Formule des compléments

Mon développement

Soit $\alpha \in]0,1[$. La fonction
$$f_\alpha : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$$
est continue sur $]0,+\infty[$. Quand $t \to 0$, $f_\alpha(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$. Par comparaison de fonctions positives, f_α est donc intégrable sur $]0,1]$. De même, quand $t \to +\infty$, on a $f_\alpha(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha+1}}$, donc f_α est intégrable sur $[1,+\infty[$.
f_α est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ et l'intégrale
$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$
est bien définie.

Lemme. Soit $\alpha \in]0,1[$. On a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \ .$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. On va calculer I_α à l'aide du théorème des résidus.

On note $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{Arg} : \Omega \to]0,2\pi[$ une détermination de l'argument. Pour tout $z \in \Omega$, on peut donc définir
$$z^\alpha = |z|^\alpha \exp(i\alpha \mathrm{Arg}(z)) \ .$$
La fonction
$$f : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z^\alpha(1+z)} \end{array}$$
est méromorphe sur Ω. Plus précisément, f admet un unique pôle, en -1, et ce pôle est simple. Le résidu de f en -1 vaut
$$\mathrm{Res}(f,-1) = \lim_{z\to-1}(z+1)f(z) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha} \ .$$

Par ailleurs, soient $\varepsilon \in]0,1[$ et $R > 1$. On note
$$C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \varepsilon \text{ et } \mathrm{Re}(z) \leq 0\} \ ,$$
$$I_{\varepsilon,R} = [i\varepsilon, \sqrt{R^2-\varepsilon^2} + i\varepsilon] \ ,$$
$$J_{\varepsilon,R} = [-i\varepsilon, \sqrt{R^2-\varepsilon^2} - i\varepsilon] \ ,$$
et
$$D_{\varepsilon,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R \text{ et } \theta_{\varepsilon,R} \leq \mathrm{Arg}(z) \leq 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}\} \ ,$$
où
$$\theta_{\varepsilon,R} = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}\right) \ .$$

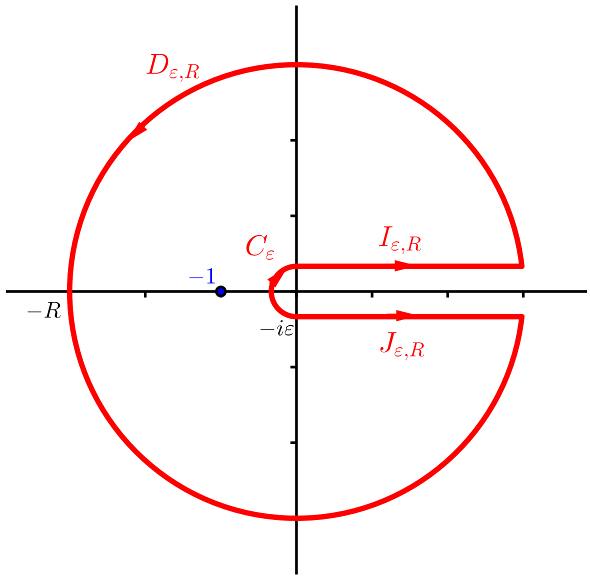

Figure 1 – Chemin choisi pour appliquer le théorème des résidus.

D'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{C\varepsilon} f(z)\ dz + \int_{I\varepsilon,R} f(z)\ dz + \int_{D\varepsilon,R} f(z)\ dz + \int_{J\varepsilon,R} f(z)\ dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha} \tag{1}$$

(en prenant la même orientation que sur la figure 1).

Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\ dz\right| &= \left|\int_{3\pi/2}^{\pi/2} f(\varepsilon e^{it}) i\varepsilon e^{it}\ dt\right| \\
&\leq \varepsilon \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dt}{\varepsilon^\alpha |1+\varepsilon e^{it}|} \\
&\leq \varepsilon \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dt}{\varepsilon^\alpha (1-\varepsilon)} \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq \frac{\pi \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon}
\end{aligned}$$

donc $\int_{C_\varepsilon} f(z)\ dz$ tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{D_{\varepsilon,R}} f(z)\ dz\right| &= \left|\int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} f(Re^{it}) iRe^{it}\ dt\right| \\
&= \left|\int_0^{2\pi} iR^{1-\alpha} \frac{e^{i(1-\alpha)t}}{1+Re^{it}} \mathbf{1}_{[\theta_{\varepsilon,R}, 2\pi-\theta_{\varepsilon,R}]}(t)\ dt\right| \\
&\leq \frac{2\pi R^{1-\alpha}}{R-1} \qquad \text{(par les mêmes arguments)}
\end{aligned}$$

donc, quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, $\int_{D_{\varepsilon,R}} f(z)\ dz$ tend vers 0.

Enfin, soit $t \in]0, +\infty[$. Quand $\varepsilon \to 0$, $(t + i\varepsilon)^\alpha$ et $(t - i\varepsilon)^\alpha$ tendent respectivement vers t^α et $t^\alpha e^{2i\pi\alpha}$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left| f(t + i\varepsilon)\, \mathbf{1}_{[0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\, \mathbf{1}_{[0,R]}(t)$$

car $|t + i\varepsilon| > |t|$ et $|1 + t + i\varepsilon| > |1 + t|$. De même, on a

$$\left| f(t - i\varepsilon)\, \mathbf{1}_{[0,\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t) \right| \leq \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\, \mathbf{1}_{[0,R]}(t) \ .$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}\, \mathbf{1}_{[0,R]}(t)$$

étant intégrable sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de convergence dominée, quand $\varepsilon \to 0$, $\int_{I_{\varepsilon,R}} f(z)\, dz$ et $\int_{J_{\varepsilon,R}} f(z)\, dz$ tendent respectivement vers

$$\int_0^R f(t)\, dt \quad \text{et} \quad -\int_0^R \frac{f(t)}{e^{2i\pi\alpha}}\, dt \ .$$

f étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, quand $R \to +\infty$, ces deux dernières intégrales tendent respectivement vers I_α et $-e^{-2i\pi\alpha} I_\alpha$.

En conclusion, quand on fait tendre $\varepsilon \to 0$ puis $R \to +\infty$ dans la relation (1), on obtient

$$(1 - e^{-2i\pi\alpha}) I_\alpha = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

d'où :

$$I_\alpha = 2i\pi \frac{e^{-i\pi\alpha}}{1 - e^{-2i\pi\alpha}} = 2i\pi \frac{1}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \ .$$

On a donc démontré la formule annoncée. □

On note Γ la fonction Gamma d'Euler.

Proposition. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$. On a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \ .$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} t^{\alpha-1} s^{-\alpha} e^{-(s+t)}\, ds\, dt = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha e^{-(s+t)} \frac{1}{t}\, ds\, dt \ .$$

Or, l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (s,t) & \mapsto & \left(s+t, \dfrac{t}{s}\right) \end{array}$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme dont la réciproque

$$\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto \left(\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v}\right)$$

a un jacobien en (u, v) égal à
$$\frac{u}{(1+v)^2}\ .$$
D'après le théorème de changement de variable et le théorème de Fubini-Tonelli, on a donc
$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} v^\alpha e^{-u}\frac{1+v}{uv}\frac{u}{(1+v)^2}\ du\ dv\\ &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)}e^{-u}\ du\ dv\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)}\ dv\end{aligned}$$
Donc, d'après le lemme,
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi(1-\alpha))} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\ .$$

Les fonctions $z \mapsto \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ et $z \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ sont holomorphes sur l'ouvert connexe $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ et coïncident sur $]0,1[$. Par le principe du prolongement analytique, ces deux fonctions sont égales sur Ω. □

Références

J'ai utilisé [AM04, p. 249].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 236, 245.

Remarques

– Il vaut mieux faire un dessin pour visualiser le contour choisi.
– Il faut être prudent avec la fonction $z \mapsto z^\alpha$, concernant ses limites notamment.
– La formule des compléments permet par exemple de montrer que la fonction ζ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ (voir [AM04, p. 252]).

Questions possibles

1. Donner le sens de z^α.
2. Donner une condition pour que la détermination principale du logarithme existe bien. Même question pour une primitive.
3. Définir la fonction Γ et en citer quelques propriétés.
4. Énoncer le théorème des résidus.

Références

[AM04] Éric Amar et Étienne Matheron : *Analyse complexe*. Cassini, 2004.