Image de l'exponentielle matricielle

Mon développement

Lemme. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

D'après le théorème de décomposition de Dunford, il existe D diagonalisable et N nilpotente telles que $M = D+N$ et D et N sont des polynômes en M (en particulier $DN = ND$). De plus, M est inversible et D a les mêmes valeurs propres que M, donc D est inversible.

Puisque D est diagonalisable et inversible, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que

$$D = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} .$$

De plus, $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective donc il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e^{\mu_i} = \lambda_i$. On note alors Q le polynôme interpolateur de Lagrange associé aux familles $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$.
On a

$$Q(D) = PQ\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) P^{-1} = P \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

d'où

$$\exp(Q(D)) = \exp\left(P \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1} \right) = P \begin{pmatrix} e^{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\mu_n} \end{pmatrix} P^{-1} = D .$$

$Q(D)$ étant un polynôme en M, on en déduit qu'il existe $A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $D = \exp(A(M))$.

Par ailleurs, puisque D est inversible et les matrices D et N commutent, on a $(D^{-1}N)^k = D^{-k}N^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc, N étant nilpotente, $D^{-1}N$ l'est aussi. On a donc

$$I_n + D^{-1}N = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (D^{-1}N)^k \right) . \qquad (1)$$

De plus, D^{-1} est un polynôme en D. En effet, en notant $\chi_D = (-1)^n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ le polynôme caractéristique de D, on a $a_0 = \det(D) \neq 0$ car D est inversible. La relation $\chi_D(D) = 0$ donne alors

$$D^{-1} = -\frac{1}{a_0} \left((-1)^n D^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k D^{k-1} \right) .$$

D et N étant des polynômes en M, on en conclut qu'il existe $B \in \mathbb{C}[X]$ tel que $I_n + D^{-1}N = \exp(B(M))$.

En conclusion, on a

$$M = D(I_n + D^{-1}N) = \exp(A(M))\exp(B(M)) = \exp((A+B)(M))$$

car $A(M)$ et $B(M)$ commutent, ce qui termine la démonstration du lemme. $\square$

Proposition. On a :

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$$

et

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) \,|\, \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = B^2\right\} \subsetneq GL_n(\mathbb{R})\,.$$

D'après le lemme, on a $GL_n(\mathbb{C}) \subset \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. L'inclusion réciproque étant bien connue, on en conclut que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \exp(B)$, donc $A = \left(\exp\left(\frac{1}{2}B\right)\right)^2$ est le carré d'une matrice inversible, donc inversible.
Réciproquement, soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = B^2$. On a $\det(B)^2 = \det(A) \neq 0$ donc B est inversible. D'après le lemme, il existe donc $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = \exp(P(B))$. Comme B est réelle, on a alors

$$A = B\overline{B} = \exp(P(B))\overline{\exp(P(B))} = \exp(P(B))\exp(\overline{P}(B)) = \exp((P+\overline{P})(B))$$

car $P(B)$ et $\overline{P}(B)$ commutent. Le polynôme $P+\overline{P}$ étant réel, A appartient donc à $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. On en conclut finalement que

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) \,|\, \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = B^2\right\}\,.$$

Cet ensemble est strictement inclus dans $GL_n(\mathbb{R})$. En effet, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible mais son déterminant vaut -1 alors que pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(B^2) = (\det B)^2 \geq 0$. Ce ne peut donc être le carré d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\square$

Références

J'ai utilisé [BMP05, p. 214]. On peut aussi consulter [FGN09, p. 244].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 124, 127. On peut également l'utiliser pour les leçons 126, 128.

Remarques

– Si on propose ce développement dans une leçon, il vaut mieux ne pas proposer comme second développement le théorème de décomposition de Dunford pour varier le choix du jury.

– Dans le lemme, on peut aussi utiliser le polynôme minimal pour montrer que D^{-1} est un polynôme en D.
– Pour obtenir la relation (1), on a besoin de [MT86, théorème 3.3.3], c'est-à-dire le fait que l'exponentielle réalise une bijection entre les matrices nilpotentes et les matrices unipotentes et que sa réciproque est le logarithme. Ce résultat est à mentionner dans le plan de la leçon et sa démonstration peut être insérée au développement. Voir [MT86, p. 60] ou [FGN09, p. 244].
– De même, le théorème de décomposition de Dunford doit apparaître dans le plan et il faut indiquer clairement qu'il sert pour le développement.

Questions possibles

1. Justifier la surjectivité de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.
2. Donner le principe de la démonstration du théorème de décomposition de Dunford.
3. Justifier la relation (1).
4. Discuter de l'injectivité de l'exponentielle matricielle.
5. Citer d'autres surjections réalisées par l'exponentielle.
6. Les matrices
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$
sont-elles des exponentielles de matrices ?
7. Déduire de la proposition démontrée dans le développement que l'application $M \mapsto M^2$ est surjective sur $GL_n(\mathbb{C})$. Vérifier ensuite qu'elle n'est pas surjective sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
8. Montrer que pour toute matrice $A \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, les valeurs propres négatives de A sont de multiplicité paire. Montrer que la réciproque est fausse en considérant la matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
9. Montrer que la matrice
$$J_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
n'est le carré ni l'exponentielle d'aucune matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mais que
$$J_4 = \begin{pmatrix} J_2 & 0_2 \\ 0_2 & J_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_3 = \begin{pmatrix} J_2 & I_2 \\ 0_2 & J_2 \end{pmatrix}$$
sont le carré et l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
10. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
11. Montrer que toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ admet une racine p-ième pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Références

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré : *Objectif agrégation.* H & K, 2005.

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 2*. Cassini, 2009.

[MT86] Rached Mneimné et Frédéric Testard : *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1986.