Base hilbertienne des polynômes orthogonaux

Mon développement

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\ dx < +\infty$. On note $L^p(I, \rho)$ l'espace des fonctions mesurables $f : I \to \mathbb{R}$ telles que $|f|^p \rho$ est intégrable.

Muni du produit scalaire $\langle\, .\,, . \rangle_\rho$ défini par :

$$\forall f, g \in L^2(I, \rho),\ \langle f, g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\ dx\ ,$$

$L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert. Il contient les polynômes $g_n : x \mapsto x^n$ par définition du poids.
D'après le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonaux deux à deux, et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associés au poids ρ.

Exemples :
- Les polynômes de Hermite sont associés à $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$.
- Les polynômes de Legendre sont associés à $I = [-1, 1]$ et $\rho(x) = 1$.

Théorème. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\ dx < +\infty$. Alors, la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $g_n : x \mapsto x^n$, qui est un élément de $L^2(I, \rho)$ par définition du poids.
Soit $f \in L^2(I, \rho)$ orthogonale à $\mathrm{Vect}(g_n, n \in \mathbb{N})$, c'est-à-dire telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle f, g_n\rangle_\rho = 0$.
Puisque $\forall t \geq 0$, $t \leq \frac{1+t^2}{2}$, on a pour tout $x \in I$,

$$|f(x)|\rho(x) \leq \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2)\rho(x)\ .$$

Les fonctions ρ et $|f|^2\rho$ étant intégrables sur I, la fonction $\varphi = \rho f\, \mathbf{1}_I$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut donc considérer sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$, c'est-à-dire la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widehat{\varphi}(t) = \int_I f(x)e^{-itx}\rho(x)\ dx\ .$$

On note

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times I & \to & \mathbb{C} \\ (z, x) & \mapsto & e^{-izx}f(x)\rho(x) \end{array}\ .$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|\operatorname{Im} z| < \frac{\alpha}{2}$ et tout $x \in I$, on a

$$|g(z, x)| \leq e^{\alpha|x|/2}|f(x)|\rho(x)$$

donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_I |g(z, x)|\ dx \leq \int_I e^{\alpha|x|/2}|f(x)|\rho(x)\ dx \leq \left(\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\ dx\right)^{1/2} \left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\ dx\right)^{1/2} < +\infty\ .$$

La fonction $F : z \mapsto \int_I g(z, x)\ dx$ est donc définie sur $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \frac{\alpha}{2}\}$. Ainsi,

- pour tout $z \in B_\alpha$, la fonction $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable sur I,
- pour tout $x \in I$, la fonction $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe sur B_α,
- pour tous $z \in B_\alpha$ et $x \in I$, on a $|g(z,x)| \leq e^{\alpha|x|/2}|f(x)|\rho(x)$ et la fonction $x \mapsto e^{\alpha|x|/2}|f(x)|\rho(x)$ est intégrable sur I comme on l'a vu ci-dessus.

D'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, F est donc holomorphe sur B_α et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in B_\alpha,\ F^{(n)}(z) = \int_I (-ix)^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\ dx\ .$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(0) = (-i)^n \langle f, g_n \rangle_\rho = 0$ en utilisant l'hypothèse d'orthogonalité.
Par unicité du développement en série entière de F, F est nulle sur un voisinage de 0. Par le théorème du prolongement analytique, F est donc nulle sur l'ouvert connexe B_α, donc en particulier sur $\mathbb{R}$. Puisque $\widehat{\varphi}$ coïncide avec F sur $\mathbb{R}$, par injectivité de la transformation de Fourier, cela prouve que φ est nulle. ρ étant strictement positive sur I, on en déduit que $f = 0$ p.p. sur I.

En conclusion, $\text{Vect}(g_n, n \in \mathbb{N})^\perp = \{0\}$ donc, par la caractérisation des parties denses dans un espace de Hilbert, $\text{Vect}(g_n, n \in \mathbb{N})$ est dense dans $L^2(I,\rho)$. $\text{Vect}(P_n, n \in \mathbb{N})$, qui est égal à $\text{Vect}(g_n, n \in \mathbb{N})$, l'est donc également.
Par orthogonalité de la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, celle-ci est donc une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$. $\square$

Références

J'ai utilisé [BMP05, pp. 110, 140].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 202, 213, 245. On peut également l'utiliser pour les leçons 207, 234, 239, 240.

Remarques

- On a toujours considéré que I est muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, et on a identifié un élément de $L^2(I,\rho)$ avec un de ses représentants comme on le fait habituellement.
- Les polynômes orthogonaux ont beaucoup de propriétés et d'applications, c'est donc un excellent investissement pour l'agrégation même si on ne présente pas ce développement. Voir par exemple [Dem06, p. 51], [CLF99, p. 158] pour des propriétés.

Questions possibles

1. De quel produit scalaire est muni $L^2(I,\rho)$?
2. D'où provient le théorème d'holomorphie sous le signe intégral ?
3. Donner une famille de polynômes orthogonaux pour laquelle le théorème s'applique.
4. Donner la définition et une caractérisation d'une base hilbertienne.
5. À partir de ce théorème, construire une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Références

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré : *Objectif agrégation*. H & K, 2005.

[CLF99] Antoine Chambert-Loir et Stéfane Fermigier : *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : Analyse 2*. Dunod, 1999.

[Dem06] Jean-Pierre Demailly : *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences, 2006.