Théorème de Glivenko-Cantelli

Mon développement

Soit F une fonction de répartition. Son inverse généralisée

$$F^{(-1)}: \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ q & \mapsto & \inf\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq q\} \end{array}$$

est une application bien définie.

Propriétés.
(i) $F^{(-1)}$ est croissante.
(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall q \in]0,1[,\ q \leq F(x) \Leftrightarrow F^{(-1)}(q) \leq x$.
(iii) Si F est bijective, alors $F^{(-1)} = F^{-1}$

(i) Soient $q, q' \in]0,1[$ tels que $q \geq q'$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $F(x) \geq q$, alors $F(x) \geq q'$. Donc

$$\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq q\} \subset \{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq q'\}$$

d'où $F^{(-1)}(q) \geq F^{(-1)}(q')$. $F^{(-1)}$ est donc croissante.

(ii) Soient $q \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. Par définition de $F^{(-1)}(q)$, si $F(x) \geq q$, alors $x \geq F^{(-1)}(q)$. Réciproquement, soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et convergente de limite $F^{(-1)}(q)$, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ F(x_n) \geq q$. Par continuité de F à droite, on a

$$F(F^{(-1)}(q)) \geq q \tag{1}$$

En utilisant (1) et la croissance de F, si $x \geq F^{(-1)}(q)$, alors $F(x) \geq F(F^{(-1)}(q)) \geq q$. L'équivalence est donc démontrée.

(iii) On suppose que F est bijective. Soit $q \in]0,1[$. D'après (1), comme F^{-1} est croissante, on a $F^{(-1)}(q) \geq F^{-1}(q)$. D'autre part, $F^{-1}(q) \geq F^{(-1)}(q)$ par définition de $F^{(-1)}(q)$. Donc $F^{(-1)}(q) = F^{-1}(q)$. Finalement, $F^{(-1)} = F^{-1}$. $\square$

Remarque : La propriété (ii) donne l'idée de la méthode de simulation de variables aléatoires par inversion de la fonction de répartition. En effet, si U est une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$, alors $F^{(-1)}(U)$ est une variable aléatoire de fonction de répartition F.

Théorème. Soit F une fonction de répartition, soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de fonction de répartition F. On note

$$F_n : x \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}$$

la fonction de répartition empirique associée.
Presque sûrement, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers F.

On note pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F(x^-) = \lim_{u \to x^-} F(u) = \mathbb{P}(X_1 < x) \quad \text{et} \quad F_n(x^-) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i < x\}} \ .$$

On note ensuite pour tous entiers $m \geq 2$ et $k \in [\![1, m-1]\!]$: $x_{k,m} = F^{(-1)}\left(\frac{k}{m}\right)$.
Soit $m \geq 2$. Par la loi forte des grands nombres, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, presque sûrement, quand $n \to +\infty$, $F_n(x_{k,m})$ et $F_n(x_{k,m}^-)$ tendent respectivement vers $\mathbb{P}(X_1 \leq x_{k,m})$ et $\mathbb{P}(X_1 < x_{k,m})$. Donc, p.s.,

$$M_{m,n} = \max_{1 \leq k \leq m-1} \left(\max(|F_n(x_{k,m}) - F(x_{k,m})|, |F_n(x_{k,m}^-) - F(x_{k,m}^-)|) \right)$$

tend vers 0. Autrement dit, l'évènement $A_m = \{M_{m,n} \to 0\}$ est de probabilité 1.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $m \geq 2$.
• Dans le cas où il existe $k \in [\![2, m-1]\!]$ tel que $x \in [x_{k-1,m}, x_{k,m}[$, on a, par définition de $M_{m,n}$ et croissance de F_n :

$$F(x_{k-1,m}) - M_{m,n} \leq F_n(x_{k-1,m}) \leq F_n(x) \leq F_n(x_{k,m}^-) \leq F(x_{k,m}^-) + M_{m,n} \ . \tag{2}$$

De plus, $F(x) \geq F(x_{k-1,m})$ donc

$$F(x_{k,m}^-) \leq F(x_{k,m}^-) - F(x_{k-1,m}) + F(x) \leq \frac{k}{m} - \frac{k-1}{m} + F(x) = F(x) + \frac{1}{m} \ . \tag{3}$$

De même, $F(x) \leq F(x_{k,m}^-)$ donc

$$F(x_{k-1,m}) \geq F(x) - \frac{1}{m} \ . \tag{4}$$

En regroupant les inégalités (2), (3), (4), on obtient $F(x) - \frac{1}{m} - M_{m,n} \leq F_n(x) \leq F(x) + \frac{1}{m} + M_{m,n}$, c'est-à-dire

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \frac{1}{m} + M_{m,n} \ .$$

• On montre le même résultat par des arguments similaires lorsque $x < x_{1,m}$ ou $x \geq x_{m-1,m}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n - F$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall m \geq 2, \ \|F_n - F\|_\infty \leq \frac{1}{m} + M_{m,n} \ .$$

Sur l'ensemble $A = \bigcap_{m \geq 2} A_m$, on a donc

$$\forall m \geq 2, \ \limsup_{n \to +\infty} \|F_n - F\|_\infty \leq \frac{1}{m}$$

donc $\limsup\limits_{n \to +\infty} \|F_n - F\|_\infty \leq 0$ en faisant tendre $m \to +\infty$. Ainsi, sur A, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \|F_n - F\|_\infty = 0 \ .$$

A étant de probabilité 1 comme intersection dénombrable d'évènements de probabilité 1, on obtient que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|F_n - F\|_\infty = 0$ presque sûrement. □

Remarque : le théorème donne l'idée du test de Kolmogorov-Smirnov. Soient F, F_0 deux fonctions de répartition, soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de fonction de répartition F. Un test de $H_0 : F = F_0$ contre $H_1 : F \neq F_0$ est de la forme $\mathbf{1}_{\{\sqrt{n}\|F_n - F_0\|_\infty > k_{n,1-\alpha}\}}$, où F_n est la fonction de répartition empirique associée à $(X_1, \ldots, X_n)$.
En effet, d'après le théorème et l'inégalité triangulaire, sous H_1, ps, $\liminf_{n\to+\infty} \|F_n - F_0\|_\infty \geq \|F - F_0\|_\infty > 0$ donc $\sqrt{n}\|F_n - F_0\|_\infty \to +\infty$. Et on peut montrer que sous H_0, $\sqrt{n}\|F_n - F_0\|_\infty$ converge en loi.

Références

J'ai utilisé [RS12, p. 86]. On peut aussi consulter [Ouv09, pp. 29, 112].

Leçons correspondantes

J'utilise ce développement pour les leçons 229, 250, 251. On peut également l'utiliser pour la leçon 247.

Remarques

- Ce théorème est le théorème fondamental de la statistique.
- La propriété (ii) peut également s'écrire

$$\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq q\} = \left[F^{(-1)}(q), +\infty\right[\ .$$

- On peut démontrer d'autres propriétés sur $F^{(-1)}$, mais elles ne sont pas utiles ici. En fait, la propriété (iii) est ici démontrée dans le but de justifier l'appellation « inverse généralisée ».
- On peut utiliser des graphiques pour présenter le théorème, expliquer la disjonction des cas pour x ou donner un exemple d'inverse généralisée par exemple.
- On peut justifier l'utilisation de ce développement dans la leçon 247 puisque c'est en fait une loi des grands nombres uniforme. On peut également exploiter certains aspects pour les leçons 202, 203, 228 et 241 puisque, dans le cas où F est continue, on peut voir ce résultat comme une conséquence d'un théorème de Dini. Par contre, on utilise l'indépendance des X_i uniquement pour appliquer la loi des grands nombres, ce développement n'est donc pas le plus pertinent pour la leçon 251 a posteriori.

Questions possibles

1. Rappeler les propriétés d'une fonction de répartition.
2. Donner un exemple d'inverse généralisée.
3. Expliquer pourquoi $F^{(-1)}$ est aussi appelée fonction quantile.
4. Définir un n-échantillon.
5. Définir un test et le niveau d'un test. Quelle valeur de $k_{n,1-\alpha}$ faut-il prendre pour que le test de Kolmogorov-Smirnov soit de niveau α ?

Références

[Ouv09] Jean-Yves Ouvrard : *Probabilités 2*. Cassini, 2009.

[RS12] Vincent Rivoirard et Gilles Stoltz : *Statistique mathématique en action*. Vuibert, 2012.