Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

Mon développement

Dans ce développement, $\|.\|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^n$ et également la norme subordonnée à celle-ci. On note $B(a,r)$, resp. $\overline{B}(a,r)$, une boule ouverte, resp. fermée, pour cette norme.

Théorème (d'inversion locale). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Si $Df(a)$ est inversible, alors il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a et un ouvert $W \subset \mathbb{R}^n$ contenant $f(a)$ tels que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W.

Quitte à considérer $x \mapsto Df(a)^{-1}(f(a+x) - f(a))$, on peut supposer que $a = 0$, $f(a) = 0$ et $Df(a) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(0,r) \subset U$ et $\forall x \in \overline{B}(0,r)$,

$$\|Df(x) - \mathrm{Id}\,\| = \|Df(x) - Df(a)\| \leq \frac{1}{2} \ .$$

Pour tout $x \in \overline{B}(0,r)$, $Df(x)$ est donc inversible, on a

$$Df(x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{Id} - Df(x))^n$$

et donc $\|Df(x)^{-1}\| \leq 2$.

Soit $y \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$. La fonction

$$h_y : \begin{array}{ccc} \overline{B}(0,r) & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & y + x - f(x) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{B}(0,r)$ et $\forall x \in \overline{B}(0,r)$, on a $\|Dh_y(x)\| = \|\,\mathrm{Id} - Df(x)\| \leq \frac{1}{2}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc

$$\forall x, x' \in \overline{B}(0,r),\ \|h_y(x) - h_y(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\| \ . \tag{1}$$

En particulier, pour tout $x \in \overline{B}(0,r)$,

$$\|h_y(x)\| \leq \|h_y(x) - y\| + \|y\| \leq \frac{1}{2}\|x - 0\| + \|y\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \ . \tag{2}$$

h_y est donc une application envoyant $\overline{B}(0,r)$ sur elle-même et $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.
Comme $\overline{B}(0,r)$ est complet (fermé d'un espace complet), d'après le théorème du point fixe, il existe un unique $x \in \overline{B}(0,r)$ tel que $h_y(x) = x$, c'est-à-dire $f(x) = y$. Plus précisément, x appartient à $B(0,r)$ car h_y est à valeurs dans $B(0,r)$ d'après (2).

Ainsi, $V = f^{-1}\left(B\left(0, \frac{r}{2}\right)\right) \cap B(0,r)$ est un ouvert (car f est continue) contenant 0 (car $f(0) = 0$) et f est une bijection de V sur $B\left(0, \frac{r}{2}\right)$. On note g la réciproque de $f|_V$. Comme $h_0 = \mathrm{Id} - f$, d'après l'inégalité triangulaire et (1), on a

$$\forall x, x' \in B(0,r),\ \|x - x'\| \leq \|h_0(x) - h_0(x')\| + \|f(x) - f(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\| + \|f(x) - f(x')\|$$

donc

$$\forall x, x' \in B(0,r),\ \|x - x'\| \leq 2\|f(x) - f(x')\|$$

et

$$\forall y, y' \in B\left(0, \frac{r}{2}\right),\ \|g(y) - g(y')\| \leq 2\|y - y'\|\ . \tag{3}$$

Ainsi, g est lipschitzienne donc continue sur $f(V)$.

Soient $x \in V$, $y = f(x)$, $w \in \mathbb{R}^n$ tel que $y + w \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$ et $v = g(y+w) - g(y)$. D'après (3), on a $\|v\| \leq 2\|w\|$ et par définition de v,

$$\Delta(w) = g(y+w) - g(y) - Df(x)^{-1}(w)$$

vérifie

$$\Delta(w) = v - Df(x)^{-1}(f(x+v) - f(x)) = -Df(x)^{-1}(f(x+v) - f(x) - Df(x)(v))\ .$$

Par définition de $Df(x)$, il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admettant une limite nulle en 0 telle que $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $f(x+v) - f(x) - Df(x)(v) = \varepsilon(v)\|v\|$. Alors,

$$\|\Delta(w)\| \leq 2\varepsilon(v)\|v\| \leq 4\|w\|\varepsilon(g(y+w) - g(y)) = 4\|w\|\varepsilon'(w)$$

où $\varepsilon' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction admettant une limite nulle en 0 car g est continue.
Cela prouve que g est différentiable et $\forall x \in V$, $Dg(f(x)) = Df(x)^{-1}$.
Ainsi, puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, g est continue et $u \mapsto u^{-1}$ est continue, l'application $Dg : y \mapsto Df(g(y))^{-1}$ est continue, autrement dit, g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Finalement, f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $B\left(0, \frac{r}{2}\right)$. ☐

Théorème (des fonctions implicites). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$. Si $f(a,b) = 0$ et $D_y f(a,b)$ est inversible, alors il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert $W \subset \mathbb{R}^p$ contenant b et $\varphi \in \mathcal{C}^1(V, W)$ tels que $V \times W \subset U$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in V,\ y \in W \\ f(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in V \\ y = \varphi(x) \end{array} \right. .$$

La fonction

$$F : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \\ (x,y) & \mapsto & (x, f(x,y)) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a, pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$,

$$DF(a,b)(h_1,h_2) = (h_1, Df(a,b)(h_1,h_2)) = (h_1, D_x f(a,b)(h_1) + D_y f(a,b)(h_2))\ .$$

$DF(a,b)$ est donc inversible, d'inverse

$$DF(a,b)^{-1} : (l_1, l_2) \mapsto \left(l_1, D_y f(a,b)^{-1}(l_2 - D_x f(a,b)(l_1))\right)\ .$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert $\Omega \subset U$ contenant (a,b) et un ouvert Ω' contenant $(a,0)$ tels que F soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur Ω'. Vue la forme de F, quitte à restreindre Ω et Ω', on peut supposer qu'il existe un ouvert V contenant a, un ouvert W contenant b et un ouvert X contenant 0 tels que $\Omega = V \times W$ et $\Omega' = V \times X$.

De plus, il existe $\psi : \Omega' \to W$ telle que $\forall (x,z) \in \Omega'$, $F^{-1}(x,z) = (x, \psi(x,z))$. Cette fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme F^{-1}, et on a

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}(x,y) \in V \times W \\ f(x,y) = 0\end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x,y) \in V \times W \\ F(x,y) = (x,0)\end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \in V \\ (x,y) = F^{-1}(x,0) = (x, \psi(x,0))\end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \in V \\ y = \psi(x,0)\end{array}\right. .\end{aligned}$$

La fonction $\varphi = \psi(.\,,0)$ satisfait alors toutes les propriétés du théorème. □

Références

J'ai utilisé [Gou08, pp. 321, 324].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 206, 214, 215.

Remarques

- $D_x f$ et $D_y f$ désignent les différentielles partielles de f, voir [Gou08, p. 324].
- Le théorème d'inversion locale a des applications variées pouvant elles-mêmes constituer un développement.

Questions possibles

1. Justifier que l'application
$$\begin{array}{ccc} GL(\mathbb{R}^n) & \to & GL(\mathbb{R}^n) \\ u & \mapsto & u^{-1} \end{array}$$
est continue.
2. Le théorème d'inversion locale admet-il une réciproque ?
3. Expliquer comment on calcule la différentielle de la fonction implicite donnée par le théorème des fonctions implicites.
4. Citer une autre application du théorème d'inversion locale.

Références

[Gou08] Xavier Gourdon : *Analyse.* Ellipses, 2008.