Théorème des extremums liés

Mon développement

Théorème. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$,

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = \ldots = g_k(x) = 0\}$$

et $m \in M \cap U$.
Si $f|_{M\cap U}$ présente un extremum local en m et si les formes linéaires $Dg_1(m), \ldots, Dg_k(m)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$Df(m) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Dg_i(m) \ .$$

Avec les notations et hypothèses du théorème, M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On sait alors que l'espace tangent T_mM est égal à l'intersection $\bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker}(Dg_i(m))$.

Soit $v \in T_mM$. Il existe un intervalle I contenant 0 et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\gamma(I) \subset M$, $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$. La fonction $f \circ \gamma$ présente donc un extremum local en 0, donc

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = Df(\gamma(0))(\gamma'(0)) = Df(m)(v) \ .$$

On a donc

$$\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(Dg_i(m)) \subset \operatorname{Ker}(Df(m)) \ . \tag{1}$$

Par ailleurs, on note $b_1, \ldots, b_k$ les formes linéaires $Dg_1(m), \ldots, Dg_k(m)$. On peut compléter la famille $(b_1, \ldots, b_k)$ en une base $(b_1, \ldots, b_n)$ du dual $(\mathbb{R}^n)^*$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base anté-duale. Il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $Df(m) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$. On a pour tous $i \in [\![1, k]\!]$ et $j \in [\![k+1, n]\!]$, $Dg_i(m)(e_j) = b_i(e_j) = 0$ donc, d'après (1),

$$\forall j \in [\![k+1, n]\!],\ 0 = Df(m)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i(e_j) = \lambda_j$$

d'où

$$Df(m) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Dg_i(m) \ .$$

Le théorème est donc démontré. □

Application 1. Soit E un espace euclidien de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint. Le spectre de u est réel et il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

On démontre ce résultat par récurrence sur la dimension de E.

Initialisation.

Si E est de dimension 1, le résultat est immédiat.

Hérédité.
On suppose que la propriété est vérifiée pour tout espace de dimension n. Soient E un espace euclidien de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint.
Les applications

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle u(x), x\rangle \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x, x\rangle - 1 \end{array}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur E. De plus, la sphère unité de E

$$S = \{x \in E \mid g(x) = 0\}$$

est compacte car E est de dimension finie. f est donc bornée sur S et atteint son maximum sur S, en un point noté e_1.
Pour tout $x \in E$, $Df(x)$ et $Dg(x)$ sont les applications

$$Df(x) : h \mapsto 2\langle u(x), h\rangle \quad \text{et} \quad Dg(x) : h \mapsto 2\langle x, h\rangle \ .$$

D'après le théorème des extremums liés, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $Df(e_1) = \lambda_1 Dg(e_1)$. On a donc : $\forall h \in E$, $2\langle u(e_1), h\rangle = 2\lambda_1\langle e_1, h\rangle$. Donc $u(e_1) = \lambda_1 e_1$. En particulier, la droite engendrée par e_1 est stable par u donc, puisque u est auto-adjoint, $\mathrm{Vect}(e_1)^\perp$ est aussi stable par u. Ainsi $u_{\mathrm{Vect}(e_1)^\perp}$ est un endomorphisme auto-adjoint sur un espace euclidien de dimension n.

D'après l'hypothèse de récurrence, le spectre $\{\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}\}$ de $u_{\mathrm{Vect}(e_1)^\perp}$ est réel et il existe une base orthonormée $(e_2, \ldots, e_{n+1})$ de vecteurs propres de $u_{\mathrm{Vect}(e_1)^\perp}$.
Finalement, le spectre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}\}$ de u est réel et $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de u.

Le théorème est donc démontré par récurrence. □

Application 2. Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée à trois rebonds.

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on considère une ellipse $\mathcal{E}$ d'équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \ .$$

On note

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^3 & \to & \mathbb{R} \\ (A, B, C) & \mapsto & AB + BC + CA \end{array} \ .$$

La fonction f étant continue sur le compact $\mathcal{E}^3$, elle y atteint son maximum en un triplet (A_0, B_0, C_0). Ces trois points de l'ellipse sont forcément distincts.
En effet, si on dispose de trois points de l'ellipse dont deux au moins sont confondus, alors ils forment un triangle plat, donc il est clair qu'en considérant un point de l'ellipse distinct de ceux-ci, on peut former un triangle inscrit de périmètre strictement supérieur.
On note ensuite

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 \end{array}$$

puis

$$g_1 : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^3 & \to & \mathbb{R} \\ (A,B,C) & \mapsto & g(A) \end{array}, \quad g_2 : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^3 & \to & \mathbb{R} \\ (A,B,C) & \mapsto & g(B) \end{array} \quad \text{et} \quad g_3 : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^3 & \to & \mathbb{R} \\ (A,B,C) & \mapsto & g(C) \end{array} .$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\forall (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2,\ Dg(x,y)(h_1,h_2) = \frac{2xh_1}{a^2} + \frac{2yh_2}{b^2} .$$

Les fonctions g_1, g_2, g_3 sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}^2)^3$ et pour tous $A,B,C \in \mathbb{R}^2$ et tous $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^2$, on a $Dg_1(A,B,C)(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = Dg(A)(\overrightarrow{a})$, $Dg_2(A,B,C)(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = Dg(B)(\overrightarrow{b})$ et $Dg_3(A,B,C)(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = Dg(C)(\overrightarrow{c})$.

On note U l'ouvert de $(\mathbb{R}^2)^3$ constitué des triplets de points deux à deux distincts.
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
- Les fonctions g_1, g_2, g_3 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
- On a $\mathcal{E}^3 = \{(A,B,C) \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid g_1(A,B,C) = g_2(A,B,C) = g_3(A,B,C) = 0\}$.
- (A_0,B_0,C_0) appartient à $U \cap \mathcal{E}^3$.
- La restriction $f|_{U\cap\mathcal{E}^3}$ admet un extremum local en (A_0,B_0,C_0).
- Les formes linéaires $Dg_1(A_0,B_0,C_0)$, $Dg_2(A_0,B_0,C_0)$ et $Dg_3(A_0,B_0,C_0)$ sont linéairement indépendantes.

D'après le théorème des extremums liés, il existe un unique $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$Df(A_0,B_0,C_0) = \lambda_1 Dg_1(A_0,B_0,C_0) + \lambda_2 Dg_2(A_0,B_0,C_0) + \lambda_3 Dg_3(A_0,B_0,C_0) .$$

En particulier, pour tous $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $Dg(A_0)(\overrightarrow{a}) = 0$, $Dg(B_0)(\overrightarrow{b}) = 0$ et $Dg(C_0)(\overrightarrow{c}) = 0$, on a

$$Df(A_0,B_0,C_0)(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0 . \tag{2}$$

Or, d'une part, pour tout $A \in \mathcal{E}$ et tout $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$Dg(A)(\overrightarrow{a}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{a} \text{ est tangent à } \mathcal{E} \text{ en } A . \tag{3}$$

En effet, le point de coordonnées (x',y') appartient à la tangente à $\mathcal{E}$ au point de coordonnées (x,y) si et seulement si

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

ce qui équivaut à $Dg(x,y)(x'-x, y'-y) = 0$. On en déduit ainsi l'équivalence (3).

D'autre part, en notant

$$\overrightarrow{u_0} = \frac{\overrightarrow{A_0B_0}}{A_0B_0}, \quad \overrightarrow{v_0} = \frac{\overrightarrow{B_0C_0}}{B_0C_0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w_0} = \frac{\overrightarrow{C_0A_0}}{C_0A_0} ,$$

on a

$$\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^2,\ Df(A_0,B_0,C_0)(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{u_0}.(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{v_0}.(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{w_0}.(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}) . \tag{4}$$

En effet, l'application $(M,N) \mapsto MN^2 = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MN}$ est différentiable sur $(\mathbb{R}^2)^2$ de différentielle en (M,N) égale à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto 2\overrightarrow{MN}.(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u})$. L'application $(M,N) \mapsto MN$ est donc différentiable sur l'ouvert des couples des points de $\mathbb{R}^2$ distincts, sa différentielle en (M,N) étant $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \frac{1}{2MN} 2\overrightarrow{MN}.(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u})$. On en déduit la différentiabilité de f en (A_0, B_0, C_0) et la relation (4).

Finalement, d'après (2), (3) et (4), en prenant $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$, on obtient que pour tout $\overrightarrow{a}$ tangent à $\mathcal{E}$ en A_0, $\overrightarrow{u_0}.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{w_0}.\overrightarrow{a}$. De même, pour tous $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ tangents à $\mathcal{E}$ resp. en B_0, C_0, on a $\overrightarrow{u_0}.\overrightarrow{b} = \overrightarrow{v_0}.\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{v_0}.\overrightarrow{c} = \overrightarrow{w_0}.\overrightarrow{c}$. Ce sont les trois conditions de rebond recherchées. $A_0B_0C_0$ est donc une trajectoire de billard fermée à trois rebonds. $\square$

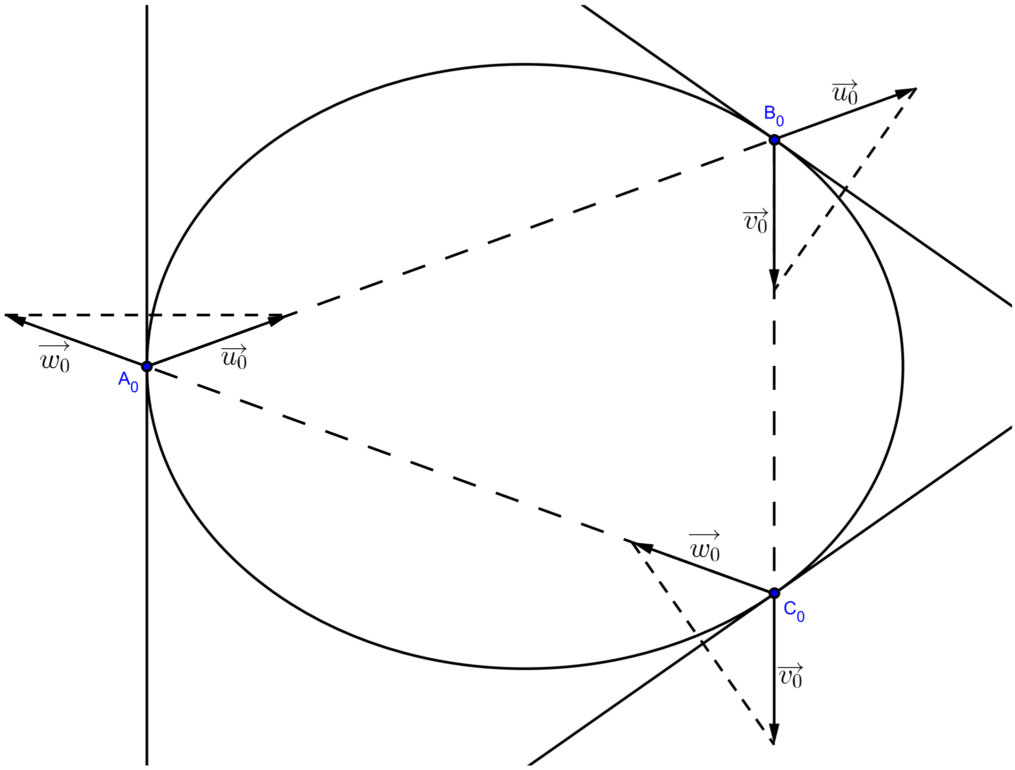

FIGURE 1 – Une trajectoire fermée à trois rebonds.

Références

J'ai utilisé [Ave83, p. 103], [Rou09, p. 413].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 130, 215, 217, 219. On peut également l'utiliser pour les leçons 133, 144, 214.

Remarques

- Dans l'application 1, lorsque F est un sous-espace vectoriel stable par u, u_F désigne l'endomorphisme induit par u sur F.
- Dans l'application 1, on a noté $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire sur E tandis que dans l'application 2, on a noté . le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

- Dans l'application 2, on voit successivement un élément de $\mathbb{R}^2$ comme un point, un vecteur, un couple de réels. On jongle entre ces points de vue tout au long de l'application en fonction de ce qui est le plus pratique.
- L'application 2 est ici détaillée à l'extrême. Lors de l'oral, il faut en donner les grandes lignes et occulter une bonne partie des calculs.
- L'application 1 est plus adaptée pour les leçons 130 et 133, et l'application 2 pour les autres leçons.
- Le théorème des extremums liés a de nombreuses autres applications, voir leçon 217.

Questions possibles

1. Justifier que $T_m M \subset \mathrm{Ker}(Df(m))$.
2. Détailler le calcul de la différentielle de $(M, N) \mapsto MN^2$.
3. Que pourrait-on dire sur les extremums de f si on avait comme condition $M = \{g \leq 0\}$ au lieu de $M = \{g = 0\}$?
4. Démontrer le théorème spectral à l'aide du théorème des extremums liés.
5. Que peut-on dire des trajectoires de billard à n rebonds ?

Références

[Ave83] André Avez : *Calcul différentiel.* Masson, 1983.

[Rou09] François Rouvière : *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, 2009.