Formule d'Euler-Mac Laurin

Mon développement

Proposition. Il existe une unique suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant
(i) $B_0 = 1$,
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n' = nB_{n-1}$,
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$.
Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernoulli et les nombres $b_n = B_n(0)$ sont appelés nombres de Bernoulli. Ils vérifient de plus
(iv) $\forall n \neq 1$, $B_n(1) = B_n(0)$,
(v) $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$,
(vi) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_{2n+1} = 0$.

On construit les polynômes de Bernoulli par récurrence.
• L'initialisation se fait en posant $B_0 = 1$.
• Pour l'hérédité, on suppose que le polynôme B_n est construit. En notant

$$B_{n+1} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (n+1)\int_0^x B_n(t)\,dt - \int_0^1 \int_0^u (n+1)B_n(t)\,dt\,du \end{array}, \tag{1}$$

on a alors clairement $B_{n+1}'(x) = (n+1)B_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, et $\int_0^1 B_{n+1}(x)\,dx = 0$. De plus, B_n étant polynomiale, B_{n+1} l'est également.
On a ainsi construit par récurrence une suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (i), (ii) et (iii). Une récurrence immédiate utilisant le théorème fondamental de l'analyse permet de montrer que cette suite de polynômes est unique.

Pour le point (iv), on a bien évidemment $B_0(1) = 1 = B_0(0)$ et, d'après les points (ii) et (iii), pour tout $n \geq 2$, on a

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(x)\,dx = n\int_0^1 B_{n-1}(x)\,dx = 0\,.$$

Ensuite, en posant $P_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$, il est clair que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les points (i), (ii) et (iii), donc par unicité des polynômes de Bernoulli, on a $P_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique le point (v).
Enfin, d'après les points (iv) et (v), pour tout $n \neq 1$, on a $b_n = B_n(1) = (-1)^n b_n$, ce qui implique le point (vi). $\square$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\widetilde{B_n}$ la fonction 1-périodique qui coïncide avec B_n sur $[0,1[$.

Proposition (formule d'Euler-Mac Laurin). Soient m, n deux entiers tels que $m < n$, soit $r \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathcal{C}^r([m,n],\mathbb{C})$. On a :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(m)+f(n)) + \sum_{p=1}^{E(r/2)} \frac{b_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(m)\right)$$
$$+ \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n \widetilde{B_r}(t) f^{(r)}(t)\,dt\,.$$

On démontre la formule d'Euler-Mac Laurin par récurrence également.

• Initialisation. Soient $m < n$ deux entiers et $f \in \mathcal{C}^1([m,n],\mathbb{C})$. Grâce à (1), on calcule facilement $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$. Pour tout $k \in [\![m, n-1]\!]$, le théorème d'intégration par parties appliqué aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ f et $\widetilde{B_1}$ (qu'on a prolongée par continuité en $k+1$) donne

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(t)\,dt &= \left[f(t)\widetilde{B_1}(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \widetilde{B_1}(t) f'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}(f(k+1)+f(k)) - \int_k^{k+1} \widetilde{B_1}(t) f'(t)\,dt \end{aligned}$$

donc, en sommant sur k, on obtient

$$\int_m^n f(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(m)+f(n)) + \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k) - \int_m^n \widetilde{B_1}(t) f'(t)\,dt\,.$$

• Hérédité. On suppose que la formule est démontrée à un rang $r \geq 1$. Soient $m < n$ deux entiers et $f \in \mathcal{C}^{r+1}([m,n],\mathbb{C})$. Le théorème d'intégration par parties appliqué aux fonctions $f^{(r)}$ et $\frac{\widetilde{B_{r+1}}}{r+1}$, qui sont continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, de dérivées respectives $f^{(r+1)}$ et $\widetilde{B_r}$, donne

$$\begin{aligned} \int_m^n \widetilde{B_r}(t) f^{(r)}(t)\,dt &= \left[\frac{1}{r+1}\widetilde{B_{r+1}}(t) f^{(r)}(t)\right]_m^n - \int_m^n \frac{1}{r+1}\widetilde{B_{r+1}}(t) f^{(r+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{b_{r+1}}{r+1}(f^{(r)}(n) - f^{(r)}(m)) - \int_m^n \frac{1}{r+1}\widetilde{B_{r+1}}(t) f^{(r+1)}(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

En injectant cette relation dans l'hypothèse de récurrence, en distinguant le cas où r est pair du cas où r est impair et en utilisant le point (vi) ci-dessus, on obtient que la propriété souhaitée est vérifiée au rang $r+1$.

La formule d'Euler-Mac Laurin est donc démontrée par récurrence. □

Application 1. Il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, quand $n \to +\infty$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{p=1}^r \frac{b_{2p}}{2p}\frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{2r+1}}\right)\,.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1,+\infty[$ et pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $t \in [1,+\infty[$, on a $f^{(p)}(t) = \frac{(-1)^p p!}{t^{p+1}}$. D'après la formule d'Euler-Mac Laurin appliquée au rang $2r+1$, pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \sum_{p=1}^r \frac{b_{2p}}{2p}\left(\frac{1}{n^{2p}} - 1\right) - \int_1^n \frac{\widetilde{B_{2r+1}}(t)}{t^{2r+2}}\,dt\,.$$

Comme $\widetilde{B_{2r+1}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\widetilde{B_{2r+1}}(t)}{t^{2r+2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. En notant

$$\gamma_r = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^r \frac{b_{2p}}{2p} - \int_1^{+\infty} \frac{\widetilde{B_{2r+1}}(t)}{t^{2r+2}}\,dt\,,$$

on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma_r + \frac{1}{2n} - \sum_{p=1}^{r} \frac{b_{2p}}{2p} \frac{1}{n^{2p}} + \int_n^{+\infty} \frac{\widetilde{B_{2r+1}}(t)}{t^{2r+2}}\, dt$$

avec

$$\left| \int_n^{+\infty} \frac{\widetilde{B_{2r+1}}(t)}{t^{2r+2}}\, dt \right| \leq \|\widetilde{B_{2r+1}}\|_\infty \frac{1}{(2r+1)n^{2r+1}}\,.$$

On remarque enfin que pour tout r, γ_r est égale à la limite quand $n \to +\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$, donc γ_r est indépendante de r. On obtient ainsi la formule annoncée. □

Application 2.
(i) Quand $n \to +\infty$, on a

$$b_{2n} \sim \frac{(-1)^{n+1} 2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\,.$$

(ii) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\left|\widetilde{B_{2n}}(x)\right| \leq |b_{2n}|$ et $\left|\widetilde{B_{2n+1}}(x)\right| \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) |b_{2n}|$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. La formule d'Euler-Mac Laurin appliquée à la fonction $x \mapsto e^{-2i\pi nx}$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, s'écrit au rang p :

$$2 = \underbrace{\int_0^1 e^{-2i\pi nx}\, dx}_{=0 \text{ si } n \neq 0} + 1 + 0 + \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \int_0^1 \widetilde{B_p}(x)(-2i\pi n)^p e^{-2i\pi nx}\, dx\,.$$

Le n-ième coefficient de Fourier de la fonction 1-périodique $\widetilde{B_p}$ vaut donc $\frac{-p!}{(2i\pi n)^p}$ lorsque n est non nul. Et il vaut $\int_0^1 \widetilde{B_p}(x)\, dx = 0$ si $n = 0$ d'après le point (iii) ci-dessus.
D'une part, $\widetilde{B_p}$ est continue pour $p \neq 1$, et d'autre part, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{B_1}$ est continue sur l'intervalle $]k, k+1[$ et

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to k^-} \widetilde{B_1}(x) + \lim_{x \to k^+} \widetilde{B_1}(x) \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0\,.$$

D'après le théorème de Dirichlet, on a alors

$$\forall k \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{B_{2k}}(x) = \frac{(-1)^{k+1} 2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^{2k}}$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{B_{2k+1}}(x) = \frac{(-1)^{k+1} 2(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n^{2k+1}}\,.$$

En notant $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, on a donc d'une part

$$b_{2k} = \frac{(-1)^{k+1} 2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) \sim \frac{(-1)^{k+1} 2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}$$

quand $k \to +\infty$.
D'autre part, pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $|\widetilde{B_{2k}}(x)| \leq |b_{2k}|$. De plus, d'après les points (ii) et (vi) ci-dessus, on a, pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$B_{2k+1}(x) = (2k+1) \int_0^x B_{2k}(t)\, dt$$

donc $|\widetilde{B_{2k+1}}(x)| \leq (2k+1)|x|.|b_{2k}| \leq \left(k+\frac{1}{2}\right)|b_{2k}|$ dès que $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Cette relation est aussi valable pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ d'après le point (v) ci-dessus, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ par périodicité de $\widetilde{B_{2k+1}}$. □

Références

J'ai utilisé [Dem06, pp. 77-81], [Gou08, p. 301]. On peut aussi consulter [Gou08, p. 299], [FGN09, p. 310].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 223, 224, 238. On peut également l'utiliser pour la leçon 230.

Remarques

- Le nombre γ est appelé constante d'Euler.
- On peut définir les nombres de Bernoulli par récurrence (voir [IR90, p. 229]) en posant $b_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0\,,$$
puis ensuite définir les polynômes de Bernoulli à l'aide de la formule
$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k x^{n-k}\,.$$
- On peut également définir ces quantités à l'aide de développements en série entière, voir [Gou08, p. 299].
- Dans l'application 1, on utilise le fait que les fonctions $\widetilde{B_n}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. Des bornes explicites sont obtenues dans l'application 2 (ii).
- L'application 2 permet de montrer au passage que les $\zeta(2k)$ sont des multiples rationnels de π^{2k}, puisque les polynômes de Bernoulli sont à coefficients rationnels (démonstration par récurrence).

Questions possibles

1. Calculer les premiers polynômes et nombres de Bernoulli.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^r$ sur $[m, n]$ dont les dérivées sont bornées par M. Majorer l'erreur lorsqu'on effectue la méthode des trapèzes pour évaluer $\int_m^n f(x)\,dx$.
3. À partir de la formule d'Euler-Mac Laurin, écrire une formule de Stirling avec reste.
4. Montrer que la fonction ζ admet une limite en $+\infty$ égale à 1.
5. Dans l'application 2, quel est le mode de convergence de la série de Fourier de $\widetilde{B_p}$?

Références

[Dem06] Jean-Pierre Demailly : *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP Sciences, 2006.

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Analyse 2.* Cassini, 2009.

[Gou08] Xavier Gourdon : *Analyse.* Ellipses, 2008.

[IR90] Kenneth F. Ireland et Michael I. Rosen : *A classical introduction to modern number theory.* Springer, 1990.