Présentation de la méthode de la vraisemblance empirique

J.Worms

Plan de l'exposé

1. Rappels de statistique paramétrique
   - Modèles paramétriques et vraisemblance
   - Rapport des maxima de vraisemblance
2. Vraisemblance empirique (cadre iid) : deux approches
   - Approche NPMLE (max de vraisemblance non-paramétrique)
   - Approche Minimum de Contraste
3. Cadres d'application, avantages, exemples

Modèle paramétrique

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\hookrightarrow \mathbb{R}^p$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, de loi μ

Modèle paramétrique :

$$\mu \in \mathcal{P} := \{ \mu_\theta \ : \ \theta \in \Theta \}$$

Objectif : estimer θ
$\longrightarrow$ *région de confiance ou test concernant* θ *ou* $g(\theta)$

Moyen fréquent : exploiter normalité asymp. de l'estimateur $\hat{\theta}$

Question usuelle : qualité du procédé en non-asymptotique

Modèle paramétrique

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\hookrightarrow \mathbb{R}^p$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, de loi μ

Modèle paramétrique :

$$\mu \in \mathcal{P} := \{ \mu_\theta \ : \ \theta \in \Theta \}$$

Objectif : estimer θ

$\longrightarrow$ *région de confiance ou test concernant* θ *ou* $g(\theta)$

Moyen fréquent : exploiter normalité asymp. de l'estimateur $\hat{\theta}$

Question usuelle : qualité du procédé en non-asymptotique

Modèle paramétrique

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\hookrightarrow \mathbb{R}^p$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, de loi $\boldsymbol{\mu}$

Modèle paramétrique :

$$\mu \in \mathcal{P} := \{\, \mu_\theta \ : \ \theta \in \Theta \,\}$$

Objectif : estimer θ

$\longrightarrow$ *région de confiance ou test concernant* θ *ou* $g(\theta)$

Moyen fréquent : exploiter normalité asymp. de l'estimateur $\hat{\theta}$

Question usuelle : qualité du procédé en non-asymptotique

Modèle paramétrique

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\hookrightarrow \mathbb{R}^p$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, de loi μ

Modèle paramétrique :

$$\mu \in \mathcal{P} := \{\, \mu_\theta \;:\; \theta \in \Theta \,\}$$

Objectif : estimer θ

$\longrightarrow$ *région de confiance ou test concernant* θ *ou* $g(\theta)$

Moyen fréquent : exploiter normalité asymp. de l'estimateur $\hat{\theta}$

Question usuelle : qualité du procédé en non-asymptotique

Modèle paramétrique

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\hookrightarrow \mathbb{R}^p$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, de loi $\boldsymbol{\mu}$

Modèle paramétrique :

$$\mu \in \mathcal{P} := \{ \mu_\theta \ : \ \theta \in \Theta \}$$

Objectif : estimer θ

$\longrightarrow$ *région de confiance ou test concernant θ ou $g(\theta)$*

Moyen fréquent : exploiter normalité asymp. de l'estimateur $\hat{\theta}$

Question usuelle : qualité du procédé en non-asymptotique

Maximum de vraisemblance

Paramètre fini-dimensionnel : $\theta \in \Theta$ avec $\dim \Theta = k < \infty$

Modèle dominé et vraisemblance

$$d\mu_\theta = f_\theta dm \; (\forall \theta)$$

$$\mathcal{L}(\theta) := \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i)$$

Sous de "bonnes" conditions, $\mathcal{L}(\theta)$ est maximisée en un unique $\hat{\theta}$ appelé estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de θ.

Maximum de vraisemblance

Paramètre fini-dimensionnel : $\theta \in \Theta$ avec $\dim \Theta = k < \infty$

Modèle dominé et vraisemblance

$$d\mu_\theta = f_\theta dm \, (\forall \theta)$$

$$\mathcal{L}(\theta) := \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i)$$

Sous de "bonnes" conditions, $\mathcal{L}(\theta)$ est maximisée en un unique $\hat{\theta}$ appelé estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de θ.

Maximum de vraisemblance

Paramètre fini-dimensionnel : $\theta \in \Theta$ avec $\dim \Theta = k < \infty$

Modèle dominé et vraisemblance

$$\boxed{\begin{array}{c} d\mu_\theta = f_\theta dm \, (\forall \theta) \\ \mathcal{L}(\theta) := \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i) \end{array}}$$

Sous de “bonnes” conditions, $\mathcal{L}(\theta)$ est maximisée en un unique $\hat{\theta}$ appelé estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de θ.

Sous certaines conditions de régularité sur le modèle dominé, l'EMV est unique et asymptotiquement normal sous $\mathbb{P}_\theta$ $(\forall \theta)$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_k(0, I_\theta^{-1})$$

où I_θ est la matrice d'information de Fisher.

➥ Région de confiance (ellipsoïdale)

$$\{ \ \theta \in \Theta \ / \ n\ {}^t(\hat{\theta} - \theta) I_{\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \theta) \leq r \ \}$$

où r est tq $\mathbb{P}[\chi^2(k) \geq r] = \alpha$.

➥ Test de H_0 : "$\theta = \theta_0$"

région critique de niv. asymp. $\alpha = \{ \ n\ {}^t(\hat{\theta} - \theta_0) I_{\theta_0} (\hat{\theta} - \theta_0) \geq r \ \}$

Sous certaines conditions de régularité sur le modèle dominé, l'EMV est unique et asymptotiquement normal sous $\mathbb{P}_\theta$ $(\forall\theta)$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_k(0, I_\theta^{-1})$$

où I_θ est la matrice d'information de Fisher.

➥ Région de confiance (ellipsoïdale)

$$\{\ \theta \in \Theta\ /\ n\,{}^t(\hat{\theta} - \theta) I_{\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \theta) \leq r\ \}$$

où r est tq $\mathbb{P}[\chi^2(k) \geq r] = \alpha$.

➥ Test de H_0 : "$\theta = \theta_0$"

région critique de niv. asymp. $\alpha = \{\ n\,{}^t(\hat{\theta} - \theta_0) I_{\theta_0} (\hat{\theta} - \theta_0) \geq r\ \}$

Sous certaines conditions de régularité sur le modèle dominé, l'EMV est unique et asymptotiquement normal sous $\mathbb{P}_\theta$ $(\forall\theta)$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_k(0, I_\theta^{-1})$$

où I_θ est la matrice d'information de Fisher.

- **Région de confiance (ellipsoïdale)**

  $$\{\ \theta \in \Theta \ / \ n\,{}^t(\hat{\theta} - \theta) I_{\hat{\theta}} (\hat{\theta} - \theta) \leq r\ \}$$

  où r est tq $\mathbb{P}[\chi^2(k) \geq r] = \alpha$.

- **Test de H_0 : "$\theta = \theta_0$"**

  région critique de niv. asymp. α = $\{\ n\,{}^t(\hat{\theta} - \theta_0) I_{\theta_0} (\hat{\theta} - \theta_0) \geq r\ \}$

Test du rapport des maxima de vraisemblance

Théorème (Wilks, 1938)

Si $\Theta_0 \subset \Theta$, $\dim \Theta = k$, $\dim \Theta_0 = l$, *et*

$$LR_0 := \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathcal{L}(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}(\theta)}$$

alors, sous H_0 *: "*$\theta \in \Theta_0$*", quand* $n \to \infty$

$$\boxed{-2 \log LR_0 \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(k-l)}$$

d'où la région critique de niveau asymp. α

$$\{ -2 \log LR_0 \geq r \} \quad \text{où} \quad \mathbb{P}[\chi^2(k-l) \geq r] = \alpha$$

Région de confiance par inversion du LRT

Corollaire

Une région de confiance pour θ (de niv. asymp. $1-\alpha$) est

$$\left\{ \; \theta \in \Theta \; / \; -2 \log LR(\theta) \leq r \; \right\} \;\; \textit{où} \;\; LR(\theta) := \frac{\mathcal{L}(\theta)}{\mathcal{L}(\hat{\theta})}$$

et $\mathbb{P}[\chi^2(k) \geq r] = \alpha$.

Région de confiance par inversion du LRT

Corollaire

Une région de confiance pour θ (de niv. asymp. $1-\alpha$) est

$$\{\ \theta \in \Theta\ /\ -2\log LR(\theta) \leq r\ \}\ \text{ où }\ LR(\theta) := \frac{\mathcal{L}(\theta)}{\mathcal{L}(\hat{\theta})}$$

et $\mathbb{P}[\chi^2(k) \geq r] = \alpha$.

- ⇝ vs région de Wald, région plus difficile à déterminer en pratique...
- ⇝ mais souvent meilleure pour n faible (proba de couverture plus proche du niveau annoncé)
- ⇝ et ne nécessitant aucune estimation de variance asymptotique

Région de confiance par inversion du LRT

Corollaire

Une région de confiance pour θ (de niv. asymp. $1-\alpha$) est

$$\{\ \theta \in \Theta \ /\ -2\log LR(\theta) \leq r\ \}\ \text{ où }\ LR(\theta) := \frac{\mathcal{L}(\theta)}{\mathcal{L}(\hat{\theta})}$$

et $\mathbb{P}[\chi^2(k) \geq r] = \alpha$.

- vs région de Wald, région plus difficile à déterminer en pratique...
- mais souvent meilleure pour n faible (proba de couverture plus proche du niveau annoncé)
- et ne nécessitant aucune estimation de variance asymptotique

Région de confiance par inversion du LRT

Corollaire

Une région de confiance pour θ (de niv. asymp. $1-\alpha$) est

$$\{\ \theta \in \Theta \ /\ -2\log LR(\theta) \leq r\ \} \ \text{ où } \ LR(\theta) := \frac{\mathcal{L}(\theta)}{\mathcal{L}(\hat{\theta})}$$

et $\mathbb{P}[\chi^2(k) \geq r] = \alpha$.

- $\rightsquigarrow$ vs région de Wald, région plus difficile à déterminer en pratique...
- $\rightsquigarrow$ mais souvent meilleure pour n faible (proba de couverture plus proche du niveau annoncé)
- $\rightsquigarrow$ et ne nécessitant aucune estimation de variance asymptotique

Sortir de la modélisation paramétrique ?

Maximum de Vraisemblance =

- méthodologie très répandue, très étudiée
- propriétés plaisantes (efficacité, invariance par transformation, ...)

mais sortir de la modélisation paramétrique est toujours désirable

$\rightsquigarrow$ des travaux existent sur la généralisation de la notion de vraisemblance en non-paramétrique (paramètre $\theta = \infty$-dimensionnel), mais sont parsemés de nombreuses difficultés (fonction d'influence, détermination et estimation de la variance asymptotique,...)

Sortir de la modélisation paramétrique ?

Maximum de Vraisemblance =

- méthodologie très répandue, très étudiée
- propriétés plaisantes (efficacité, invariance par transformation, ...)

mais sortir de la modélisation paramétrique est toujours désirable

$\rightsquigarrow$ des travaux existent sur la généralisation de la notion de vraisemblance en non-paramétrique (paramètre $\theta = \infty$-dimensionnel), mais sont parsemés de nombreuses difficultés (fonction d'influence, détermination et estimation de la variance asymptotique,...)

Vraisemblance non-paramétrique

On observe tjrs $(X_1, \ldots, X_n)$ iid $\hookrightarrow \mathbb{R}^p$ de loi μ

Modèle statistique : $\mu \in \mathcal{P} = \cup_{\theta \in \Theta} \mathcal{P}_\theta$ où

$\mathcal{P}_\theta = \{$ lois ν sur $\mathbb{R}^p$ vérifiant une condition relative à θ $\}$

➠ 2 paramètres $\begin{cases} \textit{la loi } \mu, \textit{ paramètre } \infty\textit{-dimensionnel} \\ \theta = \theta(\mu), \textit{ vu comme fonction de } \mu \end{cases}$

Définition

$$NP\mathcal{L}(\nu) := \prod_{i=1}^{n} \nu(\{X_i\})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p_i \quad si \quad \nu = \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{X_i}$$

Vraisemblance non-paramétrique

On observe tjrs $(X_1, \ldots, X_n)$ iid $\hookrightarrow \mathbb{R}^p$ de loi μ

Modèle statistique : $\mu \in \mathcal{P} = \cup_{\theta \in \Theta} \mathcal{P}_\theta$ où

$$\mathcal{P}_\theta = \{ \text{ lois } \nu \text{ sur } \mathbb{R}^p \text{ vérifiant une condition relative à } \theta \ \}$$

➠ 2 paramètres $\begin{cases} \textit{la loi } \mu\textit{, paramètre } \infty\textit{-dimensionnel} \\ \theta = \theta(\mu)\textit{, vu comme fonction de } \mu \end{cases}$

Définition

$$\begin{aligned} NP\mathcal{L}(\nu) &:= \prod_{i=1}^{n} \nu(\{X_i\}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} p_i \quad si \quad \nu = \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{X_i} \end{aligned}$$

Vraisemblance non-paramétrique

On observe tjrs $(X_1, \ldots, X_n)$ iid $\hookrightarrow \mathbb{R}^p$ de loi μ

Modèle statistique : $\mu \in \mathcal{P} = \cup_{\theta \in \Theta} \mathcal{P}_\theta$ où

$$\mathcal{P}_\theta = \{ \text{ lois } \nu \text{ sur } \mathbb{R}^p \text{ vérifiant une condition relative à } \theta \ \}$$

➠ 2 paramètres $\begin{cases} \textit{la loi } \mu\textit{, paramètre } \infty\textit{-dimensionnel} \\ \theta = \theta(\mu)\textit{, vu comme fonction de } \mu \end{cases}$

Définition

$$NP\mathcal{L}(\nu) := \prod_{i=1}^{n} \nu(\{X_i\})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p_i \quad si \quad \nu = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{X_i}$$

Vraisemblance non-paramétrique

On observe tjrs $(X_1, \ldots, X_n)$ iid $\hookrightarrow \mathbb{R}^p$ de loi μ

Modèle statistique : $\mu \in \mathcal{P} = \cup_{\theta \in \Theta} \mathcal{P}_\theta$ où

$$\mathcal{P}_\theta = \{ \text{ lois } \nu \text{ sur } \mathbb{R}^p \text{ vérifiant une condition relative à } \theta \}$$

➠ 2 paramètres $\begin{cases} \textit{la loi } \mu\textit{, paramètre } \infty\textit{-dimensionnel} \\ \theta = \theta(\mu)\textit{, vu comme fonction de } \mu \end{cases}$

Définition

$$\begin{aligned} NP\mathcal{L}(\nu) &:= \prod_{i=1}^{n} \nu(\{X_i\}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} p_i \quad si \quad \nu = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{X_i} \end{aligned}$$

Vraisemblance non-paramétrique

La *mesure empirique*

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$$

maximise $NP\mathcal{L}(\cdot)$ sur l'espace des probas sur $\mathbb{R}^p$.

(*Kiefer & Wolfowitz, 1956*)

On veut maximiser $NP\mathcal{L}(\cdot)$ sur l'ensemble $\mathcal{P} = \cup_{\theta\in\Theta}\mathcal{P}_\theta$ où

$$\boxed{\mathcal{P}_\theta := \{\ \nu\ /\ \mathbb{E}_\nu(g(X,\theta)) = 0\ \}}$$

et $g : (\mathbb{R}^p, \Theta) \to \mathbb{R}^q$

- ➥ *moment condition model* : modèle **semiparamétrique**
- ➥ q est le nombre de contraintes imposées sur θ

Vraisemblance non-paramétrique

La *mesure empirique*

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$$

maximise $NP\mathcal{L}(\cdot)$ sur l'espace des probas sur $\mathbb{R}^p$.

(*Kiefer & Wolfowitz, 1956*)

On veut maximiser $NP\mathcal{L}(\cdot)$ sur l'ensemble $\mathcal{P} = \cup_{\theta\in\Theta}\mathcal{P}_\theta$ où

$$\boxed{\mathcal{P}_\theta := \{\ \nu\ /\ \mathbb{E}_\nu(g(X,\theta)) = 0\ \}}$$

et $g : (\mathbb{R}^p, \Theta) \rightarrow \mathbb{R}^q$

- ➥ *moment condition model* : modèle **semiparamétrique**
- ➥ q est le nombre de contraintes imposées sur θ

Vraisemblance non-paramétrique

La *mesure empirique*

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{X_i}$$

maximise $NP\mathcal{L}(\cdot)$ sur l'espace des probas sur $\mathbb{R}^p$.

(*Kiefer & Wolfowitz, 1956*)

On veut maximiser $NP\mathcal{L}(\cdot)$ sur l'ensemble $\mathcal{P} = \cup_{\theta\in\Theta}\mathcal{P}_\theta$ où

$$\boxed{\mathcal{P}_\theta := \{\ \nu \ /\ \mathbb{E}_\nu(g(X,\theta)) = 0\ \}}$$

et $g : (\mathbb{R}^p, \Theta) \to \mathbb{R}^q$

- *moment condition model* : modèle **semiparamétrique**
- q est le nombre de contraintes imposées sur θ

Vraisemblance empirique

Définition

On définit la **vraisemblance empirique** *de θ ayant observé $(X_1, \ldots, X_n)$, par*

$$\boxed{\mathcal{EL}(\theta) := \sup_{\nu \in \mathcal{P}_\theta} NP\mathcal{L}(\nu).}$$

L'EMVE de $\theta = \theta(\mu)$ est défini comme

$$\hat{\theta}_{EL} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} \mathcal{EL}(\theta)$$

Si $\mathcal{S}_n$ désigne le simplexe de $\mathbb{R}^n$, on a donc

$$\hat{\theta}_{EL} \in \arg\max_{\theta} \sup_{(p_i) \in \mathcal{S}_n} \left\{ \prod_{i=1}^n p_i \;/\; \sum_{i=1}^n p_i g(X_i, \theta) = 0 \right\}$$

Remarque : $\theta \mapsto \mathcal{EL}(\theta)$ est une *vraisemblance profilée*.

Vraisemblance empirique

Définition

On définit la **vraisemblance empirique** *de θ ayant observé $(X_1, \ldots, X_n)$, par*

$$\boxed{\mathcal{E}\mathcal{L}(\theta) := \sup_{\nu \in \mathcal{P}_\theta} NP\mathcal{L}(\nu).}$$

L'EMVE de $\theta = \theta(\mu)$ est défini comme

$$\hat{\theta}_{EL} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} \mathcal{E}\mathcal{L}(\theta)$$

Si $\mathcal{S}_n$ désigne le simplexe de $\mathbb{R}^n$, on a donc

$$\hat{\theta}_{EL} \in \arg\max_{\theta} \sup_{(p_i) \in \mathcal{S}_n} \left\{ \prod_{i=1}^n p_i \;/\; \sum_{i=1}^n p_i\, g(X_i, \theta) = 0 \right\}$$

Remarque : $\theta \longmapsto \mathcal{E}\mathcal{L}(\theta)$ est une *vraisemblance profilée*.

Vraisemblance empirique

Définition

On définit la **vraisemblance empirique** *de θ ayant observé $(X_1, \ldots, X_n)$, par*

$$\boxed{\mathcal{EL}(\theta) := \sup_{\nu \in \mathcal{P}_\theta} NP\mathcal{L}(\nu).}$$

L'EMVE de $\theta = \theta(\mu)$ est défini comme

$$\hat{\theta}_{EL} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} \mathcal{EL}(\theta)$$

Si $\mathcal{S}_n$ désigne le simplexe de $\mathbb{R}^n$, on a donc

$$\hat{\theta}_{EL} \in \arg\max_{\theta} \sup_{(p_i) \in \mathcal{S}_n} \left\{ \prod_{i=1}^n p_i \;/\; \sum_{i=1}^n p_i \, g(X_i, \theta) = 0 \right\}$$

Remarque : $\theta \mapsto \mathcal{EL}(\theta)$ est une *vraisemblance profilée*.

Vraisemblance empirique

Définition

On définit la **vraisemblance empirique** *de θ ayant observé $(X_1, \ldots, X_n)$, par*

$$\boxed{\mathcal{EL}(\theta) := \sup_{\nu \in \mathcal{P}_\theta} NP\mathcal{L}(\nu).}$$

L'EMVE de $\theta = \theta(\mu)$ est défini comme

$$\hat{\theta}_{EL} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} \mathcal{EL}(\theta)$$

Si $\mathcal{S}_n$ désigne le simplexe de $\mathbb{R}^n$, on a donc

$$\hat{\theta}_{EL} \in \arg\max_{\theta} \sup_{(p_i) \in \mathcal{S}_n} \left\{ \prod_{i=1}^n p_i \ / \ \sum_{i=1}^n p_i \, g(X_i, \theta) = 0 \right\}$$

Remarque : $\theta \mapsto \mathcal{EL}(\theta)$ est une *vraisemblance profilée.*

Calcul des estimateurs du MVE

Proposition

L'EMVE de $\theta = \theta(\mu)$ vérifie

$$\hat{\theta}_{EL} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} \left\{ -\sum_{i=1}^{n} \log(1+ < \hat{\lambda}(\theta), g(X_i, \theta) >) \right\}$$

où $\hat{\lambda}(\theta)$ désigne une solution dans $\mathbb{R}^q$ de

$$\sum_{i=1}^{n} (1+ < \lambda, g(X_i, \theta) >)^{-1} g(X_i, \theta) = 0$$

Si l'on pose $\hat{p}_i := \frac{1}{n}(1+ < \hat{\lambda}(\hat{\theta}_{EL}), g(X_i, \hat{\theta}_{EL}) >)^{-1}$ alors

$$\boxed{\hat{\mu}_{EL} := \sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i \, \delta_{X_i}}$$

est l'EMVE de la loi μ sous-jacente.

Calcul des estimateurs du MVE

Proposition

L'EMVE de $\theta = \theta(\mu)$ vérifie

$$\hat{\theta}_{EL} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} \left\{ -\sum_{i=1}^{n} \log(1+ < \hat{\lambda}(\theta), g(X_i, \theta) >) \right\}$$

où $\hat{\lambda}(\theta)$ désigne une solution dans $\mathbb{R}^q$ de

$$\sum_{i=1}^{n} (1+ < \lambda, g(X_i, \theta) >)^{-1} g(X_i, \theta) = 0$$

Si l'on pose $\hat{p}_i := \frac{1}{n}(1+ < \hat{\lambda}(\hat{\theta}_{EL}), g(X_i, \hat{\theta}_{EL}) >)^{-1}$ alors

$$\boxed{\hat{\mu}_{EL} := \sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i \, \delta_{X_i}}$$

est l'EMVE de la loi μ sous-jacente.

Expression de ces estimateurs ?

Dans le cas simple où $g(x, \theta) = x - \theta$ (*i.e.* $\theta = \mathbb{E}_\mu(X)$), on constate que

$$\hat{\theta}_{EL} = \qquad \text{et} \quad \hat{\mu}_{EL} =$$

Dans le cas général, si

$$\sum_{i=1}^n g(X_i, \theta) = 0$$

admet une solution $\tilde{\theta}$ (qui est donc un *M-estimateur* de θ), alors on constate de la même façon que

$$\hat{\theta}_{EL} = \tilde{\theta} \quad \text{et} \quad \hat{\mu}_{EL} = \mu_n$$

Quel intérêt alors cette "méthode" présente-t-elle ? ?

Expression de ces estimateurs ?

Dans le cas simple où $g(x,\theta) = x - \theta$ (*i.e.* $\theta = \mathbb{E}_\mu(X)$), on constate que

$$\hat{\theta}_{EL} = \overline{X}_n \quad \text{et} \quad \hat{\mu}_{EL} = \mu_n\,!$$

(avec $\hat{\lambda}(\overline{X}_n) = 0$ donc $\hat{p}_i = 1/n$).

Dans le cas général, si

$$\sum_{i=1}^n g(X_i,\theta) = 0$$

admet une solution $\tilde{\theta}$ (qui est donc un *M-estimateur* de θ), alors on constate de la même façon que

$$\hat{\theta}_{EL} = \tilde{\theta} \quad \text{et} \quad \hat{\mu}_{EL} = \mu_n$$

Quel intérêt alors cette "méthode" présente-t-elle ? ?

Expression de ces estimateurs ?

Dans le cas simple où $g(x,\theta) = x - \theta$ (*i.e.* $\theta = \mathbb{E}_\mu(X)$), on constate que

$$\hat{\theta}_{EL} = \overline{X}_n \quad \text{et} \quad \hat{\mu}_{EL} = \mu_n\,!$$

(avec $\hat{\lambda}(\overline{X}_n) = 0$ donc $\hat{p}_i = 1/n$).

Dans le cas général, si

$$\textstyle\sum_{i=1}^n g(X_i,\theta) = 0$$

admet une solution $\tilde{\theta}$ (qui est donc un *M-estimateur* de θ), alors on constate de la même façon que

$$\hat{\theta}_{EL} = \tilde{\theta} \quad \text{et} \quad \hat{\mu}_{EL} = \mu_n$$

Quel intérêt alors cette “méthode” présente-t-elle ? ?

Expression de ces estimateurs ?

Dans le cas simple où $g(x,\theta) = x - \theta$ (*i.e.* $\theta = \mathbb{E}_\mu(X)$), on constate que

$$\hat{\theta}_{EL} = \overline{X}_n \quad \text{et} \quad \hat{\mu}_{EL} = \mu_n\,!$$

(avec $\hat{\lambda}(\overline{X}_n) = 0$ donc $\hat{p}_i = 1/n$).

Dans le cas général, si

$$\textstyle\sum_{i=1}^n g(X_i,\theta) = 0$$

admet une solution $\tilde{\theta}$ (qui est donc un *M-estimateur* de θ), alors on constate de la même façon que

$$\hat{\theta}_{EL} = \tilde{\theta} \quad \text{et} \quad \hat{\mu}_{EL} = \mu_n$$

Quel intérêt alors cette "méthode" présente-t-elle ? ?

Rapport de vraisemblance empirique

On introduit le *rapport de vraisemblance empirique*

$$\boxed{ELR(\theta) := \frac{\sup_{\nu \in \mathcal{P}_\theta} NP\mathcal{L}(\nu)}{\sup_\nu NP\mathcal{L}(\nu)} = \frac{\mathcal{E}\mathcal{L}(\theta)}{n^{-n}}}$$

qui, comme on vient de le voir, coïncide souvent avec l'expression naturelle

$$ELR(\theta) = \frac{\mathcal{E}\mathcal{L}(\theta)}{\mathcal{E}\mathcal{L}(\hat{\theta}_{EL})}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} ELR(\theta) &= \sup_{(p_i)} \left\{ \textstyle\prod_{i=1}^n (np_i) \;/\; (p_i) \in \mathcal{S}_n \,,\, \sum_{i=1}^n p_i\, g(X_i, \theta) = 0 \right\} \\ &= \textstyle\prod_{i=1}^n (1 + < \hat{\lambda}(\theta), g(X_i, \theta) >)^{-1} \end{aligned}$$

Rapport de vraisemblance empirique

On introduit le *rapport de vraisemblance empirique*

$$\boxed{ELR(\theta) := \frac{\sup_{\nu \in \mathcal{P}_\theta} NP\mathcal{L}(\nu)}{\sup_\nu NP\mathcal{L}(\nu)} = \frac{\mathcal{E}\mathcal{L}(\theta)}{n^{-n}}}$$

qui, comme on vient de le voir, coïncide souvent avec l'expression naturelle

$$ELR(\theta) = \frac{\mathcal{E}\mathcal{L}(\theta)}{\mathcal{E}\mathcal{L}(\hat{\theta}_{EL})}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} ELR(\theta) &= \sup_{(p_i)} \left\{ \prod_{i=1}^n (np_i) \;/\; (p_i) \in \mathcal{S}_n \,,\, \sum_{i=1}^n p_i\, g(X_i, \theta) = 0 \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \left(1 + < \hat{\lambda}(\theta), g(X_i, \theta) > \right)^{-1} \end{aligned}$$

Rapport de vraisemblance empirique

On introduit le *rapport de vraisemblance empirique*

$$\boxed{\boldsymbol{ELR(\theta) := \frac{\sup_{\nu \in \mathcal{P}_\theta} NP\mathcal{L}(\nu)}{\sup_\nu NP\mathcal{L}(\nu)} = \frac{\mathcal{E}\mathcal{L}(\theta)}{n^{-n}}}}$$

qui, comme on vient de le voir, coïncide souvent avec l'expression naturelle

$$ELR(\theta) = \frac{\mathcal{E}\mathcal{L}(\theta)}{\mathcal{E}\mathcal{L}(\hat{\theta}_{EL})}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} ELR(\theta) &= \sup_{(p_i)} \left\{ \prod_{i=1}^n (np_i) \ / \ (p_i) \in \mathcal{S}_n \,,\ \sum_{i=1}^n p_i\, g(X_i, \theta) = 0 \ \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n (1 + < \hat{\lambda}(\theta), g(X_i, \theta) >)^{-1} \end{aligned}$$

Analogue vraisemblance empirique du LRT

Dans le cas où $g(x,\theta) = x - \theta$ (*i.e.* $\theta = \mathbb{E}_\mu(X)$), on a

Théorème (Owen, 1991)

Si $\theta_0 = \mathbb{E}_\mu(X)$ *et* $\Sigma = Cov_\mu(X)$ *est de rang* $q \geq 1$, *alors*

$$\boxed{-2\log ELR(\theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(q)}$$

donc

$$C_{r,n} := \{ \theta \in \mathbb{R}^p \ / \ -2\log ELR(\theta) \leq r \}$$

est un convexe de $\mathbb{R}^p$ *qui constitue une région de confiance de niveau asymptotique* $1-\alpha = \mathbb{P}[\chi^2(q) \leq r]$ *pour* θ.

De plus, si $\mathbb{E}(\|X\|^4) < \infty$, *alors*

$$\left| \mathbb{P}_\mu(\mu \in C_{r,n}) - \mathbb{P}(\chi^2(q) \leq r) \right| = o(n^{-1/2})$$

Rem : $-2\log ELR(\theta_0) = 2\sum_{i=1}^n \log(1 + < \hat{\lambda}(\theta_0), g(X_i,\theta_0) >)$

Analogue vraisemblance empirique du LRT

Dans le cas où $g(x,\theta) = x - \theta$ (*i.e.* $\theta = \mathbb{E}_\mu(X)$), on a

Théorème (Owen, 1991)

Si $\theta_0 = \mathbb{E}_\mu(X)$ et $\Sigma = Cov_\mu(X)$ est de rang $q \geq 1$, alors

$$\boxed{-2\log ELR(\theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(q)}$$

donc

$$C_{r,n} := \{\ \theta \in \mathbb{R}^p \ / \ -2\log ELR(\theta) \leq r\ \}$$

est un convexe de $\mathbb{R}^p$ qui constitue une région de confiance de niveau asymptotique $1-\alpha = \mathbb{P}[\chi^2(q) \leq r]$ pour θ.

De plus, si $\mathbb{E}\left(\|X\|^4\right) < \infty$, alors

$$\left|\mathbb{P}_\mu\left(\mu \in C_{r,n}\right) - \mathbb{P}\left(\chi^2(q) \leq r\right)\right| = o(n^{-1/2})$$

Rem : $-2\log ELR(\theta_0) = 2\sum_{i=1}^n \log(1 + < \hat{\lambda}(\theta_0), g(X_i,\theta_0) >)$

Analogue vraisemblance empirique du LRT

Dans le cas où $g(x,\theta) = x - \theta$ (*i.e.* $\theta = \mathbb{E}_\mu(X)$), on a

Théorème (Owen, 1991)

Si $\theta_0 = \mathbb{E}_\mu(X)$ et $\Sigma = Cov_\mu(X)$ est de rang $q \geq 1$, alors

$$\boxed{-2 \log ELR(\theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(q)}$$

donc
$$C_{r,n} := \{ \theta \in \mathbb{R}^p \ / \ -2 \log ELR(\theta) \leq r \}$$

est un convexe de $\mathbb{R}^p$ qui constitue une région de confiance de niveau asymptotique $1 - \alpha = \mathbb{P}[\chi^2(q) \leq r]$ pour θ.

De plus, si $\mathbb{E}\left(\|X\|^4 \right) < \infty$, alors

$$\left| \mathbb{P}_\mu(\mu \in C_{r,n}) - \mathbb{P}(\chi^2(q) \leq r) \right| = o(n^{-1/2})$$

Rem : $-2 \log ELR(\theta_0) = 2\sum_{i=1}^n \log(1 + < \hat\lambda(\theta_0), g(X_i, \theta_0) >)$

Pour le modèle à condition de moments général, où $q \geq k$

$$\mu \in \mathcal{P} = \cup_\theta \mathcal{P}_\theta \quad \text{où} \quad \mathcal{P}_\theta := \{ \, \nu \; / \; \mathbb{E}_\nu(g(X,\theta)) = 0 \, \}$$

Qin & Lawless (1994) prouvent la normalité asymptotique

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{EL} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (D'SD)^{-1}) \qquad \text{(quand } \mu \in \mathcal{P}_\theta\text{)}$$

$$\text{où} \; \begin{cases} D = \mathbb{E}_\mu[\nabla_\theta g(X,\theta(\mu))] + \text{conditions de régularité sur } g \\ S = \mathbb{E}_\mu[g(X,\theta(\mu))g(X,\theta(\mu))^t] \text{ supposée définie positive.} \end{cases}$$

Ils établissent également la convergence en loi

$$-2 \log ELR(\theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(k)$$

quand $\mathbb{E}_\mu[g(X,\theta)] = 0$, et donnent d'autres résultats dans le cadre particulier où $q > k$ (risque de suridentification de θ).

Pour le modèle à condition de moments général, où $q \geq k$

$$\mu \in \mathcal{P} = \cup_\theta \mathcal{P}_\theta \quad \text{où} \quad \mathcal{P}_\theta := \{\ \nu \ / \ \mathbb{E}_\nu(g(X,\theta)) = 0\ \}$$

Qin & Lawless (1994) prouvent la normalité asymptotique

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{EL} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (D'SD)^{-1}) \qquad \text{(quand } \mu \in \mathcal{P}_\theta\text{)}$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} D = \mathbb{E}_\mu[\nabla_\theta g(X, \theta(\mu))] + \text{conditions de régularité sur } g \\ S = \mathbb{E}_\mu[g(X, \theta(\mu)) g(X, \theta(\mu))^t] \text{ supposée définie positive.} \end{cases}$$

Ils établissent également la convergence en loi

$$-2 \log ELR(\theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(k)$$

quand $\mathbb{E}_\mu[g(X,\theta)] = 0$, et donnent d'autres résultats dans le cadre particulier où $q > k$ (risque de suridentification de θ).

Rappels sur la divergence de Kullback-Leibler

Si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur un même espace, on définit

$$K(\mu,\nu) = \begin{cases} \int \frac{d\mu}{d\nu} \log \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu \;=\; -\int \log \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu & \text{si } \mu << \nu \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

encore appelée entropie relative de μ par rapport à ν.

μ_n désignant la mesure empirique associée à $(X_i)_{i=1..n}$
on a donc

$$K(\mu_n,\nu) = \begin{cases} -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(np_i) & \text{si } \nu = \sum_{i=1}^n p_i \delta_{X_i} \text{ et } p_i > 0\ (\forall i) \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Rappels sur la divergence de Kullback-Leibler

Si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur un même espace, on définit

$$K(\mu,\nu) = \begin{cases} \int \frac{d\mu}{d\nu} \log \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu \;=\; -\int \log \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu & \text{si } \mu << \nu \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

encore appelée entropie relative de μ par rapport à ν.

μ_n désignant la mesure empirique associée à $(X_i)_{i=1..n}$
on a donc

$$K(\mu_n,\nu) = \begin{cases} -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(np_i) & \text{si } \nu = \sum_{i=1}^n p_i \delta_{X_i} \text{ et } p_i > 0\ (\forall i) \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'EMVE vu comme un estimateur du minimum de contraste

On a

$$
\begin{aligned}
& -2 \log ELR(\theta) \\
= \quad & -2n \sup \left\{ \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_1^n \log(np_i) \;/\; (p_i) \in \mathcal{S}_n \text{ et } \sum_1^n p_i g(X_i,\theta) = 0 \right\} \\
= \quad & 2n \inf \left\{ K(\mu_n,\nu) \;/\; \mathbb{E}_\nu(g(X,\theta)) = 0 \right\} \\
= \quad & 2n \inf_{\nu \in \mathcal{P}_\theta} K(\mu_n,\nu)
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$\boxed{\textbf{maximiser } \mathcal{EL}(\theta) \;=\; \textbf{minimiser } K(\mu_n,\nu) \textbf{ pour } \nu \in \mathcal{P}}$$

$\rightsquigarrow$ d'autres choix de divergence ?
avantage de celle de Kullback ?

L'EMVE vu comme un estimateur du minimum de contraste

On a

$$
\begin{aligned}
& -2\log ELR(\theta) \\
= \; & -2n \sup \left\{ \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_1^n \log(np_i) \;/\; (p_i) \in \mathcal{S}_n \text{ et } \textstyle\sum_1^n p_i g(X_i, \theta) = 0 \right\} \\
= \; & 2n \inf \left\{ K(\mu_n, \nu) \;/\; \mathbb{E}_\nu(g(X, \theta)) = 0 \right\} \\
= \; & 2n \inf_{\nu \in \mathcal{P}_\theta} K(\mu_n, \nu)
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$\boxed{\textbf{maximiser } \mathcal{EL}(\theta) \;\; \textbf{=} \;\; \textbf{minimiser } K(\mu_n, \nu) \textbf{ pour } \nu \in \mathcal{P}}$$

$\leadsto$ d'autres choix de divergence ?
avantage de celle de Kullback ?

L'EMVE vu comme un estimateur du minimum de contraste

On a

$$\begin{aligned} & -2\log ELR(\theta) \\ = \;& -2n \sup \left\{ \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_1^n \log(np_i) \;/\; (p_i) \in \mathcal{S}_n \text{ et } \textstyle\sum_1^n p_i g(X_i,\theta) = 0 \right\} \\ = \;& 2n \inf \left\{ K(\mu_n,\nu) \;/\; \mathbb{E}_\nu(g(X,\theta)) = 0 \right\} \\ = \;& 2n \inf_{\nu \in \mathcal{P}_\theta} K(\mu_n,\nu) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\textbf{maximiser } \mathcal{EL}(\theta) \;\textbf{=}\; \textbf{minimiser } K(\mu_n,\nu) \textbf{ pour } \nu \in \mathcal{P}}$$

$\rightsquigarrow$ d'autres choix de divergence ?
avantage de celle de Kullback ?

Estimation de paramètres fonctionnels

Pour l'estimation de paramètres fonctionnels généraux

$$\boldsymbol{\theta = T(\mu)}$$

(*i.e.* pas seulement définis par $\mathbb{E}_\mu(\, g(X,\theta)\,) = 0$), il suffit de poser

$$\begin{aligned} \mathcal{EL}(\theta) &:= \sup_{\nu<<\mu_n} \left\{ \prod_{i=1}^n (d\nu/d\mu_n)(X_i) \;/\; T(\nu) = \theta \right\} \\ -\frac{1}{n}\log ELR(\theta) &= \sup_{\nu<<\mu_n} \left\{ K(\mu_n,\nu) \;/\; T(\nu) = \theta \right\} \end{aligned}$$

Dans ce cadre, des travaux existent sous l'hypothèse de la différentiabilité au sens de Fréchet ou de Hadamard, de la fonctionnelle T (voir Owen (1988), Bertail (2006) par exemple).

Estimation de paramètres fonctionnels

Pour l'estimation de paramètres fonctionnels généraux

$$\boldsymbol{\theta = T(\mu)}$$

(*i.e.* pas seulement définis par $\mathbb{E}_\mu(\,g(X,\theta)\,) = 0$), il suffit de poser

$$\begin{aligned} \mathcal{EL}(\theta) &:= \sup_{\nu<<\mu_n}\left\{ \prod_{i=1}^n (d\nu/d\mu_n)(X_i) \,/\, T(\nu)=\theta \right\} \\ -\frac{1}{n}\log ELR(\theta) &= \sup_{\nu<<\mu_n}\left\{ K(\mu_n,\nu) \,/\, T(\nu)=\theta \right\} \end{aligned}$$

Dans ce cadre, des travaux existent sous l'hypothèse de la différentiabilité au sens de Fréchet ou de Hadamard, de la fonctionnelle T (voir Owen (1988), Bertail (2006) par exemple).

Quelques cadres d'application de la méthode EL

- modèles de mélange
- estimation de quantiles
- modèles linéaires, GLMs, partiellement linéaires
- modèles de régression non-paramétrique
- tests non-paramétrique d'adéquation, de symétrie,...
- statistique de données censurées
- théorie des sondages
- ...

Intéret de la méthode

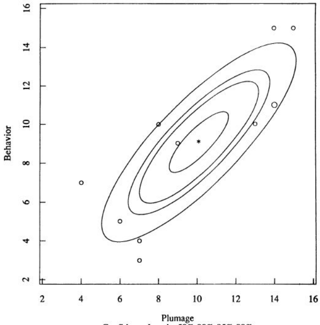
- ➜ propriétés du LRT mais en semi-paramétrique !
- ➜ les régions de confiance résultantes ont un “degré d'asymétrie” automatiquement adapté aux données

Intéret de la méthode

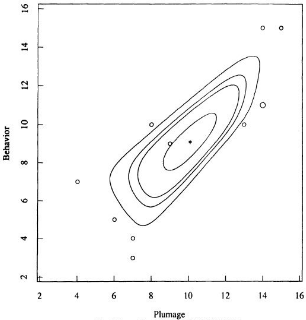
- propriétés du LRT mais en semi-paramétrique !
- les régions de confiance résultantes ont un “degré d'asymétrie” automatiquement adapté aux données

Intéret de la méthode

- ➜ propriétés du LRT mais en semi-paramétrique !
- ➜ les régions de confiance résultantes ont un "degré d'asymétrie" automatiquement adapté aux données



Confidence Levels: 50% 90% 95% 99%



Confidence Levels: 50% 90% 95% 99%

Intéret de la méthode (suite)

- ➜ les régions de confiance résultantes peuvent être "corrigées au sens de Bartlett"
- ➜ efficacité asymptotique non paramétrique atteinte par l'EMVE et par des fonctionnelles de l'EMVE de μ

$$\xi = \mathbb{E}_\mu(\Psi(\theta(\mu), X)) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\xi} = \sum_{i=1}^n \hat{p}_i \Psi(\hat{\theta}_{EL}, X_i)$$

- ➜ prise en compte facile de contraintes sur le paramètre

Intéret de la méthode (suite)

- ➜ les régions de confiance résultantes peuvent être "corrigées au sens de Bartlett"
- ➜ efficacité asymptotique non paramétrique atteinte par l'EMVE et par des fonctionnelles de l'EMVE de μ

$$\xi = \mathbb{E}_\mu(\Psi(\theta(\mu), X)) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\xi} = \sum_{i=1}^n \hat{p}_i \Psi(\hat{\theta}_{EL}, X_i)$$

- ➜ prise en compte facile de contraintes sur le paramètre

Intéret de la méthode (suite)

- ➜ les régions de confiance résultantes peuvent être "corrigées au sens de Bartlett"
- ➜ efficacité asymptotique non paramétrique atteinte par l'EMVE et par des fonctionnelles de l'EMVE de μ

$$\xi = \mathbb{E}_\mu(\Psi(\theta(\mu), X)) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\xi} = \sum_{i=1}^n \hat{p}_i \Psi(\hat{\theta}_{EL}, X_i)$$

- ➜ prise en compte facile de contraintes sur le paramètre

Intéret de la méthode (suite)

- ➜ les régions de confiance résultantes peuvent être "corrigées au sens de Bartlett"
- ➜ efficacité asymptotique non paramétrique atteinte par l'EMVE et par des fonctionnelles de l'EMVE de μ

$$\xi = \mathbb{E}_\mu(\Psi(\theta(\mu), X)) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\xi} = \sum_{i=1}^n \hat{p}_i \Psi(\hat{\theta}_{EL}, X_i)$$

- ➜ prise en compte facile de contraintes sur le paramètre

Intéret de la méthode (suite)

- les régions de confiance résultantes peuvent être "corrigées au sens de Bartlett"
- efficacité asymptotique non paramétrique atteinte par l'EMVE et par des fonctionnelles de l'EMVE de μ

$$\xi = \mathbb{E}_\mu(\Psi(\theta(\mu), X)) \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i \Psi(\hat{\theta}_{EL}, X_i)$$

- prise en compte facile de contraintes sur le paramètre

$$\text{Domaines d'application} \begin{array}{l} \nearrow \text{ économétrie} \\ \\ \searrow \text{ biostats (analyse de survie)} \end{array}$$

Quelques références

Art Owen
Empirical Likelihood.
Chapman & Hall/CRC, 2001.

P. Bertail
Empirical likelihood in some semiparametric models.
Bernoulli, 12 (2) : 299–331, 2006.

J.H. Einmal & I.W. McKeage
Empirical likelihood based hypothesis testing.
Bernoulli, 9(2) : 267–290, 2003.

S. Chen & P. Hall
Smoothed empirical likelihood confidence intervals for quantiles.
Annals of Statistics, 21(3) : 1166–1181, 1993.

Y. Kitamura
Empirical likelihood methods in econometrics : theory and practice.
Cowles Foundation discussion paper, Working Paper n^{o}1569, 2006.

Y. Kitamura
Empirical likelihood methods with weakly dependent processes.
Annals of Statistics, 25(5) : 2084–2102, 1997.

A. B. Owen
Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional.
Biometrika, 75(2) : 237–249, 1988.

A. B. Owen
Empirical likelihood ratio confidence regions.
Annals of Statistics, 18(1) : 90–120, 1990.

A. B. Owen
Empirical likelihood for linear models.
Annals of Statistics, 19(4) : 1725–1747, 1991.

Y. S. Qin & J. Lawless
Empirical likelihood and general estimating equations.
Annals of Statistics, 22(1) : 300–325, 1994.

G.Qin & M.Tsao
Empirical likelihood based inference for the derivative of the nonparametric regression function
Bernoulli, 11(4) : 715–735, 2005.

S. S. Wilks
The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses.
Annals of Mathematical Statistics, 9 : 60–62, 1938.