Théorème des invariants de similitude

Mon développement

Dans ce développement, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, on note Π_f le polynôme minimal de f, $\mathcal{L}_f = \{P(f),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$, P_x le polynôme minimal de x et $E_x = \{P(f)(x),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$. De plus, si F est un sous-espace stable par f, on note f_F l'endomorphisme induit par f sur F. Enfin, on note $\mathcal{C}(P)$ la matrice compagnon d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

Théorème. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ de E tels que :
(i) $F_1, \ldots, F_r$ sont stables par f,
(ii) $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_r$,
(iii) pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, l'endomorphisme f_{F_i}, noté f_i (utile ?), est cyclique (on note P_i son polynôme minimal),
(iv) pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$, P_{i+1} divise P_i.
De plus, l'entier r et les polynômes $P_1, \ldots, P_r$ ne dépendent pas de $F_1, \ldots, F_r$ mais uniquement de f. Ces polynômes sont appelés invariants de similitude de f.

Existence.

On note $k = \deg(\Pi_f)$. On sait qu'il existe $x \in E$ tel que $P_x = \Pi_f$, que le sous-espace vectoriel E_x est de dimension k et stable par f, et qu'une base de E_x est $(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x))$. On note $F = E_x$ et $(e_1, \ldots, e_k)$ la base précédente. On complète celle-ci en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On note $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale associée,

$$\Gamma = \left\{e_k^* \circ f^i,\ i \in \mathbb{N}\right\} = \left\{{}^t f^i(e_k^*),\ i \in \mathbb{N}\right\}$$

et $G = \Gamma^\circ$. G est en fait l'ensemble des $x \in E$ pour lesquels la k-ième coordonnée de $f^i(x)$ est nulle pour tout $i \in \mathbb{N}$. C'est un sous-espace vectoriel de E stable par f.

Soit $y \in F$ non nul. Il existe $p \in [\![1, k]\!]$ et $y_1, \ldots, y_p \in \mathbb{K}$ tels que $y_p \neq 0$ et $y = \sum_{i=1}^p y_i e_i$. On a donc

$${}^t f^{k-p}(e_k^*)(y) = e_k^*\left(\sum_{i=1}^p y_i f^{k-p}(e_i)\right) = e_k^*\left(\sum_{i=1}^p y_i e_{k-p+i}\right) = y_p \neq 0$$

donc y n'appartient pas à $\Gamma^\circ = G$.
On a donc

$$F \cap G = \{0\}\ . \tag{1}$$

Ensuite, l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_f & \to & \mathcal{L}(E) \\ g & \mapsto & e_k^* \circ g \end{array}$$

est linéaire et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\Gamma)$ par définition de $\mathrm{Vect}(\Gamma)$.
De plus, soit $g \in \mathcal{L}_f$ non nul. Il existe $p \in [\![1, k]\!]$ et $g_1, \ldots, g_p \in \mathbb{K}$ tels que $g_p \neq 0$ et $g = \sum_{i=1}^p g_i f^{i-1}$. On a donc

$$e_k^* \circ g(f^{k-p}(x)) = e_k^*\left(\sum_{i=1}^p g_i f^{k-p+i-1}(x)\right) = e_k^*\left(\sum_{i=1}^p g_i e_{k-p+i}\right) = g_p \neq 0$$

donc $\varphi(g) = e_k^* \circ g$ n'est pas nul. φ est donc injective.
D'après le théorème du rang, on a donc $\dim(\operatorname{Vect}\Gamma) = \dim(\mathcal{L}_f) = k$. G étant aussi égal à $(\operatorname{Vect}\Gamma)^\circ$, on a donc

$$\dim(G) = n - \dim(\operatorname{Vect}\Gamma) = n - k = n - \dim(F) \ . \tag{2}$$

Finalement, d'après (1) et (2), on a $E = F \oplus G$. De plus, F et G sont tous deux stables par f, f_F est cyclique et en notant P_1 et P_2 les polynômes minimaux de f_F et f_G, on a $\Pi_f = P_1$, donc $P_2 |\, P_1$.

En réitérant au plus n fois ce procédé, l'existence du théorème est ainsi démontrée.

Unicité.

On suppose qu'il existe $(F_1, \dots, F_r)$ et $(G_1, \dots, G_s)$ vérifiant les propriétés (i) à (iv). Pour tous $i \in [\![1, r]\!]$ et $j \in [\![1, s]\!]$, on note $P_i = \Pi_{f_{F_i}}$ et $Q_j = \Pi_{f_{G_j}}$. On a $P_1 = \Pi_f = Q_1$ par minimalité de Π_f et (iv).
On suppose que $(P_1, \dots, P_r) \neq (Q_1, \dots, Q_s)$.
L'entier $j = \min\{i \in \mathbb{N}^* \mid P_i \neq Q_i\}$ est bien défini, que ce soit dans le cas $r = s$ (évident) ou dans le cas $r \neq s$, puisque

$$\sum_{i=1}^{r} \deg(P_i) = \sum_{i=1}^{r} \dim(F_i) = n = \sum_{j=1}^{s} \dim(G_j) = \sum_{j=1}^{s} \deg(Q_j) \ .$$

D'après (iv), pour tout $k \in [\![j, r]\!]$, on a $P_j(f)(F_k) = \{0\}$, donc d'après (i) et (ii) :

$$P_j(f)(E) = P_j(f)(F_1) \oplus \ldots \oplus P_j(f)(F_{j-1}) \ .$$

De même,

$$P_j(f)(E) = P_j(f)(G_1) \oplus \ldots \oplus P_j(f)(G_s) \ .$$

On a donc

$$\sum_{i=1}^{s} \dim P_j(f)(G_i) = \dim P_j(f)(E) = \sum_{i=1}^{j-1} \dim P_j(f)(F_i) \ .$$

Or, pour tout $i \in [\![1, j-1]\!]$, $P_i = Q_i$ donc f_{F_i} et f_{G_i} sont semblables (elles ont une matrice commune, la matrice compagnon $\mathcal{C}(P_i) = \mathcal{C}(Q_i)$), donc

$$\dim(P_j(f)(F_i)) = \dim\left(\operatorname{Im} P_j(f_{F_i})\right) = \dim\left(\operatorname{Im} P_j(f_{G_i})\right) = \dim(P_j(f)(G_i)) \ .$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![j, s]\!]$, on a $\dim(P_j(f)(G_i)) = 0$, donc en particulier $Q_j |\, P_j$.
De même, on montre que $P_j |\, Q_j$, donc $P_j = Q_j$, ce qui est absurde.
On a finalement $(P_1, \dots, P_r) = (Q_1, \dots, Q_s)$, c'est-à-dire l'unicité du théorème. □

Corollaire (réduction de Frobenius). Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_r$ ses invariants de similitude. Il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix} \ .$$

En effet, il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_r$ de E vérifiant les propriétés (i) à (iv). Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de F_i dans laquelle f_{F_i} a pour matrice la matrice compagnon $\mathcal{C}(P_i)$. La concaténation des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ convient alors. $\square$

Corollaire. Deux endomorphismes sont semblables si et seulement si ils ont les mêmes invariants de similitude.

En effet, d'après le corollaire précédent, si deux endomorphismes ont les mêmes invariants de similitude, alors ils ont une matrice en commun donc ils sont semblables. La démonstration de la réciproque utilise exactement les mêmes arguments que l'unicité du théorème ci-dessus. $\square$

Références

J'ai utilisé [Gou09, p. 289]. On peut aussi consulter [BMP05, p. 293].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 119, 120, 124, 125, 132.

Remarques

- Les propriétés classiques des sous-espaces cycliques sont utilisés sans cesse dans le développement, elles sont donc à rappeler dans le plan. Voir [Gou09, p. 289].
- Éventuellement, on peut aussi rappeler les notations sur la dualité.
- Il n'est pas avantageux de détailler la réciproque du corollaire, qui est en tout point similaire à ce qui est fait précédemment et prend du temps.
- Il est possible d'adapter d'autres points de vue pour démontrer ce théorème. Cela peut être intéressant si on souhaite l'utiliser pour d'autres leçons (notamment la leçon 111).
- Le théorème des invariants de similitude a des conséquences intéressantes, dont la réduction de Jordan.

Questions possibles

1. Citer un autre moyen de démontrer le théorème des invariants de similitude.
2. Rappeler le principe de la démonstration de l'existence d'un élément $x \in E$ tel que $P_x = \Pi_f$.
3. Montrer que les invariants de similitude sont invariants par extension de corps.
4. Déterminer les invariants de similitude de la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Donner la réduction de Frobenius d'un endomorphisme ayant pour polynôme caractéristique X^3.

Références

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré : *Objectif agrégation.* H & K, 2005.

[Gou09] Xavier Gourdon : *Algèbre.* Ellipses, 2009.