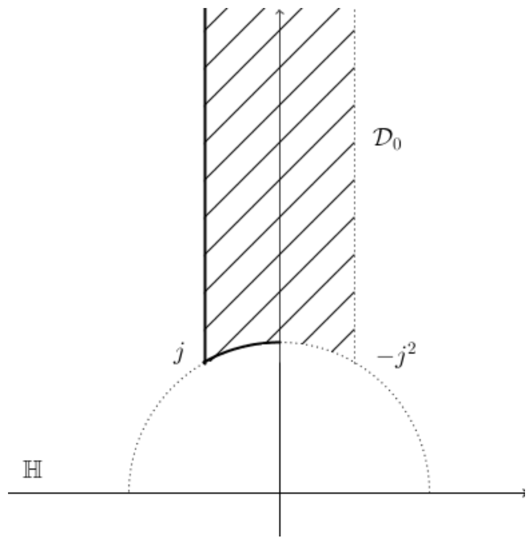

FIGURE 1 – Le domaine $\mathcal{D}_0$.

- Pour tout $z \in \mathbb{H}$, on note

$$J_z = \{\operatorname{Im}(A.z) \mid A \in G\} .$$

On va montrer que J_z admet un plus grand élément. En effet, soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathbb{H}$ et $\alpha > 0$ tels que $\operatorname{Im}(A.z) \geq \alpha$. D'après (1), on a $|cz+d|^2 \leq \frac{\operatorname{Im} z}{\alpha}$. Ainsi, d'une part,

$$c^2(\operatorname{Im} z)^2 \leq |cz+d|^2 \leq \frac{\operatorname{Im} z}{\alpha}$$

donc $c^2 \leq \frac{1}{\alpha \operatorname{Im} z}$ et d'autre part,

$$|d| \leq |cz| + |cz+d| \leq \frac{|z|}{\sqrt{\alpha \operatorname{Im} z}} + \sqrt{\frac{\operatorname{Im} z}{\alpha}} .$$

Il n'y a donc qu'un nombre fini de couples $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} \geq \alpha$. J_z étant inclus dans $\left\{ \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2},\ (c,d) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$, c'est une partie de $\mathbb{R}_+^*$ admettant un plus grand élément.

On note $A_0 \in G$ un élément tel que $\operatorname{Im}(A_0.z) = \max J_z$ et $z_0 = A_0.z$. En notant $m = E\left(\operatorname{Re} z_0 + \frac{1}{2}\right)$, on a

$$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z_0 - m = \operatorname{Re}(T^{-m}.z_0) \leq \frac{1}{2}$$

et $\operatorname{Im}(T^{-m}.z_0) = \operatorname{Im} z_0$, donc, quitte à considérer $T^{-m}.z_0$, on peut supposer que z_0 appartient à la bande $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}\}$.

Par maximalité de $\operatorname{Im} z_0$, on a de plus $\operatorname{Im} z_0 \geq \operatorname{Im}(S.z_0) = \frac{\operatorname{Im} z_0}{|z_0|^2}$ donc $|z_0| \geq 1$.
Finalement, toute orbite rencontre le domaine $\mathcal{D}$.

• On va maintenant montrer qu'une orbite possède exactement un élément dans $\mathcal{D}_0$. Soient $z, z' \in \mathcal{D}$. On suppose qu'il existe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $z' = A.z$. On peut supposer que $\operatorname{Im}(A.z) \geq \operatorname{Im} z$ quitte à appliquer le raisonnement suivant avec A^{-1} au lieu de A, car $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(A^{-1}.(A.z))$. D'après (1), cela implique

$$|cz + d|^2 \leq 1 \tag{2}$$

donc $1 \geq c^2(\operatorname{Im} z)^2 \geq \frac{3}{4}c^2$, donc c vaut -1, 0 ou 1. On rappelle que $ad - bc = 1$.

- Premier cas : $c = 0$. Alors, $ad = 1$ donc a et d sont égaux et valent -1 ou 1, donc $z' = A.z = z + b$ ou $z' = z - b$.
  - Dans le cas où $b = 0$, on a donc $z' = z$.
  - Sinon, comme z et z' sont tous deux dans $\mathcal{D}$, b vaut -1 ou 1, donc $\{\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} z'\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.
- Deuxième cas : $c = 1$. Alors, d'après (2), on a

$$1 \geq |z + d|^2 = |z|^2 + 2d \operatorname{Re} z + d^2 \geq 1 - 2|d|.|\operatorname{Re} z| + d^2 \geq 1 - |d| + d^2$$

  donc $d^2 \leq |d|$, ce qui implique que d vaut -1, 0 ou 1. Dans ces trois cas, l'inégalité ci-dessus implique également $|z + d|^2 = 1$.
  - Dans le cas où $d = 0$, on a d'une part $|z|^2 = 1$ et d'autre part, $b = -1$ donc $z' = \frac{az-1}{z} = a - \frac{\bar{z}}{|z|^2} = a - \bar{z}$, donc $\operatorname{Re} z' = a - \operatorname{Re} z$. Comme z et z' sont tous deux dans $\mathcal{D}$, on a :
    $z = j \Rightarrow a \in \{-1, 0\} \Rightarrow z' \in \{-j, j^2\}$,
    $z = -j^2 \Rightarrow a \in \{0, 1\} \Rightarrow z' \in \{j, -j^2\}$,
    $z \notin \{j, -j^2\} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z' = -\bar{z}$.

  - Dans le cas où $d = 1$, on a $|z + 1|^2 = 1$ donc, puisque $z \in \mathcal{D}$, la seule possibilité est $z = j$. Par ailleurs, $a - b = 1$ donc

$$z' = \frac{az + b}{z + 1} = a - \frac{1}{z + 1} = a + j$$

    donc $a \in \{0, 1\}$ et $z' \in \{j, -j^2\}$.
  - Dans le cas où $d = -1$, on obtient de même $z = -j^2$ et $z' \in \{j, -j^2\}$.
- Troisième cas : $c = -1$. On se ramène simplement au cas précédent en remplaçant A par $-A$, puisque $A.z = (-A).z$.

Finalement, parmi tous les cas traités, trois situations sont possibles : soit $z = z'$, soit $\{\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} z'\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, soit z et z' sont de module 1 et de parties réelles opposées. Cela montre bien que toute orbite rencontre exactement une fois le domaine $\mathcal{D}_0$. $\square$

On peut maintenant conclure. Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. L'élément $z = 2i$ appartient à $\mathcal{D}_0$. Puisque $A.z$ appartient à $\mathbb{H}$, d'après le lemme 2, il existe $A_0 \in G$ telle que $A_0.(A.z) \in \mathcal{D}_0$. D'après le lemme 2 toujours, on a donc $A_0.(A.z) = z$, donc, d'après le lemme 1, $A_0 A$ est égale à I_2 ou $-I_2$. Ainsi, soit $A = A_0^{-1}$, soit $A = -A_0^{-1} = S^2 A_0^{-1}$, donc A appartient à G.
On a ainsi montré que tout élément de $SL_2(\mathbb{Z})$ est dans G, on peut en conclure que $G = SL_2(\mathbb{Z})$. $\square$

Références

J'ai utilisé [FGN07, p. 60]. On peut aussi consulter [Ale99, p. 81], [FGN09, pp. 195, 197].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 139, 141. On peut également l'utiliser pour les leçons 101, 108.

Remarques

– Le groupe modulaire est le groupe $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$. Le lemme 1 montre que son action sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ est fidèle.
– Il est raisonnable d'écourter au maximum la disjonction des cas lorsqu'on présente ce développement à l'oral.
– Pour être utilisé dans les leçons 139 et 141, ce développement devrait comporter une des applications à la géométrie mentionnées ci-dessous par exemple.
– On peut déduire d'une partie génératrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ un pavage du demi-plan

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\tau \in PSL_2(\mathbb{Z})} \tau.\,\mathcal{D}$$

où les $\tau.\mathring{\mathcal{D}}$ sont deux à deux disjoints, voir [Ale99].
– On peut également classifier les réseaux plans à homothétie près. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des réseaux $\Gamma(u,v) = \left\{au + bv,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$, (u,v) étant une base de $\mathbb{C}$. Alors $\mathcal{R}\,/\,\mathbb{C}^*$ est isomorphe à $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$, et aussi à $\mathcal{D}_0$, voir [Ale99].
– Pour une partie génératrice de $SL_n(\mathbb{Z})$, voir [FGN09, p. 197]. Pour une partie génératrice de $GL_n(\mathbb{Z})$, voir [FGN07, p. 354].
– Le demi-plan de Poincaré peut fournir un exemple de géométrie non euclidienne.

Questions possibles

1. Déduire de ce développement une partie génératrice du groupe modulaire.
2. Montrer que le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est aussi engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Peut-on décrire géométriquement une orbite pour l'action de G sur $\mathbb{H}$? un stabilisateur ?
4. Lorsque K est un corps, donner une partie génératrice du groupe $SL_n(K)$. Même question avec $GL_n(K)$.
5. Montrer que l'application $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$ est une bijection biholomorphe de $\mathbb{H}$ sur le disque unité.

Références

[Ale99] Michel Alessandri : *Thèmes de géométrie : groupes en situation géométrique.* Dunod, 1999.

[FGN07] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 1*. Cassini, 2007.

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 2*. Cassini, 2009.