Inégalité de Le Cam

Mon développement

Soient $\lambda > 0$ et un entier $n > \lambda$. On note $B_{n,\lambda}$ la loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$ et P_λ la loi de Poisson de paramètre λ.

Commençons par quelques rappels. Les fonctions caractéristiques des lois $B_{n,\lambda}$ et P_λ sont données respectivement par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\widehat{B_{n,\lambda}}(t) = (1 + \frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1))^n$ et $\widehat{P_\lambda}(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$. On en déduit que $(\widehat{B_{n,\lambda}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{P_\lambda}$, donc que $(B_{n,\lambda})_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers P_λ d'après le théorème de Lévy. En un certain sens, on va chercher à préciser la vitesse de convergence.
Remarquons qu'à l'aide des fonctions caractéristiques, on retrouve facilement la propriété $P_\lambda * P_\mu = P_{\lambda+\mu}$, qui nous sera utile plus tard.

Proposition. Soient $\lambda > 0$ et un entier $n > \lambda$. On a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |B_{n,\lambda}(k) - P_\lambda(k)| \leq \frac{4\lambda^2}{n}$$

Pour tout $p \in [0, 1]$, on note μ_p le couplage défini par le tableau suivant :

$(0,0)$	$e^{-p} - p(1 - e^{-p})$
$(0,1)$	$p(1 - e^{-p})$
$(1,0)$	0
$(1,1)$	pe^{-p}
$(k,0)$	$e^{-p}p^k/k!$
$(k,1)$	0

pour tout $k \geq 2$. On vérifie facilement qu'on définit ainsi une loi de probabilité sur $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$.
De plus, si (X, Y) est un couple de variables aléatoires de loi μ_p, on vérifie facilement que X et Y suivent respectivement une loi de Poisson de paramètre p et une loi de Bernoulli de paramètre p.
On a de plus

$$\mathbb{P}(X = Y) = e^{-p} - p + 2pe^{-p} \geq -p + (1 + 2p)(1 - p) = 1 - 2p^2$$

en utilisant l'inégalité de convexité de l'exponentielle, donc

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \leq 2p^2 \ . \tag{1}$$

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires dans $\mathbb{N}^2$ et $A \subset \mathbb{N}$.
On a

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in A,\ X = Y) + \mathbb{P}(X \in A,\ X \neq Y) \leq \mathbb{P}(Y \in A) + \mathbb{P}(X \neq Y)$$

et de même, $\mathbb{P}(Y \in A) \leq \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \neq Y)$. Donc :

$$|\,\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq \mathbb{P}(X \neq Y) \ . \tag{2}$$

Soient $\lambda > 0$ et un entier $n > \lambda$. Soient $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mu_{\lambda/n}$ et $A \subset \mathbb{N}$. Puisque $X_1 + \ldots + X_n$ suit la loi $B_{n,\lambda}$ et $Y_1 + \ldots + Y_n$ suit la loi P_λ, on a :

$$\begin{aligned}
|B_{n,\lambda}(A) - P_\lambda(A)| &= |\,\mathbb{P}(Y_1 + \ldots + Y_n \in A) - \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \in A)| \\
&\leq \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \neq Y_1 + \ldots + Y_n) \quad \text{(d'après (2))} \\
&\leq \mathbb{P}(\exists i \in [\![1, n]\!],\ X_i \neq Y_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \quad \text{(d'après (1))} \\
&= \frac{2\lambda^2}{n}\,.
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer cette inégalité aux ensembles $A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid B_{n,\lambda}(k) \geq P_\lambda(k)\}$ et $A_2 = \mathbb{N} \setminus A_1$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} |B_{n,\lambda}(k) - P_\lambda(k)| &= \sum_{k \in A_1} (B_{n,\lambda}(k) - P_\lambda(k)) + \sum_{k \in A_2} (P_\lambda(k) - B_{n,\lambda}(k)) \\
&= \sum_{k \in A_1} B_{n,\lambda}(k) - \sum_{k \in A_1} P_\lambda(k) + \sum_{k \in A_2} P_\lambda(k) - \sum_{k \in A_2} B_{n,\lambda}(k) \\
&= B_{n,\lambda}(A_1) - P_\lambda(A_1) + P_\lambda(A_2) - B_{n,\lambda}(A_2) \\
&\leq \frac{2\lambda^2}{n} + \frac{2\lambda^2}{n} = \frac{4\lambda^2}{n}
\end{aligned}$$

□

Références

J'ai utilisé [Let82, p. 95]. On peut aussi consulter [Ouv07, p. 220], [Dur10, p. 137], [Car07, p. 78], [Shi84, p. 345].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour la leçon 252. On peut également l'utiliser pour la leçon 249.

Remarques

- On peut détailler plus les calculs de fonctions caractéristiques et leurs conséquences dans l'introduction du développement.
- Pour un énoncé du théorème des évènements rares, voir [Ouv09, p. 310]. Plus généralement, la loi binomiale de paramètres (n, p_n) converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ lorsque $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$.
- Au lieu de dire « couplage », on peut simplement parler de loi d'un couple. On peut également construire le couplage « à la main » en revenant aux ω.

– Il est également possible d'utiliser le couplage μ_p défini par

$(0,0)$	$1-p$
$(0,1)$	$e^{-p}-(1-p)$
$(k,0)$	0
$(k,1)$	$e^{-p}p^k/k!$

pour tout $k \geq 1$. Dans ce cas, on obtient $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq p^2$ et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |B_{n,\lambda}(k) - P_\lambda(k)| \leq \frac{2\lambda^2}{n} .$$

– La majoration optimale est en fait $\frac{2\lambda}{n}\min(2,\lambda)$.
– Il existe un résultat plus fort (mais difficile à trouver dans la littérature) : le théorème de Prohorov. Soit $\lambda > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=0}^{+\infty} |B_{n,\lambda}(k) - P_\lambda(k)| = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(|X-(X-\lambda)^2|)$$

où X est une variable aléatoire de loi P_λ. Ce résultat se démontre à l'aide du théorème de convergence dominée pour les séries numériques.

Questions possibles

1. Montrer que $P_\lambda * P_\mu = P_{\lambda+\mu}$.
2. Donner la définition de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire et donner ses propriétés.
3. Donner la définition d'un couplage.
4. Citer une autre approximation classique de loi.
5. En pratique, pour quelles valeurs des paramètres approche-t-on la loi binomiale par la loi de Poisson ?

Références

[Car07] Hervé Carrieu : *Probabilité : exercices corrigés.* EDP Sciences, 2007.

[Dur10] Richard Durrett : *Probability, theory and examples.* Cambridge University Press, 2010.

[Let82] Gérard Letac : *Intégration et probabilités : analyse de Fourier et analyse spectrale. Exercices.* Masson, 1982.

[Ouv07] Jean-Yves Ouvrard : *Probabilités 1.* Cassini, 2007.

[Ouv09] Jean-Yves Ouvrard : *Probabilités 2.* Cassini, 2009.

[Shi84] Albert Shiryayev : *Probability.* Springer, 1984.