Théorème de Bernstein

Mon développement

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$B_n f = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

le n-ième polynôme de Bernstein de f. On note ω_f le module de continuité de f, défini par $\forall h > 0$, $\omega_f(h) = \sup\limits_{|u-v|\leq h} |f(u) - f(v)|$.

À tout $x \in [0,1]$, on associe une suite $(X_n^x)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre x. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^x = \sum_{i=1}^n X_i^x$ suit la loi binomiale de paramètres n et x, en particulier,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n^x}{n}\right)\right) = B_n f(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}\left(\frac{S_n^x}{n}\right) = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n} \ .$$

Dans la suite, comme il n'y a pas d'ambigüité, on notera simplement X_j pour X_j^x, S_n pour S_n^x et ω pour ω_f.

Théorème. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$. $(B_n f)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ de limite f.

Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$, $\delta \in]0,1[$, $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n f(x)| &= \left|\mathbb{E}\left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \mathbf{1}_{|x-\frac{S_n}{n}|\leq\delta}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \mathbf{1}_{|x-\frac{S_n}{n}|>\delta}\right) \\
&\leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| > \delta\right) \\
&\leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \frac{1}{\delta^2}\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) \\
&\leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \frac{1}{4n\delta^2}
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff.
$f - B_n f$ est donc bornée sur $[0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $\delta \in]0,1[$, on a

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \ .$$

Donc pour tout $\delta \in]0,1[$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \|f - B_n f\|_\infty \leq \omega(\delta) \ . \tag{1}$$

Or f est continue sur le compact $[0,1]$ donc uniformément continue sur $[0,1]$ d'après le théorème de Heine, donc $\omega(\delta)$ tend vers 0 quand $\delta \to 0$. En faisant tendre $\delta \to 0$ dans (1), on en déduit que $\limsup \|f - B_n f\|_\infty \leq 0$, d'où la convergence uniforme de $(B_n f)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f. $\square$

On va maintenant préciser la vitesse de convergence.

Proposition.
– Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
– Cette vitesse est optimale (au sens usuel).

Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$, $h > 0$ et $\lambda > 0$. On a :

$$\omega(\lambda h) \leq \omega((\lfloor\lambda\rfloor + 1)h) \leq (\lfloor\lambda\rfloor + 1)\omega(h) \leq (\lambda + 1)\omega(h)$$

d'après les propriétés classiques du module de continuité.
En particulier, pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right) \leq \left(\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ . \tag{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n f(x)| &\leq \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\right) \quad \text{(par définition de } \omega\text{)} \\
&\leq \left(\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right) + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{(d'après (2))} \\
&\leq \left(\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left(\left(x - \frac{S_n}{n}\right)^2\right)^{1/2} + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (\text{car } \|\,.\|_1 \leq \|\,.\|_2) \\
&\leq \left(\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{4n}} + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \left(\text{car Var}(\frac{S_n}{n}) \leq \frac{1}{4n}\right) \\
&= \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ .
\end{aligned}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Soit maintenant $f : x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$. f appartient à $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f - B_n f$ est continue sur le compact $[0,1]$ donc bornée sur $[0,1]$ et on a :

$$\begin{aligned}
\|f - B_n f\|_\infty &\geq \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - B_n f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\
&= \left|0 - \mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right|\right)\right| \\
&= \frac{1}{2n}\mathbb{E}(|2S_n - n|) \\
&= \frac{1}{2n}\mathbb{E}(|\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n|)
\end{aligned}$$

où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont des v.a. i.i.d. de loi de Rademacher, puisque pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $2X_j - 1$ suit la loi de Rademacher.
D'après l'inégalité de Khintchine, on a donc

$$\|f - B_n f\|_\infty \geq \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{n}{e}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{e}}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

puisque f est 1-lipschitzienne.
La vitesse $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est donc optimale. □

Lemme (Inégalité de Khintchine). Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des v.a. i.i.d. de loi de Rademacher. On a :

$$\mathbb{E}(|\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n|) \geq \sqrt{\frac{n}{e}}\ .$$

Remarquons d'abord que $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n$ est bornée donc dans L^1. De plus, pour tout élément $g \in L^\infty$ non nul, on a $\frac{|g|}{\|g\|_\infty} \leq 1$ donc

$$\mathbb{E}(|\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n|) \geq \frac{1}{\|g\|_\infty} \left|E((\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)g)\right|\ .$$

La variable aléatoire

$$g = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + i\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{n}}\right)$$

vérifie

$$|g| = \prod_{j=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq \prod_{j=1}^{n}\sqrt{e^{1/n}} = \sqrt{e}$$

donc g est dans L^∞ et $\|g\|_\infty \leq \sqrt{e}$. De plus, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, par indépendance, on a :

$$E(\varepsilon_j g) = E\left(\varepsilon_j\left(1 + i\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{n}}\right)\right)\prod_{k\neq j} E\left(1 + i\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{n}}\right) = \frac{i}{\sqrt{n}}$$

On obtient finalement :

$$\mathbb{E}(|\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n|) \geq \frac{1}{\sqrt{e}}\left|\frac{ni}{\sqrt{n}}\right| = \sqrt{\frac{n}{e}}\ .$$

□

Références

J'ai utilisé [ZQ07, pp. 114, 248, 518]. On peut aussi consulter [CDGCM11, p. 159].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 241, 252. On peut également l'utiliser pour les leçons 201, 202, 228, 249.

Remarques

- La loi de Rademacher est la loi de Bernoulli sur $\{-1; +1\}$.
- On peut détailler les propriétés du module de continuité qu'on utilise, surtout si on présente ce développement pour la leçon 228. Ici, on utilise :
  - ω est croissante,
  - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall h > 0$, $\omega(nh) \leq n\omega(h)$,
  - si f est k-lipschitzienne, alors $\forall h > 0$, $\omega(h) \leq kh$.
- On déduit facilement de ce résultat le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes.

Questions possibles

1. Quelle est la vitesse de convergence des polynômes de Bernstein ?
2. Si f est polynomiale, les polynômes de Bernstein sont-ils égaux à f ?
3. Définir un module de continuité.
4. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall h > 0,\ \omega(nh) \leq n\omega(h)\ .$$
5. Démontrer le théorème de Weierstrass à l'aide du théorème de Bernstein. Citer une autre méthode de démonstration du théorème de Weierstrass.

Références

[CDGCM11] Marie Cottrell, Christian Duhamel, Valentine Genon-Catalot et Thierry Meyre : *Exercices de probabilités.* Cassini, 2011.

[ZQ07] Claude Zuily et Hervé Queffélec : *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.