Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Mon développement

Proposition. On a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

On note

$$F : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt \end{array} \qquad \text{et} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{-xt}\frac{\sin t}{t} \end{array}\,.$$

La fonction F est bien définie sur $[0,+\infty[$.
En effet, pour tout $x > 0$, la fonction $f(x,.)$ est continue sur $]0,+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 par $f(x,0) = 1$ et quand $t \to +\infty$, $f(x,t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc $f(x,.)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $x > 0$.
De plus, pour tout $A \geq 1$, on a

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

d'après la formule d'intégration par parties appliquée aux fonctions $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$.
Or la fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et quand $t \to +\infty$, $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Quand $A \to +\infty$, l'intégrale $\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,dt$ admet donc une limite égale à $\cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$. On peut donc définir également $F(0)$.

Ensuite,
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,
- pour tous $x, t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\sin t$,
- pour tout compact $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, tout $x \in [a,b]$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at}\,.$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, F est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, on a

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt = -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t}\,dt\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right) = \frac{-1}{x^2+1}\,.$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = C - \operatorname{Arctan} x$. Or, il est clair que pour tout $x > 0$,

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$$

donc F admet une limite en $+\infty$ égale à 0, donc $C = \frac{\pi}{2}$.
Finalement, pour tout $x > 0$, on a

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\,. \tag{1}$$

De plus, en notant

$$G : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \int_0^t \frac{\sin u}{u}\, du \end{array},$$

on a $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} G'(t)\, dt$ pour tout $x \geq 0$.
Soient alors $0 < a < b$. En intégrant par parties sur $[a,b]$, on obtient

$$\int_a^b e^{-xt} G'(t)\, dt = \left[e^{-xt} G(t)\right]_a^b + x \int_a^b e^{-xt} G(t)\, dt\,.$$

En faisant tendre $a \to 0$ et $b \to +\infty$, on obtient alors $F(x) = x \int_0^{+\infty} e^{-xt} G(t)\, dt$. Ainsi,

$$|F(x) - F(0)| = x \left| \int_0^{+\infty} e^{-xt} (G(t) - F(0))\, dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(G\left(\frac{u}{x}\right) - F(0) \right) du \right|.$$

Or, G admet une limite en $+\infty$ égale à $F(0)$. Étant de plus continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction G est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi,

- pour tout $u > 0$, quand $x \to 0$, $e^{-u}\left(G\left(\frac{u}{x}\right) - F(0)\right)$ tend vers 0,
- pour tous $u > 0$ et $x > 0$, on a $e^{-u}\left(G\left(\frac{u}{x}\right) - F(0)\right) \leq e^{-u} \left(\|G\|_\infty + |F(0)|\right)$.

D'après le théorème de convergence dominée, quand $x \to 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} \left(G\left(\frac{u}{x}\right) - F(0) \right) du$$

tend vers 0, donc $F(x)$ admet une limite égale à $F(0)$.

En utilisant (1), on en conclut que $F(0) = \frac{\pi}{2}$. □

Références

J'ai utilisé [FGN10, p. 214]. On peut aussi consulter [FGN10, p. 217].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 236, 239.

Remarques

- Le niveau de ce développement est relativement bas. De plus, il y a d'autres choses intéressantes à proposer dans les leçons 236 et 239.
- La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$. En effet, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[n\pi + \frac{\pi}{6}, (n+1)\pi - \frac{\pi}{6}\right]$, on a

$$\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{1}{2t} \geq \frac{1}{2(n+1)\pi}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\pi}{3} \frac{1}{2(n+1)\pi} = +\infty\,.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est donc « impropre » .

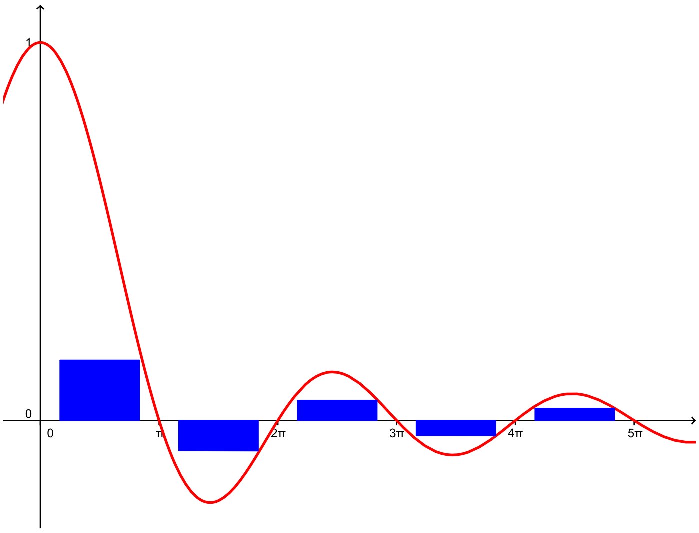

FIGURE 1 – Non-intégrabilité de la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$.

- L'idée sous-jacente dans ce développement est que la transformée de Laplace de la fonction sin est $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$, donc $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est la transformée de Laplace inverse de $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$.
- Il existe de nombreuses autres manières de calculer l'intégrale de Dirichlet. Par exemple,
  - on peut appliquer la formule de Cauchy à la fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ et au contour C_1 ou C_2 ci-dessous ;
  - on peut aussi l'appliquer à la fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}-1}{z}$ et choisir comme contour un demi-cercle ;
  - de la même manière, on peut appliquer la formule de Green-Riemann à la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\left[(x\sin x - y\cos x)\,dx + (x\cos x + y\sin x)\,dy\right]$$

    et au contour C_2 ci-dessous ;

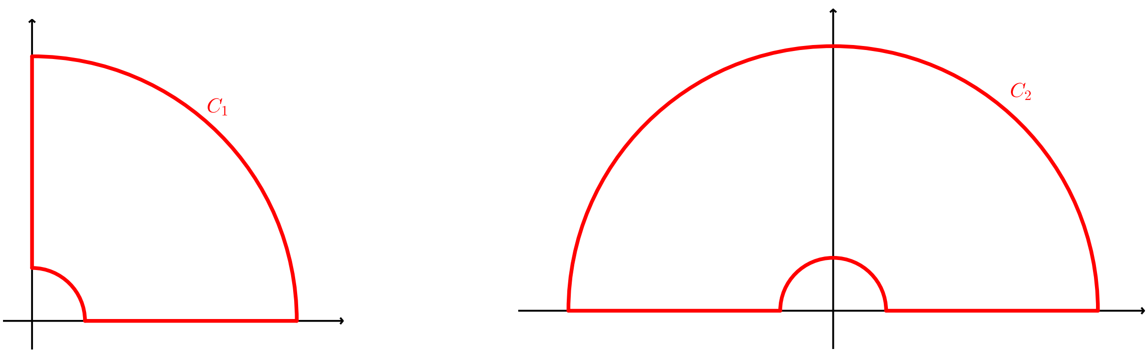

FIGURE 2 – Contours C_1 et C_2.

  - on peut montrer que la suite de terme général

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,dt$$

est constante, puis, en appliquant le lemme de Riemann-Lebesgue, que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,dt-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,dt\right)=0\,;$$

– on peut aussi intégrer $f:(x,t)\mapsto e^{-xt}\sin x$ sur un domaine $[\varepsilon,T]\times[0,+\infty[$;
– on peut montrer que pour tout $x>0$,

$$\int_0^{\pi/2}e^{-x\cos(t)}\cos(x\sin(t))\,dt=\frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt\,;$$

– on peut utiliser les transformées de Laplace d'une autre manière (voir [FGN10, p. 217]).

Questions possibles

1. Montrer que la fonction $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Que peut-on dire de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt$?
3. Montrer que
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt\,.$$
4. Montrer que pour tout $x>0$, on a
$$\left|\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\right|\le\frac{2}{x}\,.$$
5. Calculer la somme
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\int_{2n\pi}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\,.$$

Références

[FGN10] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Analyse 3.* Cassini, 2010.