Théorème de décomposition polaire

Mon développement

On note respectivement $\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n^+, \mathcal{H}_n^{++}, \mathcal{S}_n, \mathcal{S}_n^+, \mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices hermitiennes, hermitiennes positives, hermitiennes définies positives, symétriques, symétriques positives, symétriques définies positives de taille $n \times n$. De plus, on note resp. U_n et O_n les groupes unitaire et orthogonal, c'est-à-dire

$$U_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid MM^* = M^*M = I_n\} , \quad O_n = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^tM =^t MM = I_n\right\} .$$

Lemme. U_n (resp. O_n) est un sous-groupe compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Il est tout d'abord clair que U_n est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Ensuite, U_n est fermé puisque c'est l'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto MM^*$.
Enfin, U_n est borné puisque pour toute matrice $U \in U_n$, on a $\|U\|_2 = (\mathrm{Tr}(UU^*))^{1/2} = \sqrt{n}$.
U_n est donc un sous-groupe compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On montre de même que O_n est un sous-groupe compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

Proposition.
- Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Il existe un unique couple $(H, Q) \in \mathcal{H}_n^{++} \times U_n$ tel que $M = HQ$.
- L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{H}_n^{++} \times U_n \\ M & \mapsto & (H,Q) \end{array}$ est un homéomorphisme.
- On a le même résultat en remplaçant $GL_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{H}_n^{++}$, U_n par $GL_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}$, O_n respectivement.

Tout d'abord, soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$.
La matrice MM^* étant clairement hermitienne définie positive, on sait qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $U \in U_n$ tels que $MM^* = U^*DU$, où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. On note alors

$$H = U^* \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} U .$$

La matrice H appartient également à $\mathcal{H}_n^{++}$ et on a $H^2 = MM^*$.
La matrice $Q = H^{-1}M$ vérifie quant à elle

$$Q^*Q = M^*(H^*)^{-1}H^{-1}M = M^*(H^2)^{-1}M = M^*(M^*)^{-1}M^{-1}M = I_n$$

donc Q appartient à U_n. Et on a par définition $M = HQ$.
On a finalement construit un couple $(H, Q) \in \mathcal{H}_n^{++} \times U_n$ tel que $M = HQ$, c'est-à-dire une décomposition polaire de M.

On s'intéresse maintenant à l'unicité. Soient $H, H' \in \mathcal{H}_n^{++}$ et $Q, Q' \in U_n$ telles que $M = HQ = H'Q'$.
On note
$$N = H^{-1}H' = Q(Q')^* .$$
D'une part, un produit de deux matrices unitaires étant unitaire, la matrice N appartient à U_n, donc son spectre est inclus dans le cercle unité $\mathbb{S}^1$.
D'autre part, en reproduisant la construction faite ci-dessus, il existe $S \in \mathcal{H}_n^{++}$ telle que $H' = S^2$. Alors, $N = H^{-1}S^2 = S^{-1}(SH^{-1}S)S$ donc N est semblable à la matrice hermitienne définie positive $SH^{-1}S$. Comme elle, N est donc diagonalisable et son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
En regroupant ces deux points, on en déduit que N est diagonalisable et que son spectre est $\{1\}$, donc $N = I_n$.
Cela prouve que $H = H'$ et $Q = Q'$, d'où l'unicité de la décomposition polaire.

L'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{H}_n^{++} \times U_n \\ M & \mapsto & (H, Q) \end{array}$$
est donc bien définie et elle est clairement bijective, de réciproque $(H, Q) \mapsto HQ$. De plus, cette réciproque est polynomiale donc continue. On va maintenant montrer que φ est continue.
Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $GL_n(\mathbb{C})$ de limite notée M.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $M_k = H_kQ_k$ la décomposition polaire de M_k, et on note $M = HQ$ celle de M.
Soit R une valeur d'adhérence de $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Puisque U_n est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, R est aussi unitaire. De plus, il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(Q_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge de limite R. Alors, quand $k \to +\infty$, $H_{\psi(k)} = M_{\psi(k)}Q^*_{\psi(k)}$ tend vers MR^*. Cette limite, notée S, est hermitienne positive (limite de matrices hermitiennes définies positives) et elle est inversible (produit de deux matrices inversibles), donc S appartient à $\mathcal{H}_n^{++}$. Puisque $M = SR$ avec $S \in \mathcal{H}_n^{++}$ et $R \in U_n$, par unicité de la décomposition polaire de M, on a $S = H$ et $R = Q$.
On a ainsi montré que $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet au plus une valeur d'adhérence dans U_n, et que ce ne peut être que Q. Comme U_n est compact, on en déduit que $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge de limite Q.
Enfin, puisque $H_k = M_kQ_k^*$, la suite $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge de limite $MQ^* = H$.
L'application φ est donc continue sur $GL_n(\mathbb{C})$.
Finalement, φ est un homéomorphisme de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_n^{++} \times U_n$.

La démonstration dans le cas réel est exactement la même. □

Références

J'ai utilisé [Ser01, p. 78], [MT86, p. 19]. On peut aussi consulter [Gou09, p. 249], [FGN10, pp. 126, 128, 177], [Gri11, p. 262], [MT86, p. 18], [Ale99, p. 138].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 106, 130, 133. On peut également l'utiliser pour la leçon 126.

Remarques

– On peut redémontrer l'existence d'une racine carrée de MM^* dans ce développement car ce n'est pas très long.
– La compacité de U_n étant assez courte à démontrer, il peut être avantageux de l'insérer dans le développement.
– J'utilise le théorème de décomposition polaire pour une matrice non inversible dans le développement « Théorème de Krein-Milman », pour démontrer que l'enveloppe convexe du groupe orthogonal est la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Questions possibles

1. Montrer que si $M \in GL_n(\mathbb{C})$, alors la matrice MM^* appartient à $\mathcal{H}_n^{++}$.
2. Justifier que toute matrice de $\mathcal{H}_n^{++}$ est inversible.
3. Discuter du spectre et de la réduction des matrices de $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{H}_n^{+}$, $\mathcal{H}_n^{++}$, U_n, O_n respectivement.
4. Donner un exemple de matrice hermitienne qui est limite de matrices hermitiennes définies positives mais qui n'est pas définie positive.
5. Préciser quelle topologie est utilisée dans le lemme.
6. Montrer que U_n est un sous-groupe compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
7. Une matrice non inversible admet-elle une décomposition polaire ? Celle-ci est-elle unique ?
8. La démonstration dans le cas complexe peut-elle s'adapter au cas réel ?

Références

[Ale99] Michel Alessandri : *Thèmes de géométrie : groupes en situation géométrique.* Dunod, 1999.

[FGN10] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 3.* Cassini, 2010.

[Gou09] Xavier Gourdon : *Algèbre.* Ellipses, 2009.

[Gri11] Joseph Grifone : *Algèbre linéaire.* Cepaduès, 2011.

[MT86] Rached Mneimné et Frédéric Testard : *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.* Hermann, 1986.

[Ser01] Denis Serre : *Les matrices : théorie et pratique.* Dunod, 2001.