Formule sommatoire de Poisson

Mon développement

Dans ce développement, on notera e_k la fonction $x \mapsto e^{ikx}$ où $k \in \mathbb{Z}$, et $\hat{f}$ la transformée de Fourier d'une fonction f, définie par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx\,.$$

Proposition (formule sommatoire de Poisson). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \to +\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\hat{f}(n)e^{inx}\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto f(x+2\pi n)$.
Par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}$, quand $|n| \to +\infty$, $f_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$, on note F sa somme.

- Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$.
- De plus, par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| \geq 1$, on a $f(x) \leq \frac{M}{x^2}$. Alors, pour tous $K > 0$, $x \in [-2\pi K, 2\pi K]$, $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| > K+1$, on a $|x + 2n\pi| \geq 1$ donc

  $$|f_n(x)| \leq \frac{M}{(x+2\pi n)^2} \leq \frac{M}{4\pi^2(|n|-K)^2}\,.$$

  Pour tout $K > 0$, f_n est donc bornée sur $[-2\pi K, 2\pi K]$ par le terme général d'une série convergente dès que $|n| > K+1$. On en déduit que la série $\sum f_n$ converge normalement, donc aussi uniformément, sur tout compact de $\mathbb{R}$.
- De même, on montre que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation pour les séries de fonctions, la fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+2\pi n)$.

Par ailleurs, la fonction F est clairement 2π-périodique. De plus, on a vu que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}
\hat{F}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(x+2\pi n)e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(t)e^{-ikt}\underbrace{e^{2i\pi nk}}_{=1}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(k)\,.
\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence normale des séries de Fourier appliqué à F (qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$), la série $\sum \hat{F}(k)e_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ de somme F. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}\,.$$

□

Application. On note

$$\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} \end{array}.$$

Pour tout $t > 0$, on a

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

Pour obtenir cette formule en appliquant la formule de Poisson, on va avoir besoin de calculer la transformée de Fourier de la gaussienne.

Lemme. Soit $a > 0$ et soit $f : x \mapsto e^{-ax^2}$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a}\,.$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On a

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - ix\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\, dx\,.$$

On vérifie facilement que la fonction $\xi \mapsto \hat{f}(\xi) e^{\xi^2/4a}$ satisfait les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégral. On en déduit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est

$$\xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} -2a.\frac{i}{2a}\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right) e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}\, dx\,.$$

Or, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{i}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} -2a\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right) e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}\, dx = \frac{i}{2a}\left[e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

donc la fonction $\xi \mapsto \hat{f}(\xi) e^{\xi^2/4a}$ est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. On en déduit alors la formule annoncée. □

On peut maintenant démontrer l'équation fonctionnelle vérifiée par θ.

Soit $a > 0$. La fonction $f : x \mapsto e^{-ax^2}$ vérifie clairement les hypothèses nécessaires pour appliquer la formule sommatoire de Poisson. En utilisant le lemme, on obtient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+2\pi n)^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a} e^{ikx}\,.$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-4a\pi^2 n^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2/4a}\,.$$

Appliquée en $a = \frac{t}{4\pi}$, cette dernière relation est la formule annoncée. □

Références

J'ai utilisé [El 08, p. 213], [Gou08, p. 273]. On peut aussi consulter [FGN09, pp. 304, 306], [ZQ07, p. 96].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour la leçon 230. On peut également l'utiliser pour les leçons 239, 240, 241, 246, 247.

Remarques

- Ce développement peut se poursuivre en montrant que la fonction ζ définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Plus précisément, il existe une fonction η holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \eta(s)$. Voir [ZQ07, p. 28].
- En appliquant la formule de Poisson à la fonction $x \mapsto |x|^{-s}$, on peut retrouver l'équation fonctionnelle

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)\,.$$

- La fonction θ est reliée à la fameuse fonction Θ de Jacobi.

Questions possibles

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégral.
2. Donner une méthode pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$.
3. Peut-on relaxer les hypothèses pour appliquer la formule de Poisson ?
4. Citer une application de la formule sommatoire de Poisson.
5. Soit $a > 0$. Montrer que
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a)\,.$$
6. On considère un jeu avec une pièce de monnaie (probabilités $p \in]0,1[$ d'obtenir « pile » et $q = 1-p$ d'obtenir « face ») et deux joueurs A et B. Le joueur A lance la pièce une fois, puis B la lance 3 fois, puis A 5 fois etc... jusqu'à ce qu'un joueur gagne en obtenant « pile » . Peut-on piper la pièce afin que A et B aient la même probabilité de gagner ?

Références

[El 08] Mohammed El Amrani : *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses, 2008.

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Analyse 2.* Cassini, 2009.

[Gou08] Xavier Gourdon : *Analyse.* Ellipses, 2008.

[ZQ07] Claude Zuily et Hervé Queffélec : *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.