Théorème des approximations de l'unité

Mon développement

On dit qu'une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité si :
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x)\ dx = 1$,
(ii) $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\phi_n\|_1 < +\infty$,
(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{\|x\|\geq\varepsilon} |\phi_n(x)|\ dx = 0$.

Dans la suite, si $p \in [1,+\infty]$, on note q l'élément de $[1,+\infty]$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ (avec les conventions habituelles). De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on note $\tau_y f : x \mapsto f(x-y)$.

Lemme (continuité des translations). Soit $p \in [1,+\infty[$. Pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\lim_{a\to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0\ .$$

Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varepsilon > 0$. On note K le support de f. f est uniformément continue donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|a\| \leq \alpha$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ |f(x-a) - f(x)| \leq \varepsilon\ .$$

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|a\| \leq \alpha$, on a

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-a) - f(x)|^p\ dx \\ &= \int_{(a+K)\cup K} |f(x-a) - f(x)|^p\ dx \\ &\leq (\lambda(a+K) + \lambda(K))\,\varepsilon^p \\ &= 2\lambda(K)\varepsilon^p \end{aligned}$$

où $\lambda(K)$, la mesure de Lebesgue du compact K, est finie.
On obtient donc la limite annoncée dans le cas d'une fonction continue à support compact.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|.\|_p$, il existe $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f-g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{4}$. De plus, d'après le point précédent, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|a\| \leq \alpha$, on a $\|\tau_a g - g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|a\| \leq \alpha$, on a

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - f\|_p &\leq \|\tau_a f - \tau_a g\|_p + \|\tau_a g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &= 2\|f-g\|_p + \|\tau_a g - g\|_p \\ &\leq 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Cela termine la démonstration du lemme. □

Remarque : ce lemme n'est plus valable pour $p = +\infty$. En effet, $f = \mathbf{1}_{[0,1]^d}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $a \neq 0$, on a $\|\tau_a f - f\|_\infty = 1$.

Théorème. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.
– Soit $p \in [1, +\infty[$. Pour toute $f \in L^p$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|f * \phi_n - f\|_p = 0 \ .$$

– Pour toute $f \in L^\infty$ uniformément continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|f * \phi_n - f\|_\infty = 0 \ .$$

Soit $f \in L^p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f * \phi_n$ est bien définie et appartient à L^p. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a, en utilisant (i),

$$f * \phi_n(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\phi_n(y)\ dy$$

donc

$$\begin{aligned} |f * \phi_n(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)||\phi_n(y)|^{1/p}|\phi_n(y)|^{1/q}\ dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p|\phi_n(y)|\ dy\right)^{1/p} \|\phi_n\|_1^{1/q} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder.
En passant à la puissance p et en intégrant, on obtient, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \|f * \phi_n - f\|_p^p &\leq \|\phi_n\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p|\phi_n(y)|\ dx\ dy \\ &= \|\phi_n\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p |\phi_n(y)|\ dy \ . \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme de continuité des translations, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|y\| \leq \eta$, on a $\|\tau_y f - f\|_p^p \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \|f * \phi_n - f\|_p^p &\leq M^{p/q}\left(\int_{\|y\|\leq\eta} \|\tau_y f - f\|_p^p|\phi_n(y)|\ dy + \int_{\|y\|>\eta} \|\tau_y f - f\|_p^p|\phi_n(y)|\ dy\right) \\ &\leq M^{p/q}\left(\varepsilon\int_{\|y\|\leq\eta} |\phi_n(y)|\ dy + 2^p\|f\|_p^p \int_{\|y\|>\eta} |\phi_n(y)|\ dy\right) \\ &\leq \varepsilon M^{p/q+1} + M^{p/q}2^p\|f\|_p^p \int_{\|y\|>\eta} |\phi_n(y)|\ dy \end{aligned}$$

donc, d'après (iii),

$$\limsup_{n\to+\infty} \|f * \phi_n - f\|_p^p \leq \varepsilon M^{p/q+1} \ .$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on obtient le premier point.

Soit maintenant $f \in L^\infty$ uniformément continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f * \phi_n$ est bien définie, appartient à L^∞ et est uniformément continue. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|f * \phi_n(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)||\phi_n(y)|\ dy \ .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $t, u \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|t-u\| \leq \eta$, on a $|f(t) - f(u)| \leq \varepsilon$. Alors, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} |f * \phi_n(x) - f(x)| &\leq \int_{\|y\| \leq \eta} |f(x-y) - f(x)||\phi_n(y)|\, dy + \int_{\|y\|>\eta} |f(x-y) - f(x)||\phi_n(y)|\, dy \\ &\leq \varepsilon M + 2\|f\|_\infty \int_{\|y\|>\eta} |\phi_n(y)|\, dy\ . \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f * \phi_n - f\|_\infty \leq \varepsilon M + 2\|f\|_\infty \int_{\|y\|>\eta} |\phi_n(y)|\, dy$$

et on conclut comme dans le premier point. □

Corollaire. $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une approximation de l'unité dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Une telle approximation de l'unité existe bien, par exemple $\phi_n : x \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)\, dy\right)^{-1} n^d \phi(nx)$, où

$$\phi : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{1-\|x\|^2}\right) & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases} .$$

Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$. f est bornée et uniformément continue donc, d'après le théorème précédent, la suite $(f * \phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge de limite f pour la norme infinie.
Par ailleurs, d'après le théorème de régularisation des convolées, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f * \phi_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. $f * \phi_n$ est aussi à support compact car f et ϕ_n le sont, c'est donc un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
On a ainsi démontré que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|.\|_\infty$.

Soit maintenant $p \in [1, +\infty[$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $f_m = f\, \mathbf{1}_{B(0,m)}$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\|f - f_m\|_p^p = \int_{\|x\| \geq m} |f(x)|^p\, dx$$

tend vers 0 quand $m \to +\infty$. En particulier, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|f - f_M\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
De plus, f_M est également dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ donc, d'après le théorème précédent, la suite $(f_M * \phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge de limite f_M dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\|f_M - f_M * \phi_N\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

On a donc $\|f - f_M * \phi_N\|_p \leq \varepsilon$.
Par ailleurs, d'après le théorème de régularisation des convolées, $f_M * \phi_N$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Et $f_M * \phi_N$ est à support compact car f_M et ϕ_N le sont, c'est donc un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
On a finalement démontré que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. □

Références

J'ai utilisé [BP09, pp. 260, 269]. On peut aussi consulter [ZQ07, p. 325].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour la leçon 234. On peut également l'utiliser pour les leçons 201, 202, 235, 239, 241.

Remarques

- Dans ce développement, on a identifié un élément de L^p avec un de ses représentants comme on le fait habituellement.
- On définit parfois une approximation de l'unité en remplaçant le point (ii) par la positivité des ϕ_n.
- La densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans les $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < +\infty$, est un point délicat (voir [BP09, p. 166]), il est donc opportun de la mentionner dans le plan.
- Il est également judicieux d'énoncer la définition et les propriétés de la convolution dans le plan, puisqu'on s'en sert à plusieurs reprises.

Questions possibles

1. Donner un exemple d'approximation de l'unité.
2. Expliquer comment construire une approximation de l'unité à partir d'une fonction ϕ ayant certaines propriétés.
3. Justifier l'appellation « approximation de l'unité ».
4. Donner les conditions sous lesquelles on peut définir une convolée.
5. Énoncer le théorème de régularisation des convolées.
6. Expliquer d'où vient la densité des fonctions continues à support compact dans L^p.
7. Expliquer en quoi le cas $p = +\infty$ est différent.
8. $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sont-ils denses dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$?
9. Démontrer le lemme de continuité des translations.
10. Démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue à l'aide du lemme de continuité des translations.
11. Discuter des liens entre les espaces L^p.

Références

[BP09] Marc Briane et Gilles Pagès : *Théorie de l'intégration.* Vuibert, 2009.

[ZQ07] Claude Zuily et Hervé Queffélec : *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.