Théorème de Baire

Mon développement

Théorème (Baire). Tout espace métrique complet (E, d) est un espace de Baire, *i.e.* toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E, soit V un ouvert non vide de E. Pour montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ intersecte V, on va construire une suite particulière de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0, incluse dans $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$.

- O_0 est dense dans E donc intersecte V. $O_0 \cap V$ est donc un ouvert non vide de E. En particulier, il existe une boule fermée B_0 incluse dans $O_0 \cap V$ de rayon inférieur ou égal à 1.
- On suppose que la boule fermée B_n est construite. O_{n+1} est dense dans E donc intersecte l'ouvert $\mathring{B}_n$. $O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$ est donc un ouvert non vide de E. En particulier, il existe une boule fermée B_{n+1} incluse dans $O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$ de rayon inférieur ou égal à $\frac{1}{2^{n+1}}$.

On a ainsi construit par récurrence une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est une boule fermée de rayon inférieur ou égal à $\frac{1}{2^n}$, $B_0 \subset O_0 \cap V$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B_n$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$. On a donc, pour tous $p, q > N$, $d(x_p, x_q) \leq \frac{1}{2^N} \leq \varepsilon$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans E qui est complet, elle converge donc de limite notée l.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq p$, x_n appartient à B_p, donc $l \in B_p$.
On en déduit que l appartient à $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} B_p$. Cette intersection est donc non vide.
De plus, $B_0 \subset V$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $B_{p+1} \subset B_p$, donc l'intersection $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} B_p$ est incluse dans V. Elle est aussi incluse dans l'intersection $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} O_p$ puisque $\forall p \in \mathbb{N}$, $B_p \subset O_p$.
Finalement, $V \cap \bigcap_{p\in\mathbb{N}} O_p$ contient $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} B_p$ donc est non vide.

On a ainsi montré que $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} O_p$ est dense dans E. □

Application. On note $\mathcal{C}$ l'espace de fonctions continues $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, qu'on munit de la norme infinie. L'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}$ nulle part dérivables contient une intersection dénombrable d'ouverts qui est dense dans $\mathcal{C}$.

Pour tous $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_{\varepsilon,n} = \left\{ f \in \mathcal{C} \ \mid \forall x \in [0,1],\ \exists y \in [0,1] \text{ vérifiant } 0 < |y - x| < \varepsilon \ \text{ tel que } \ \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| > n \right\} .$$

Tout d'abord, $U_{\varepsilon,n}$ est ouvert dans $\mathcal{C}$.
En effet, soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C} \setminus U_{\varepsilon,n}$ convergente dans $\mathcal{C}$ de limite notée f.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $x_p \in [0, 1]$ tel que pour tout $y \in [0, 1]$ vérifiant $|y - x_p| < \varepsilon$, on a $|f_p(y) - f_p(x_p)| \leq n|y - x_p|$.
$(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ étant une suite du compact $[0, 1]$, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ convergente de limite notée x.
Soit $y \in [0, 1]$ tel que $0 < |y - x| < \varepsilon$. Il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq P$, $0 < |y - x_{\varphi(p)}| < \varepsilon$, donc

$$|f_{\varphi(p)}(y) - f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})| \leq n|y - x_{\varphi(p)}| \ . \tag{1}$$

De plus, $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et f est continue donc, quand $p \to +\infty$, $f_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)})$ tend vers $f(x)$. Donc, en faisant tendre $p \to +\infty$ dans (1), on obtient $|f(y) - f(x)| \leq n|y-x|$.
Cela prouve que f n'appartient pas à $U_{\varepsilon,n}$.
$\mathcal{C} \setminus U_{\varepsilon,n}$ est donc fermé dan $\mathcal{C}$ et $U_{\varepsilon,n}$ est ouvert dans $\mathcal{C}$.

Ensuite, $U_{\varepsilon,n}$ est dense dans $\mathcal{C}$.
En effet, soient $f \in \mathcal{C}$ et $\delta > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[0,1]$ donc il existe $\alpha \in]0,\varepsilon[$ tel que pour tous $x, y \in [0,1]$ vérifiant $|y-x| < \alpha$, on a $|f(y) - f(x)| < \frac{\delta}{4}$.
Soit N un entier strictement supérieur à $\max\left(2\pi, \frac{4\pi}{\alpha}, \frac{8n\pi}{\delta}\right)$, on note $g : x \mapsto f(x) + \delta\sin(Nx)$.

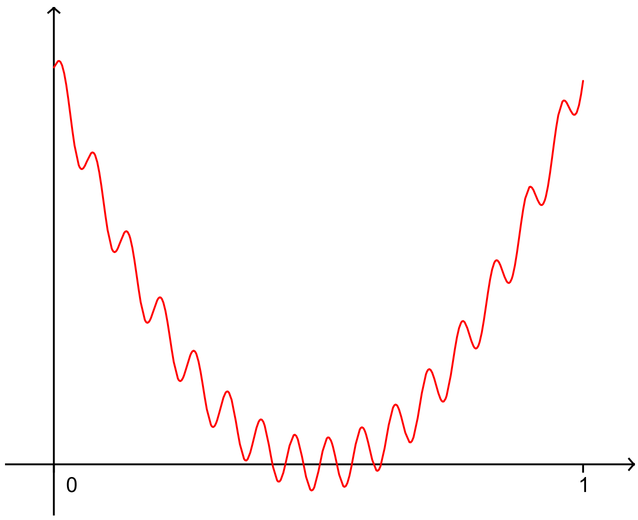

FIGURE 1 – Courbe représentative de $f : x \mapsto 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 0,05\sin(100x)$ sur $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$. Il existe $y \in [0,1]$ tel que $2\pi \leq |Nx - Ny| \leq 4\pi$ et $|\sin(Nx) - \sin(Ny)| \geq 1$.

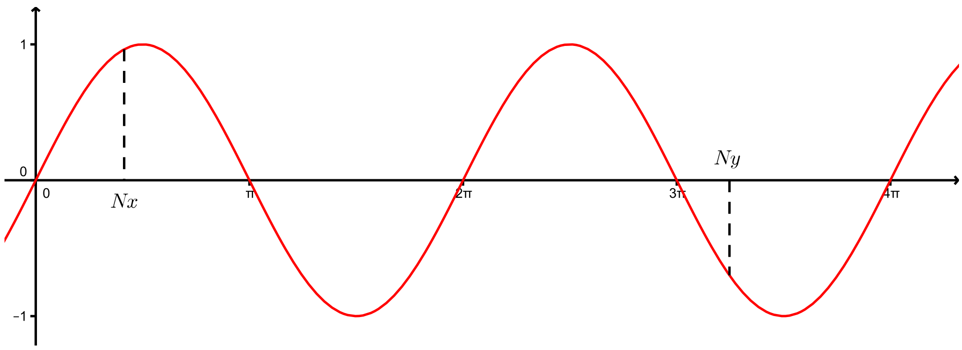

FIGURE 2 – Illustration de l'existence de y.

D'une part, on a donc $0 < |x-y| \leq \frac{4\pi}{N} < \alpha$, d'où

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| < \frac{\delta}{4}\frac{N}{2\pi} = \frac{\delta N}{8\pi} .$$

D'autre part, on a

$$\left|\frac{\delta\sin(Ny) - \delta\sin(Nx)}{y-x}\right| \geq \frac{\delta}{|y-x|} \geq \frac{\delta N}{4\pi}$$

donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left|\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right| > \frac{\delta N}{4\pi} - \frac{\delta N}{8\pi} = \frac{\delta N}{8\pi} > n \ .$$

La fonction g est donc dans $U_{\varepsilon,n}$ et on a $\|f-g\|_\infty = \delta$.
Cela prouve que $U_{\varepsilon,n}$ est dense dans $\mathcal{C}$.

Soient $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_{1/n,n}$ et $x \in [0,1]$.
Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in [0,1]$ tel que $0 < |y_n - x| < \frac{1}{n}$ et $\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{y_n-x}\right| > n$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc de limite x alors que $\left|\frac{f(y_n)-f(x)}{y_n-x}\right|$ admet une limite égale à $+\infty$ quand $n \to +\infty$. f n'est donc pas dérivable en x.
On a ainsi montré que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_{1/n,n}$ est inclus dans l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables. Puisque cette intersection est dense d'après le théorème de Baire, cela termine la preuve. □

Références

J'ai utilisé [Gou08, pp. 20, 397, 401].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 202, 205. On peut également l'utiliser pour les leçons 201, 208, 228.

Remarques

- On peut parler de G_δ plutôt que d'intersection dénombrable d'ouverts.
- La démonstration du théorème de Baire peut être un peu raccourcie en ne redémontrant pas le théorème des fermés emboîtés.
- La partie où on montre que $U_{\varepsilon,n}$ est dense dans $\mathcal{C}$ est technique mais l'idée est assez simple : on veut construire une fonction proche de f (en norme infinie) mais qui oscille beaucoup. Il faut alors choisir convenablement certains paramètres.
- Il est possible de proposer en développement la construction d'une fonction dérivable et d'en déduire la densité des fonctions continues nulle part dérivables dans $\mathcal{C}$.
- Soit Δ la fonction 1-périodique définie par : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\Delta(x) = |x|$. La fonction

$$x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\Delta(2^p x)$$

  est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable en aucun point (voir [Gou08, p. 84]).
- Dans l'application du théorème, on utilise la compacité de $[0,1]$ pour extraire une suite convergente de $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et utiliser le théorème de Heine. Cela ne paraît pas suffisant pour proposer ce développement dans la leçon 203.

Questions possibles

1. Détailler le fait que si pour tout $p \geq P$, $\left|f_{\phi(p)}(x_{\phi(p)}) - f_{\phi(p)}(y)\right| \leq n|y - x_{\phi(p)}|$, alors $|f(x)-f(y)| \leq n|y-x|$.

2. Comment règle t-on les paramètres de la fonction par laquelle on approche f, et à quoi correspondent-ils ?
3. Montrer qu'un espace complet sans point isolé est non dénombrable.
4. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists n \in \mathbb{N}, \ f^{(n)}(x) = 0$. Montrer que f est un polynôme.
5. Donner un exemple de fonction continue nulle part dérivable.

Références

[Gou08] Xavier Gourdon : *Analyse.* Ellipses, 2008.