Théorèmes d'Abel et de Hardy-Littlewood

Mon développement

Théorème (Abel). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et de somme f. Pour tout $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\} .$$

Si la série $\sum a_n$ converge, alors, pour tout $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, la limite $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z)$ existe et on a

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n .$$

On note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k .$$

Soient $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $z \in \Delta_{\theta_0}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=1}^{N} a_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\
&= (z - 1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1) .
\end{aligned}$$

Puisque $|R_n z^n| = o(|z|^n)$ quand $n \to +\infty$ et $|z| < 1$, la série $\sum R_n z^n$ converge.
En faisant tendre $N \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient donc

$$f(z) - S = (z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|R_n| \leq \varepsilon$. De plus, il existe $\rho > 0$ et $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ tels que $z = 1 - \rho e^{i\theta}$. On a donc

$$\begin{aligned}
|f(z) - S| &\leq |z - 1| \left(\sum_{n=0}^{N-1} |R_n| + \varepsilon \sum_{n=N}^{+\infty} |z|^n \right) \\
&\leq |z - 1| \left(\sum_{n=0}^{N-1} |R_n| + \varepsilon \frac{1}{1 - |z|} \right) .
\end{aligned}$$

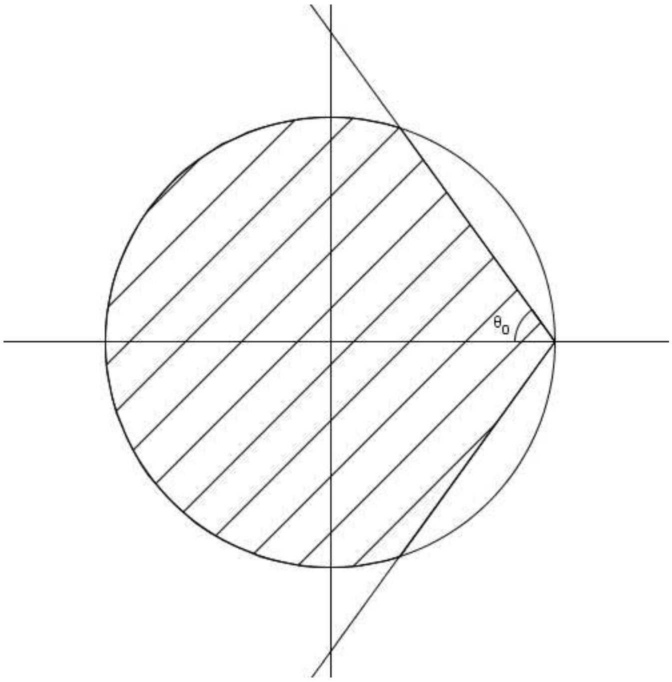

FIGURE 1 – Domaine Δ_{θ_0}.

Puisque

$$\frac{|z-1|}{1-|z|}=\frac{\rho(1+|z|)}{1-|z|^2}\leq\frac{2\rho}{2\rho\cos\theta-\rho^2}=\frac{2}{2\cos\theta_0-\rho},$$

dès que $\rho=|z-1|$ est inférieur à

$$\min\left(\frac{\varepsilon}{\sum_{0\leq n\leq N-1}|R_n|},\cos\theta_0\right),$$

on a

$$|f(z)-S|\leq\varepsilon+\frac{2\varepsilon}{\cos\theta_0}.$$

Cela prouve bien que $f(z)$ tend vers S quand $z\to 1$, $z\in\Delta_{\theta_0}$. □

Théorème (Hardy-Littlewood). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et de somme f.
Si la limite $l=\lim\limits_{z\to 1^-}f(z)$ existe dans $\mathbb{C}$ et si $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$, alors, la série $\sum a_n$ converge de somme l.

Quitte à remplacer a_0 par a_0-l, on va supposer que $l=0$.
Par hypothèse, il existe $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)|a_n|\leq M$. De plus, on note

$$a:t\mapsto a_{[t]}\ ,\quad g:t\mapsto \mathbf{1}_{[e^{-1},1]}(t)\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N},\ S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\,.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on réécrit

$$S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}a(t)\,dt=\int_0^n a(t)\,dt=n\int_0^1 a(nt)\,dt=n\int_0^{+\infty}a(nt)g(e^{-t})\,dt\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{g(x)-x}{x(1-x)}$ est continue par morceaux sur $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de Weierstrass et par densité de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ dans $L^1([0,1],\mathbb{C})$, il existe donc une fonction polynomiale P telle qu'on ait

$$\int_0^1 \left| \frac{g(x)-x}{x(1-x)} - P(x) \right| dx < \varepsilon\,,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{g(e^{-t}) - e^{-t} - e^{-t}(1-e^{-t})P(e^{-t})}{1-e^{-t}} \right| dt < \varepsilon\,.$$

On note $Q = X + X(1-X)P(X)$ puis $Q = \sum_{k=1}^d c_k X^k$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\left| S_{n-1} - \sum_{k=1}^d c_k \int_0^{+\infty} a(t) e^{-kt/n}\, dt \right| &= \left| S_{n-1} - n \sum_{k=1}^d c_k \int_0^{+\infty} a(nt) e^{-kt}\, dt \right| \\
&= n \left| \int_0^{+\infty} a(nt)(g(e^{-t}) - Q(e^{-t}))\, dt \right| \\
&\leq n \int_0^{+\infty} \frac{M}{[nt]+1} |g(e^{-t}) - Q(e^{-t})|\, dt \\
&\leq M \int_0^{+\infty} \frac{|g(e^{-t}) - Q(e^{-t})|}{1-e^{-t}}\, dt \leq M\varepsilon
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que pour tout $t > 0$, $[nt] + 1 > nt \geq n(1-e^{-t})$.

Or, pour tout $s > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} a(t) e^{-st}\, dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} a(t) e^{-st}\, dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{e^{-sn} - e^{-s(n+1)}}{s} \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-sn} \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s} f(e^{-s})
\end{aligned}$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| S_{n-1} - \sum_{k=1}^d c_k \frac{1-e^{-k/n}}{k/n} f(e^{-k/n}) \right| \leq M\varepsilon\,.$$

Or, quand $n \to +\infty$, pour tout $k \in [\![1,d]\!]$, $\frac{1-e^{-k/n}}{k/n}$ tend vers 1, et $f(e^{-k/n})$ tend vers $l = 0$ par hypothèse. On a donc

$$\limsup_{n\to+\infty} |S_{n-1}| \leq M\varepsilon\,.$$

On en déduit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite 0. □

Références

J'ai utilisé [Gou08, p. 252], [CLFM97, p. 108]. On peut aussi consulter [FGN09, p. 180], [Gou08, p. 289], [Pom94, p. 232].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 207, 230, 243, 247. On peut également l'utiliser pour la leçon 241.

Remarques

- Le théorème de Hardy-Littlewood est une réciproque du théorème d'Abel mais elle n'est que partielle puisqu'on rajoute la condition $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
- À la place du théorème de Hardy-Littlewood, on peut présenter une version faible de ce théorème, où $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, voir par exemple [Gou08, p. 253] ou [FGN09, p. 222].
- Pour l'application du théorème d'Abel au calcul de $\sum \frac{x^n}{n}$ ou de $\sum \frac{\sin(nt)}{n}$, voir [Gou08, p. 253] ou [FGN09, p. 184] par exemple.
- Dans le théorème d'Abel, on a utilisé la transformation d'Abel, ce sur quoi on peut insister si on le souhaite.
- Il existe d'autres théorèmes abéliens et taubériens, voir [ZQ07, pp. 7, 547] ou [Pom94, p. 203] pour d'autres théorèmes taubériens.

Questions possibles

1. Donner un contre-exemple au théorème d'Abel.
2. Montrer que la réciproque du théorème d'Abel est fausse sans hypothèse supplémentaire.
3. Dans quelle mesure le théorème de Hardy-Littlewood est-il une réciproque du théorème d'Abel ?
4. Dans le théorème d'Abel radial, y a-t-il un problème en -1 ?
5. Dans le théorème d'Abel, que se passe-t-il si on suppose que la série $\sum a_n$ converge absolument ?
6. L'hypothèse $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ du théorème taubérien faible est-elle nécessaire ?
7. Expliquer comment calculer la somme $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sans utiliser le théorème d'Abel.
8. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum z^{2^n}$.

Références

[CLFM97] Antoine Chambert-Loir, Stéfane Fermigier et Vincent Maillot : *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : Analyse 1.* Masson, 1997.

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Analyse 2.* Cassini, 2009.

[Gou08] Xavier Gourdon : *Analyse.* Ellipses, 2008.

[Pom94] Alain Pommellet : *Cours d'analyse : agrégation de mathématiques.* Ellipses, 1994.

[ZQ07] Claude Zuily et Hervé Queffélec : *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.