Théorème de Brouwer

Mon développement

On note B^n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme (Milnor). Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$, U un voisinage ouvert de K dans $\mathbb{R}^n$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $K \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ et $\overline{\Omega}$ est compact, et $v \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. On note $v_t = \mathrm{Id} + tv$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $t \in]-\gamma, \gamma[$, v_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur $v_t(\Omega)$. De plus, l'application

$$k : t \mapsto \int_K \det(Dv_t(x))\, dx$$

est polynomiale et pour tout $t \in]-\gamma, \gamma[$, $k(t) = \lambda(v_t(K))$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, v_t est différentiable et $Dv_t = \mathrm{Id} + tDv$. Pour tout $x \in U$, $\det(Dv_t(x))$ est donc un polynôme en t, donc k également.
Par ailleurs, Dv est continue car v est de classe $\mathcal{C}^1$, et $\overline{\Omega}$ est compact, donc il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in \overline{\Omega}$, $\|Dv(x)\| \leq M$. Ainsi, en notant $\alpha = \frac{1}{2M}$, on a

$$\forall t \in]-\alpha, \alpha[,\ \forall x \in \overline{\Omega},\ \|Dv_t(x) - \mathrm{Id}\,\| \leq \frac{1}{2}$$

donc $Dv_t(x)$ est inversible.
En particulier, soit $x \in \overline{\Omega}$. La fonction $t \mapsto \det(Dv_t(x))$ est continue (car polynomiale), elle ne s'annule pas sur $]-\alpha, \alpha[$ et on a $\det(Dv_0(x)) = \det(\mathrm{Id}) = 1$, donc pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$, $\det(Dv_t(x)) > 0$.

De plus, v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, d'après l'inégalité des accroissements finis, v est aussi localement lipschitzienne sur U. En recouvrant $\overline{\Omega}$ par un nombre fini de boules, on en déduit que v est lipschitzienne sur $\overline{\Omega}$. On note k une constante de Lipschitz de $v|_{\overline{\Omega}}$ et $\beta = \frac{1}{2k}$.
Soit $t \in]-\beta, \beta[$. Soient $x, y \in \overline{\Omega}$ tels que $v_t(x) = v_t(y)$. On a alors

$$\|x - y\| = |t| \|v(y) - v(x)\| \leq \beta k \|y - x\| = \frac{1}{2}\|x - y\|$$

donc $x = y$. La fonction $v_t|_{\overline{\Omega}}$ est donc injective pour tout $t \in]-\beta, \beta[$.

Finalement, pour tout $t \in]-\min(\alpha, \beta), \min(\alpha, \beta)[$, v_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur $v_t(\Omega)$. En particulier, d'après le théorème de changement de variables, on a

$$k(t) = \int_{v_t(K)} 1\, dx = \lambda(v_t(K))\,.$$

□

Lemme (non-rétraction). Il n'existe aucune fonction $f : B^n \to S^{n-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in S^{n-1}$, $f(x) = x$.

On suppose qu'il existe une telle fonction f.
Soient U un voisinage ouvert de B^n dans $\mathbb{R}^n$, $v = f - \mathrm{Id}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $B^n \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset U$ et $\overline{\Omega}$ est compact. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $v_t = \mathrm{Id} + tv$. D'après le lemme de Milnor appliqué à $K = B^n$, il existe $\gamma \in]0,1[$ tel que pour tout $t \in]-\gamma, \gamma[$, v_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur $v_t(\Omega)$.
De plus, pour tout $t \in [0, \gamma[$, on a $v_t(B^n) \subset B^n$ et $v_t(\mathring{B}^n) \subset \mathring{B}^n$ puisque pour tout $x \in B^n$,

$$v_t(x) = tx + (1-t)f(x) .$$

Soit $t \in [0, \gamma[$. D'après le théorème d'inversion locale, $v_t(\mathring{B}^n)$ est ouvert dans $\mathring{B}^n$.
Soit maintenant $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de $v_t(\mathring{B}^n)$ convergeant de limite $x \in \mathring{B}^n$. Il existe une suite $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathring{B}^n$ telle que $\forall j \in \mathbb{N}$, $x_j = v_t(y_j)$. Cette suite admet une valeur d'adhérence y par compacité de B^n, donc on a $x = v_t(y)$ par continuité de v_t. De plus, puisque x n'appartient pas à S^{n-1}, y non plus puisque les points de S^{n-1} sont fixes par v_t. $x = v_t(y)$ est donc un élément de $v_t(\mathring{B}^n)$. On a ainsi montré que $v_t(\mathring{B}^n)$ est un fermé dans $\mathring{B}^n$.
Finalement, étant non vide, $v_t(\mathring{B}^n)$ est égal à $\mathring{B}^n$ par connexité de $\mathring{B}^n$.
Comme on a également $v_t(S^{n-1}) = S^{n-1}$, on en conclut que $v_t(B^n) = B^n$.

D'après le lemme de Milnor, en notant

$$k : t \mapsto \int_{B^n} \det(Dv_t(x))\, dx ,$$

on a donc pour tout $t \in [0, \gamma[$, $k(t) = \lambda(v_t(B^n)) = \lambda(B^n)$. La fonction k étant de plus polynomiale, on en déduit que cette égalité est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$\lambda(B^n) = \int_{B^n} \det(Dv_1(x))\, dx = \int_{B^n} \det(Df(x))\, dx . \tag{1}$$

Or pour tout $x \in B^n$, $f(x)$ appartient à S^{n-1}. La fonction $x \mapsto \langle f(x), f(x)\rangle$ est donc constante sur B^n, donc pour tout $x \in B^n$, sa différentielle en x est nulle, c'est-à-dire

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ 2\langle Df(x)(h), f(x)\rangle = 0 .$$

On a donc $\mathrm{Im}(Df(x)) \subset (\mathrm{Vect}\, f(x))^\perp$ donc $Dv_1(x) = Df(x)$ n'est pas inversible.
Ainsi, d'après (1), on a $\lambda(B^n) = 0$, ce qui est faux.

On a ainsi montré le lemme de non-rétraction. □

Théorème (Brouwer). Toute fonction continue $f : B^n \to B^n$ admet un point fixe.

On suppose qu'il existe une fonction continue $f : B^n \to B^n$ n'admettant aucun point fixe.
Puisque $f - \mathrm{Id}$ est continue sur le compact B^n, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in B^n,\ \|f(x) - x\| \geq \varepsilon .$$

Par ailleurs, d'après le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme Q tel que

$$\forall x \in B^n,\ \|f(x) - Q(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

donc le polynôme $P = \frac{Q}{1+\varepsilon/2}$ vérifie $P(B^n) \subset B^n$.
De plus, pour tout $x \in B^n$, on a $\|Q(x) - P(x)\| = \left\|\frac{\varepsilon}{2}P(x)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ donc $\|f(x) - P(x)\| < \varepsilon$ et $P(x) \neq x$. On peut donc définir la fonction g qui à tout $x \in B^n$ associe l'intersection de S^{n-1} et de la demi-droite $[P(x), x)$.

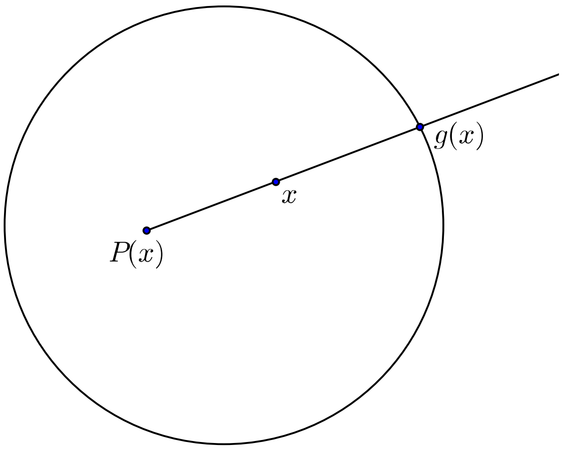

Figure 1 – Définition de g.

Soit $x \in B^n$. Il existe $t(x) \geq 0$ tel que

$$g(x) = x + t(x)\frac{x - P(x)}{\|x - P(x)\|}\,.$$

La relation $\|g(x)\|^2 = 1$, c'est-à-dire

$$t(x)^2 + 2\frac{\langle x, x - P(x)\rangle}{\|x - P(x)\|}t(x) + \|x\|^2 - 1 = 0\,,$$

permet de déterminer $t(x)$ et d'obtenir

$$g(x) = x + \frac{-\langle x, x - P(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x - P(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - P(x)\|^2}}{\|x - P(x)\|}(x - P(x))\,.$$

g est finalement une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, qui envoie B^n sur S^{n-1} et dont la restriction à S^{n-1} est l'identité.
D'après le lemme de non-rétraction, une telle fonction ne peut exister. On en conclut qu'il n'existe pas de fonction continue $f : B^n \to B^n$ sans point fixe. □

Remarque : le théorème de Brouwer permet de montrer le lemme de non-rétraction pour une fonction continue. En effet, si $f : B^n \to S^{n-1}$ est une fonction continue telle que pour tout $x \in S^{n-1}$, $f(x) = x$, alors $-f$ est une fonction continue de B^n dans B^n. Cependant, son image est incluse dans S^{n-1} et pour tout $x \in S^{n-1}$, $(-f)(x) = -x \neq x$, donc $-f$ n'admet pas de point fixe. D'après le théorème de Brouwer, une telle fonction f ne peut donc exister.

Références

J'ai utilisé [BBR87, pp. 57-60], [GT98, pp. 61-64]. On peut aussi consulter [BMP05, p. 33].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 206, 214. On peut également l'utiliser pour la leçon 215.

Remarques

- Dans le lemme de Milnor, on ne peut pas appliquer directement l'inégalité des accroissements finis sur $\overline{\Omega}$ car $\overline{\Omega}$ n'est pas forcément convexe. Toutefois, au voisinage d'un point de U, on peut trouver une boule contenant ce point et appliquer l'inégalité des accroissements finis sur cette boule.
- Il existe d'autres preuves du théorème de Brouwer. Voir par exemple [Rou09, p. 175], [Laf10, p. 247], [CLFM97, pp. 63, 76], [AZ06, p. 168].
- Si on modifie ce développement, on peut le présenter dans d'autres leçons : la leçon 145 si on utilise le lemme de Sperner, la leçon 203 ou 205 si on le généralise dans d'autres espaces.
- Le théorème admet des généralisations aux convexes compacts dans un espace de dimension finie ou un espace de Banach. Pour le théorème de Schauder, voir notamment [GT96, p. 94], [Rou09, p. 179], [CLFM97, p. 79], [Pom94, p. 80].
- Le théorème de Brouwer admet des applications telles que le théorème de champ rentrant dans la sphère (voir [Rou09, p. 175], [CLFM97, p. 77]), le théorème des trois fermés (voir [Pom94, p. 79]), l'existence de solutions pour un système différentiel (voir [Pom94, p. 81]) ou encore le théorème de Perron-Frobenius (voir [Ser01, p. 54]).

Questions possibles

1. Énoncer la caractérisation des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes.
2. Trouver une fonction $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U borné de $\mathbb{R}^2$ qui ne soit pas lipschitzienne.
3. Montrer qu'un segment n'est pas homéomorphe à un cercle.
4. Soit $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue bornée, soit $f : x \mapsto x + v(x)$. Montrer que f est surjective.
5. Démontrer de manière simple le théorème de Brouwer en dimension 1.
6. Démontrer le théorème de Brouwer pour un compact convexe en dimension finie, à partir du théorème de Brouwer pour la boule unité.
7. Démontrer le lemme de non-rétraction pour une fonction continue à l'aide du théorème de Brouwer.

Références

[AZ06] Martin Aigner et Günter M. Ziegler : *Raisonnements divins.* Springer, 2006.

[BBR87] Nicolas Bonnault, Jean-François Burnol et Philippe Roché : *Analyse, Math Sup et Math Spé : Problèmes corrigés posés à l'oral des concours.* Dunod, 1987.

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré : *Objectif agrégation.* H & K, 2005.

[CLFM97] Antoine Chambert-Loir, Stéfane Fermigier et Vincent Maillot : *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : Analyse 1.* Masson, 1997.

[GT96] Stéphane Gonnord et Nicolas Tosel : *Thèmes d'analyse pour l'agrégation : Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[GT98] Stéphane Gonnord et Nicolas Tosel : *Thèmes d'analyse pour l'agrégation : Calcul différentiel.* Ellipses, 1998.

[Laf10] Jacques Lafontaine : *Introduction aux variétés différentielles.* EDP Sciences, 2010.

[Pom94] Alain Pommellet : *Cours d'analyse : agrégation de mathématiques.* Ellipses, 1994.

[Rou09] François Rouvière : *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, 2009.

[Ser01] Denis Serre : *Les matrices : théorie et pratique.* Dunod, 2001.