Théorème d'Ascoli

Mon développement

Dans tout ce développement, (X, d) est un espace métrique compact et (Y, d') est un espace métrique complet. On rappelle que, muni de la distance

$$D_\infty : (f, g) \mapsto \sup_{x \in X} d'(f(x), g(x)),$$

l'espace $\mathcal{C}^0(X, Y)$ des fonctions continues de X dans Y est complet.

Théorème (Ascoli). Soit A une partie de $\mathcal{C}^0(X, Y)$. A est relativement compacte si et seulement si
(i) A est équicontinue, i.e.

$$\forall x_0 \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \sup_{f \in A} d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon .$$

(ii) Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\Lambda_x = \{f(x),\ f \in A\}$ est relativement compact dans Y.

• On commence par démontrer le sens direct. On suppose donc que A est relativement compacte.
En particulier, A est précompacte, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_1, \ldots, f_p \in A$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{p} B_{D_\infty}(f_i, \varepsilon) .$$

Les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ étant continues sur le compact X, d'après le théorème de Heine, elles sont uniformément continues sur X. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$,

$$d(x, y) \leq \delta \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ d'(f_i(x), f_i(y)) \leq \varepsilon .$$

Soit alors $f \in A$. D'après les deux points ci-dessus, d'une part il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $D_\infty(f, f_i) \leq \varepsilon$, et d'autre part pour tous $x, y \in X$ tels que $d(x, y) \leq \delta$, on a

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f_i(x)) + d'(f_i(x), f_i(y)) + d'(f_i(y), f(y)) \leq 3\varepsilon .$$

Autrement dit, A est équicontinue.

Par ailleurs, soit $x \in X$. Λ_x est l'image de A par l'application $\varphi_x : f \mapsto f(x)$, qui est continue car 1-lipschitzienne. $\Lambda_x = \varphi_x(A)$ est donc inclus dans $\varphi_x(\overline{A})$, qui est compact dans Y en tant qu'image du compact $\overline{A}$ par une application continue. On en déduit que Λ_x est relativement compact.

Le sens direct est donc démontré.

• Réciproquement, on suppose que A vérifie (i) et (ii).
Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. D'après (i), il existe $\eta_x > 0$ tel que

$$\forall y \in X,\ d(x, y) < \eta_x \Rightarrow \sup_{f \in A} d'(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Comme X est compact et $X = \bigcup_{x \in X} B_d(x, \eta_x)$, il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_d(x_i, \eta_i)$$

où on a noté $\eta_i = \eta_{x_i}$.

De plus, d'après (ii), $\Lambda_{x_1}, \ldots, \Lambda_{x_n}$ sont relativement compacts donc précompacts, donc leur union également. Il existe donc $y_1, \ldots, y_m \in Y$ tels que

$$\bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_{x_i} = \bigcup_{j=1}^{m} B_{d'}\left(y_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) .$$

Pour toute fonction $\varphi : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \{y_1, \ldots, y_m\}$, on note

$$C_\varphi = \{f : X \to Y \mid \forall i \in [\![1, n]\!], \forall x \in B_d(x_i, \eta_i), d'(f(x), \varphi(x_i)) < \varepsilon\} .$$

D'une part, le diamètre de C_φ est au plus 2ε. En effet, soient $f, g \in C_\varphi$. Pour tout $x \in X$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x \in B_d(x_i, \eta_i)$ donc

$$d'(f(x), g(x)) \leq d'(f(x), \varphi(x_i)) + d'(\varphi(x_i), g(x)) \leq 2\varepsilon .$$

Donc $D_\infty(f, g) \leq 2\varepsilon$.
D'autre part, l'union des C_φ est égale à A. En effet, soit $f \in A$. Puisque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $k_i \in [\![1, m]\!]$ tel que $f(x_i) \in B_{d'}\left(y_{k_i}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, on peut définir l'application φ qui à tout x_i associe y_{k_i}. Elle vérifie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $x \in B_d(x_i, \eta_i)$, $d'(f(x_i), \varphi(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d'(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$, donc $d'(f(x), \varphi(x_i)) < \varepsilon$. On en déduit bien que f appartient à C_φ.

Finalement, A est égale à l'union des m^n ensembles C_φ, chacun étant de diamètre inférieur ou égal à 2ε. En choisissant un élément dans chaque C_φ, on peut donc recouvrir A par une union finie de boules de rayon 2ε. A est donc précompacte et, puisque l'espace $\mathcal{C}^0(X, Y)$ est complet, on en déduit que $\overline{A}$ est à la fois précompacte et complète, donc compacte. Autrement dit, A est relativement compacte. $\square$

Références

J'ai utilisé [Ska04, p. 148]. On peut aussi consulter [ZQ07, p. 151], [Lan83, p. 210].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 201, 203, 228.

Remarques

- Il faut simplifier la version du théorème si on le présente dans la leçon 228, car celle-ci concerne les fonctions réelles d'une variable réelle.
- L'utilisation de ce développement dans la leçon 203 est contestable. En effet, on utilise la compacité pour démontrer un résultat de compacité...
- Dans le sens direct, pour montrer que Λ_x est relativement compact, on peut utiliser la caractérisation séquentielle des parties relativement compactes.

– On peut changer l'hypothèse (i) en l'hypothèse plus forte « A est uniformément équicontinue », c'est-à-dire η est indépendant de x_0. Cela ne simplifie que très peu la démonstration. De plus, il vaut mieux avoir les hypothèses les plus faibles possibles puisque c'est la réciproque du théorème d'Ascoli qui sert le plus en pratique.
– Le théorème d'Ascoli permet de démontrer le théorème des familles normales de Montel ou le théorème de Cauchy-Arzelà-Peano notamment.

Questions possibles

1. Montrer que l'espace $(\mathcal{C}^0(X,Y), D_\infty)$ est complet.
2. Définir les notions de compacité qui interviennent dans le développement et préciser leurs liens.
3. Montrer qu'une partie d'un espace métrique est compacte si et seulement si elle est complète et précompacte.
4. Justifier qu'une partie est relativement compacte si et seulement si toute suite admet une suite extraite qui converge.
5. Dans le cas où $Y = \mathbb{R}^n$, comment l'énoncé se simplifie-t-il ?
6. Citer une application du théorème d'Ascoli.
7. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'inclusion
$$\big(\mathcal{C}^1(K,\mathbb{C}), \|.\|_{\mathcal{C}^1}\big) \hookrightarrow \big(\mathcal{C}^0(K,\mathbb{C}), \|.\|_\infty\big)$$
est compacte.
8. Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que l'opérateur
$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \Big(x \mapsto \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy\Big) \end{array}$$
est compact.

Références

[Lan83] Serge Lang : *Real analysis.* Addison-Wesley Publishing Company, 1983.
[Ska04] Georges Skandalis : *Topologie et analyse, 3e année.* Dunod, 2004.
[ZQ07] Claude Zuily et Hervé Queffélec : *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.